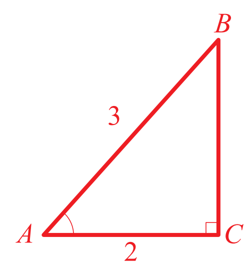
單元 10 直角三角形的三角比

建議配分 每題 10 分。

1. 已知 $\angle A$ 為銳角且 $\cos A=\dfrac{2}{3}$，求 $\sin A$ 和 $\tan A$ 的值。

解▸ 作一直角 $\triangle ABC$，使 $\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC}=2$，斜邊 $\overline{AB}=3$，如右圖所示，可得 $\overline{BC}=\sqrt{5}$ 。

故 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ， $\tan A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 。



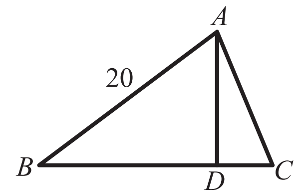
2. 求下列各式的值：

(1) $\sin^2 45°+\tan 30°\sin 60°$ 。　　(2) $\dfrac{\sin 60°-\tan 45°}{\tan 60°-2\tan 45°}$ 。

解▸ (1) $\sin^2 45°+\tan 30°\sin 60°=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ 。

(2) $\dfrac{\sin 60°-\tan 45°}{\tan 60°-2\tan 45°}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{1}{2}$ 。

3. 如右圖，在$\triangle ABC$中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$。已知$\overline{AB}=20$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\sin C=\dfrac{12}{13}$，求$\overline{BC}$的值。



解▸ $\triangle ABD$中，$\overline{AD}=\overline{AB}\times\sin B=20\times\dfrac{3}{5}=12$，

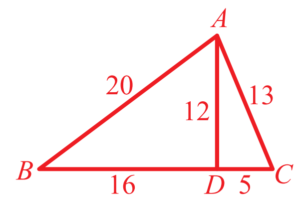
$\overline{BD}=\overline{AB}\times\cos B=20\times\dfrac{4}{5}=16$，

$\triangle ACD$中，$\overline{AC}\times\sin C=\overline{AD}$

$\Rightarrow\overline{AC}\times\dfrac{12}{13}=12\Rightarrow\overline{AC}=13$，

$\overline{DC}=\overline{AC}\cos C=13\times\dfrac{5}{13}=5$，

所求$=\overline{BD}+\overline{DC}=16+5=21$。



4. 已知θ為銳角，且滿足方程式$2\cos^2\theta+3\cos\theta=2$，求$\tan\theta$的值。

解▸ $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

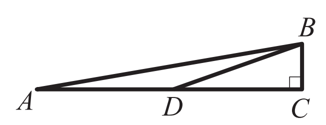
$\Rightarrow(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{2}$或$-2$（$-2$不合）

$\Rightarrow\theta=60°$。

故$\tan\theta=\sqrt{3}$。

5. 如右圖，在$\triangle ABC$中，$\overline{BC}\perp\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{BD}$。已知$\sin(\angle BDC)=\dfrac{1}{3}$，求$\tan A$的值。



解▸ 由$\sin(\angle BDC)=\dfrac{1}{3}$，令$\overline{BC}=1$，$\overline{BD}=3$，則$\overline{CD}=2\sqrt{2}$。

又$\overline{AD}=\overline{BD}=3$，故$\tan A=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$。

6. 求 $\sin^2 25°+\sin^2 35°+\sin^2 55°+\sin^2 65°$ 的值。

解▶ $\sin^2 25°+\sin^2 35°+\sin^2 55°+\sin^2 65°$

$=\sin^2 25°+\sin^2 35°+\cos^2 35°+\cos^2 25°$

$=\left(\sin^2 25°+\cos^2 25°\right)+\left(\sin^2 35°+\cos^2 35°\right)$

$=1+1$

$=2$。

7. 已知 θ 為銳角，且 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta$ 的值。

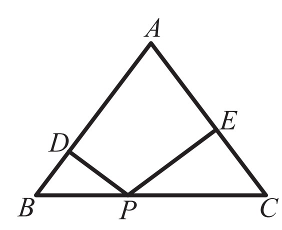
解▶ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$。

8. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$P$ 為 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$。已知 $\overline{BC}=10$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$，求 $\overline{PD}+\overline{PE}$ 的值。



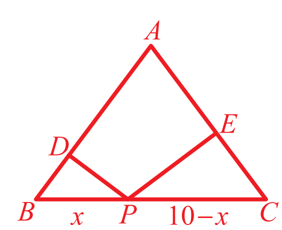
解▶ 設 $\overline{BP}=x$，則 $\overline{CP}=10-x$。

$\triangle BPD$ 中，$\overline{PD}=\overline{BP}\sin B=x\sin B$；

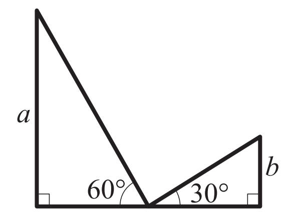
$\triangle CPE$ 中，$\overline{PE}=\overline{CP}\sin C=(10-x)\sin C$，

因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$，所以 $\sin B=\sin C=\dfrac{4}{5}$。

故 $\overline{PD}+\overline{PE}=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{4}{5}(10-x)=\dfrac{4}{5}\times 10=8$。



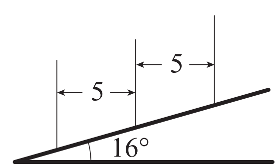
9. 兩旗桿立於地面上，其高分別為 a，b。今由兩旗桿底部連線的中點分別拉繩子至旗桿頂，已知繩子與水平線的夾角分別為 $60°$ 與 $30°$，如右圖所示，求 $a:b$ 之比值。



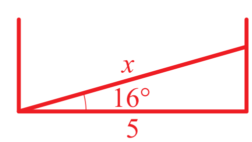
解▸ 設兩旗桿底部連線長為 $2x$。

因為 $a = x\tan 60°$，$b = x\tan 30°$，所以 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\tan 60°}{\tan 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3$。

10. 沿著山坡種樹時，為了使樹木有足夠的生長空間，每棵樹的水平距離需間隔 5 公尺，如右圖所示。已知斜坡坡度為 $16°$，求相鄰兩樹在斜坡上的斜面距離。（參考數值 $\sin 16° = 0.2756$，$\cos 16° = 0.9613$，$\tan 16° = 0.2867$，四捨五入至小數點後第二位）



解▸ 設相鄰兩樹在斜坡上的斜面距離為 x 公尺，



則 $\dfrac{5}{x} = \cos 16° \Rightarrow x = \dfrac{5}{\cos 16°} = \dfrac{5}{0.9613} \approx 5.20$。

故兩樹間的斜面距離為 5.20 公尺。