



單元

1~2

總習題



建議配分

第 1~8 題每題 10 分，第 9 題每小題 10 分。

1. 下列哪個數列中第10項的值為正？

(1) $\langle 0^n \rangle$

(2) $\langle -2n+10 \rangle$

(3) $\langle (-3)^{n-1} \rangle$

(4) $\left\langle \frac{-n+2}{2n-1} \right\rangle$

(5) $\left\langle \frac{2^n}{11} \right\rangle$ 。

〔搭配單元 1〕

解► 各數列的第10項如下：

(1) $0^{10} = 0$ 。

(2) $-2 \times 10 + 10 = -10 < 0$ 。

(3) $(-3)^{10-1} = (-3)^9 = -3^9 < 0$ 。

(4) $\frac{-10+2}{2 \times 10-1} = -\frac{8}{19} < 0$ 。

(5) $\frac{2^{10}}{11} > 0$ 。

故選(5)。

2. 已知一等差數列共有19項，其公差 $d > 0$ ，且 $a_1 + a_{19} = 0$ ，下列哪個選項的值為正？

(1) a_1

(2) a_{11}

(3) a_{10}

(4) $a_9 + a_{10} + a_{11}$

(5) $a_3 + a_{15}$ 。〔搭配單元 1〕

解► 因為公差 $d > 0$ ，所以數列中的每一項會越來越大。

(1) 因為 $a_1 < a_{19}$ ，又 $a_1 + a_{19} = 0$ ，所以 $a_1 < 0$ 。

(2) (3) $a_{10} = a_1 + 9d = a_{19} - 9d$ ，可知 $a_1 + a_{19} = 2a_{10}$ ，即 $a_{10} = 0$ 。因為 $a_{10} < a_{11}$ ，所以 $a_{11} > 0$ 。

(4) $a_9 + a_{10} + a_{11} = (a_{10} - d) + a_{10} + (a_{10} + d) = 3a_{10} = 0$ 。

(5) $a_3 + a_{15} = (a_{10} - 7d) + (a_{10} + 5d) = 2a_{10} - 2d = -2d < 0$ 。

故選(2)。

3. 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ ， $a_4 + a_5 + a_6 = 4$ ，求 $a_7 + a_8 + a_9$ 的值。〔搭配單元 2〕

解► 設此數列的首項為 a ，公比為 r 。

依題意可得

$$\begin{cases} a + ar + ar^2 = 2 \\ ar^3 + ar^4 + ar^5 = 4 \end{cases},$$

將兩式相除可得 $\frac{ar^3 + ar^4 + ar^5}{a + ar + ar^2} = r^3 = 2$ ，

故 $a_7 + a_8 + a_9 = ar^6 + ar^7 + ar^8 = r^6(a + ar + ar^2) = 2^2 \times 2 = 8$ 。

4. 在 1 和 99 之間插入 n 個數，使其成一等差數列，則 n 至少要多少時，才會使這數列的總和超過 20000？

(1) 99

(2) 199

(3) 299

(4) 399

(5) 499。

〔搭配單元 2〕

解► 令 $99 = 1 + (n+1)d$ ，得 $d = \frac{98}{n+1}$ ，

又因為這 $n+2$ 個數之和超過 20000，

所以 $\frac{(n+2) \times (1+99)}{2} > 20000 \Rightarrow (n+2) > 400 \Rightarrow n > 398$ 。故選(4)。

5. 某公司民國 98 年營業額為 100 億元，民國 99 年營業額為 125 億元，可得該公司 99 年的成長率為 25%。如果該公司在 100，101，102 三年的成長率皆相同，且 102 年的營業額為 216 億元，那麼該公司在 102 年的成長率為_____%。〔搭配單元 1〕

解► 設 100，101，102 三年的成長率均為 r 。

由題意可知：

$$102 \text{ 年的營業額為 } 216 = 125 \cdot (1+r)^3, \text{ 解得 } r = \frac{1}{5} = 20\%。$$

故該公司在 102 年的成長率為 20%。

6. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中 $a_2 = 54$ ， $a_5 = 16$ ，求 $a_7 =$ _____。〔搭配單元 1〕

解► 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a ，公比為 r ，則 $a_2 = ar$ ， $a_5 = ar^4$ 。

由題意可得： $ar = 54$ ， $ar^4 = 16$ ，

將兩式相除可得 $\frac{ar^4}{ar} = \frac{16}{54}$ ，即 $r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ ，解得 $r = \frac{2}{3}$ ，代回 $ar = 54$ ，可得 $a = 81$ 。

因此， $a_7 = ar^6 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{9}$ 。

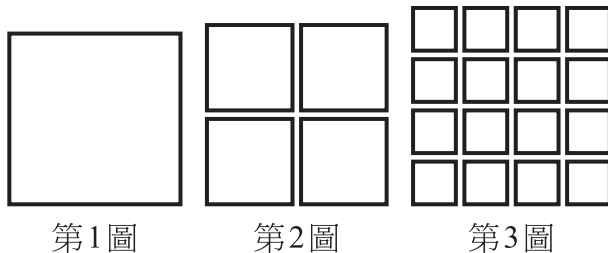
7. 若等差數列 a, b, c 滿足 $a+b+c=15$ ，且 $a-1, b-1, c+1$ 是等比數列，則 $(a, b, c) =$ _____。
〔搭配單元 1〕

解► 設等差數列 a, b, c 的公差為 d ，可得 $a = b - d$ ， $c = b + d$ ，
將其代入 $a + b + c = 15$ ，得 $3b = 15$ ，解得 $b = 5$ ，並得 $a = 5 - d$ ， $c = 5 + d$ 。
再將其代入 $a - 1, b - 1, c + 1$ ，得 $4 - d, 4, 6 + d$ 是等比數列，
即 $\frac{4}{4-d} = \frac{6+d}{4}$ ，整理得 $d^2 + 2d - 8 = 0$ ，解得 $d = 2$ 或 -4 。
當 $d = 2$ 時， $a = 3, b = 5, c = 7$ ；而當 $d = -4$ 時， $a = 9, b = 5, c = 1$ ，
故 $(a, b, c) = (3, 5, 7)$ 或 $(9, 5, 1)$ 。

8. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ， n 為自然數，求 $a_{12} =$ _____。
〔搭配單元 2〕

解► $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 + 1$ ，
 $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times (2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$ ，
 $a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \times (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$ ，
可推得 $a_{12} = 2^{11} + 2^{10} + \cdots + 2 + 1 = \frac{1 \times (2^{12} - 1)}{2 - 1} = 4095$ 。

9. 將一個正方形等分成 4 個相同的正方形，稱為一個步驟。第 1 圖中，是一個周長為 L 的正方形，第 2 圖為經過一個步驟的圖形，第 3 圖為經過兩個步驟的圖形。以此類推，設經過 $n-1$ 個步驟後形成第 n 圖，且此圖中所有正方形的周長總和為 a_n ，並可知 $a_1 = L$ 。



(1) 選出 a_4 的值。

- ① $2L$ ② $4L$ ③ $6L$ ④ $8L$ ⑤ $10L$ 。

(2) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式並求 a_{10} 的值。

[搭配單元 1]

解► (1) 因為每經過一個步驟後，新產生的小正方形之周長為前一圖中正方形周長的 $\frac{1}{2}$ ，而正方形的個數則是前一圖中正方形個數的 4 倍，所以周長總和為前一圖的 $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ 倍。

因此， $a_2 = 2a_1 = 2L$ ， $a_3 = 2a_2 = 2 \times 2L = 2^2 L = 4L$ ， $a_4 = 2a_3 = 2 \times 4L = 8L$

故選④。

(2) 由(1)的討論可知： $\langle a_n \rangle$ 是首項為 L ，公比為 2 的等比數列，

其遞迴關係式為
$$\begin{cases} a_1 = L \\ a_n = 2a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}。$$

且 $a_{10} = L \times 2^{10-1} = 512L$ 。