單元 4

排列

建議配分　每題 10 分。

1. 已知 $4P^n_3=5P^{n-1}_3$，求正整數 n 的值。

解▸ $4P^n_3=5P^{n-1}_3\Rightarrow 4n(n-1)(n-2)=5(n-1)(n-2)(n-3)$

$\Rightarrow 4n=5(n-3)$（因為 $n-1\geq 3$，即 $n\geq 4$）

$\Rightarrow n=15$。

2. 已知獨唱比賽共有 7 人報名參加，求共有多少種出賽順序？

解▸ 因為 7 人的出賽順序，可視作參賽者排成一列的情形，

所以共有 $P^7_7=7!=5040$ 種出賽順序。

3. 老師想從10個同學中，指派3人分別擔任主席、司儀及記錄，共有多少種指派方案？

解▸ 指派方案共有 $P^{10}_3=\dfrac{10!}{7!}=10\times 9\times 8=720$（種）。

4. 晚會有3個歌唱節目及3個舞蹈節目要安排，依下列各條件，求節目安排的方案各有多少種：

(1)歌唱節目及舞蹈節目相間隔排列。

(2)歌唱節目及舞蹈節目各自排在一起。

解▸ (1) 分二類：

① 歌舞歌舞歌舞。

② 舞歌舞歌舞歌。

因為在每一類中，將3個歌唱節目排入有 $3!=6$ 種排法，3個舞蹈節目排入有 $3!=6$ 種排法，所以方案共有 $2\times6\times6=72$（種）。

(2) 歌唱節目及舞蹈節目要各自排在一起，如下圖所示：

$\boxed{\text{歌歌歌}}$　$\boxed{\text{舞舞舞}}$

將3個歌唱節目看成「1」個，3個舞蹈節目看成「1」個，有 $2!=2$ 種排法；又3個歌唱節目之間有 $3!=6$ 種排法，3個舞蹈節目之間有 $3!=6$ 種排法。故方案共有 $2\times6\times6=72$（種）。

5. 若甲乙丙丁戊共5人排成一列，則甲不排首位且乙不排末位的排法共有多少種？

解▸ 所求＝任意排－(甲排首位∪乙排末位)

＝任意排－(甲排首位＋乙排末位－甲排首位∩乙排末位)

$=5!-(4!+4!-3!)$

$=78$（種）。

6. 由六個數字0，0，0，1，1，2排成的六位數，共有多少個？

解▸ 所求＝任意排－0排首位

$$=\frac{6!}{3!2!1!}-\frac{5!}{2!2!1!}$$

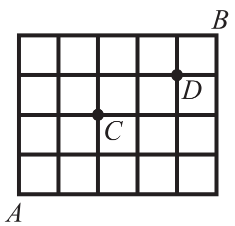
$=60-30=30$（個）。

7. 在右圖的棋盤街道中，從 A 到 B 走捷徑，求下列情形各有多少種走法？

(1)任意走捷徑。

(2)經 C 點且經 D 點。

(3)經 C 點或經 D 點。



解▸ (1) 任意走捷徑的方法共有 $\frac{9!}{5!4!}=126$（種）。

(2) 經 C 點且經 D 點走捷徑的方法共有

$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!1!}\times\frac{2!}{1!1!}=36$（種）。

(3) 設 S 為所有經 C 點的捷徑組成的集合，

T 為所有經 D 點的捷徑組成的集合。

經 C 點或經 D 點走捷徑的方法共有

$$n(S\cup T)=n(S)+n(T)-n(S\cap T)$$

$$=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{5!}{3!2!}+\frac{7!}{4!3!}\times\frac{2!}{1!1!}-36$$

$$=60+70-36=94$$（種）。

8. 小華每逢週日都是從羽球、桌球與籃球等 3 種球類運動選一種做運動，求這個月的 4 個週日共有多少種不同的運動安排。

解▸ 因為每周日都有 3 種選擇，

所以 4 個週日的安排共有 $3\times3\times3\times3=3^4=81$（種）。

9. 由 0，1，2，3，4 共五個數字組成的三位數中，下列各情形共有多少個偶數？
(1)數字不可重複。
(2)數字可以重複。

解▸ (1) 因為偶數的個位數必為偶數，所以分成三類：
①□ □ 0 ：有 $4\times3=12$ 個。
②□ □ 2 ：有 $3\times3=9$ 個。
③□ □ 4 ：有 $3\times3=9$ 個。
由加法原理，得偶數共有 $12+9+9=30$（個）。
(2) 因為偶數的個位數必為偶數，所以分成三類：
①□ □ 0 ：有 $4\times5=20$ 個。
②□ □ 2 ：有 $4\times5=20$ 個。
③□ □ 4 ：有 $4\times5=20$ 個。
由加法原理，得共有 $20+20+20=60$（個）。

10. 有一樓梯共有 8 階，今有一人上樓，若每步走一階或二階，則共有多少種上樓的方法？

解▸ 設走一階 x 次，走二階 y 次。依題意，得 $x+2y=8$，
其中 x，y 為非負整數。x，y 的解有以下 5 組解：

x	0	2	4	6	8
y	4	3	2	1	0

因此，上樓的方法共有

$$\frac{4!}{0!4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{7!}{6!1!}+\frac{8!}{8!0!}=1+10+15+7+1=34\text{（種）。}$$