單元 2 級數

建議配分　每題 10 分。

1. 已知一等差數列前3項和為9，前9項和為81，求其前6項的和。

解▸ 設此等差數列為$\langle a_n \rangle$，且首項為a，公差為d，依題意得

$a_1+a_2+a_3=3a+3d=9$，

$a_1+a_2+\cdots+a_9=9a+(d+2d+\cdots+8d)=9a+36d=81$，

解得$a=1$，$d=2$。

前6項和為$a_1+a_2+\cdots+a_6=6a+(d+2d+\cdots+5d)=6a+15d=36$。

2. 設$\langle a_n \rangle$為12項的等差數列，已知其和為222，且奇數項的和與偶數項的和之比為$17:20$，求此數列的首項。

解▸ 設此數列的首項為a，公差為d。

因為奇數項的和與偶數項的和之比為$17:20$，又總和為222，

所以奇數項的和為$222\times\dfrac{17}{17+20}=102$。

又因為奇數項的和為$a+(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)+(a+8d)+(a+10d)=6a+30d=102$

且總和為$\dfrac{12(2a+11d)}{2}=222$，

所以整理可得$\begin{cases} a+5d=17 \\ 2a+11d=37 \end{cases}$，解得$a=2$，故此數列的首項為2。

3. 設 $\langle a_n \rangle$ 是一個首項為 3，公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $S_8 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8$。試問下列哪一個選項正確？

(1) $3 < S_8 < 4$　(2) $4 < S_8 < 5$　(3) $5 < S_8 < 6$　(4) $6 < S_8 < 7$。

解▸ 因為 $S_8 = a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = \dfrac{3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = 6 - \dfrac{6}{2^8}$，

所以 $5 < S_8 < 6$。

故選(3)。

4. 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n。已知 $S_2 = 5$，$S_4 = 20$，求 S_6 的值。

解▸ 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a，公比為 r，由題意可得

$S_2 = a + ar$，

$S_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = (a+ar) + r^2(a+ar) = S_2 + r^2 S_2 = S_2(1+r^2)$，

因此，$20 = 5 \times (1+r^2)$，解得 $r^2 = 3$。

$$S_6 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 = (a+ar) + r^2(a+ar) + r^4(a+ar)$$
$$= S_2 + r^2 S_2 + r^4 S_2 = S_2(1+r^2+r^4) = 5 \times (1+3+9) = 65$$ 。

5. 求 $(1+2)+(2+4)+(3+8)+\cdots+(k+2^k)+\cdots+(10+2^{10})$ 的值。

解▸ $1+2+3+\cdots+10 = \dfrac{10 \times 11}{2} = 55$，$2+2^2+2^3+\cdots+2^{10} = \dfrac{2\times(2^{10}-1)}{2-1} = 2046$，

$55 + 2046 = 2101$。

6. 已知數列$\langle a_n\rangle$的前n項和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n+n^2$，求$a_{10}$的值。

解▸ $S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2^{10}+10^2=1124$，

$S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9=2^9+9^2=512+81=593$，

$a_{10}=S_{10}-S_9=1124-593=531$。

7. 已知數列$\langle a_n\rangle$的前n項和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2-11n$。選出所有正確的選項。

(1) $a_1<0$　　(2) $a_7<0$　　(3) $\langle a_n\rangle$是等差數列　　(4) $a_{111}-a_{110}=2$。

解▸ 由題意可知：

當$n\geq 2$時，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(n^2-11n\right)-\left(\left(n-1\right)^2-11\left(n-1\right)\right)=2n-12$，

又當$n=1$時，$a_1=S_1=1-11=-10=2\times 1-12$。

因此由上面的討論可知：$a_n=2n-12=-10+\left(n-1\right)\times 2$，

即數列$\langle a_n\rangle$是首項為-10，公差為2的等差數列。

(1) $a_1=-10<0$。

(2) $a_7=14-12=2>0$。

(3) $\langle a_n\rangle$是等差數列。

(4) 數列公差為2，即$a_{111}-a_{110}=2$。

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(3)(4)。

8. (1)已知$100^2-99^2=100+k$，利用乘法公式求k的值。

(2)求$100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$的值。

解▸ (1) 因為$100^2-99^2=\left(100+99\right)\left(100-99\right)=100+99$，所以$k=99$。

(2) 由(1)可得

$98^2-97^2=\left(98+97\right)\left(98-97\right)=98+97$，

$96^2-95^2=\left(96+95\right)\left(96-95\right)=96+95$，…

$2^2-1^2=\left(2+1\right)\left(2-1\right)=2+1$，

原式$=100+99+98+97+\cdots+2+1=\dfrac{100\times 101}{2}=5050$。

9. 求下列各級數的和：

(1) $2^2+4^2+\cdots+30^2$ 。

(2) $6^3+7^3+\cdots+15^3$ 。

解▶ (1) $2^2+4^2+\cdots+30^2=4\times\left(1^2+2^2+\cdots+15^2\right)=4\times\dfrac{15\times16\times31}{6}=4960$ 。

(2) $6^3+7^3+\cdots+15^3=\left(1^3+2^3+\cdots+15^3\right)-\left(1^3+2^3+\cdots+5^3\right)$

$$=\left(\frac{15\times(15+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{5\times(5+1)}{2}\right)^2$$

$$=14400-225=14175$$ 。

10. 將數字有規律的排列如右圖，求右圖中所有數字的和。

1								
2	2							
3	3	3						
4	4	4	4					
5	5	5	5	5				
6	6	6	6	6	6			
7	7	7	7	7	7	7		
8	8	8	8	8	8	8	8	
9	9	9	9	9	9	9	9	9

解▶ 觀察圖形可得所有數字的和

$=1\times1+2\times2+\cdots+9\times9$

$=\dfrac{9\times10\times19}{6}=285$ 。