



單元

8~9

總習題



建議配分

第 1~10 題每題 8 分，第 11 題每小題 10 分。

1. 某公司有六個員工，平均年資為 6 年。已知其中五個員工的年資如下：
2、3、4、4、12，則還有一名員工的年資是多少年？

(1) 6 (2) 7 (3) 9 (4) 10 (5) 11。

〔搭配單元 8〕

解► 設所求為 x ，則 $\frac{2+3+4+4+12+x}{6} = 6 \Rightarrow x = 11$ ，故選(5)。

2. 依下表 A 至 E 這五組數據畫一個散布圖。

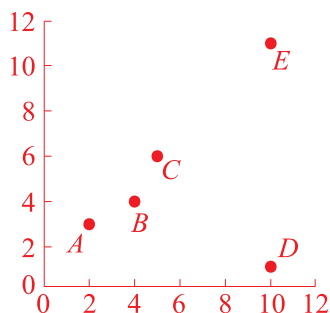
	A	B	C	D	E
x	2	4	5	10	10
y	3	4	6	1	11

對這組數據中的大部分的點來說， x 與 y 之間有很強的直線相關，但經過計算後， x 與 y 的相關係數大概是 0.3 左右。試問該去掉哪一組數據就會大大的提高相關係數。

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E 。

〔搭配單元 9〕

解► 畫出散布圖，可明顯得知 D 點偏差最多（由數據直觀亦可得知），故選(4)。



3. 下表有 x 、 y 、 z 三組數據：

x	40	50	60	60	70
y	30	40	p	50	60
z	32	40	q	48	56

已知 x 、 y 、 z 的關係為 $y = x - 10$ ， $z = 0.8x$ ，且 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 分別為三組數據 x 、 y 、 z 的標準差，則關於 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 的大小，下列何者為真？

(1) $\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z$ (2) $\sigma_x = \sigma_y > \sigma_z$ (3) $\sigma_z > \sigma_x = \sigma_y$

(4) $\sigma_x > \sigma_y = \sigma_z$ (5) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ 。

[搭配單元 8]

解► 若 $x' = ax + b$ ，則標準差為 $\sigma_{x'} = |a|\sigma_x$ ，

所以 $\sigma_y = 1 \times \sigma_x = \sigma_x$ ， $\sigma_z = 0.8\sigma_x$ ，則可知 $\sigma_x = \sigma_y > \sigma_z$ ，故選(2)。

4. 設有數筆資料 (x_i, y_i) ，其算術平均數分別為 μ_x 、 μ_y ，標準差分別為 σ_x 、 σ_y ，相關係數 r 。將此資料標準化為 (x'_i, y'_i) ，而其算術平均數分別為 μ'_x 、 μ'_y ，標準差分別為 σ'_x 、 σ'_y ，相關係數 r' 。則下列何者為真？

(1) $\mu'_x = \mu'_y$ (2) $\sigma'_x = \sigma'_y$ (3) $r' = r$

(4) 資料 (x_i, y_i) 中， y 對 x 的迴歸直線 L 會通過點 (μ_x, μ_y)

(5) 資料 (x'_i, y'_i) 中， y' 對 x' 的迴歸直線 L' 會通過點 $(0, 0)$ 。

[搭配單元 8]

解► 若 $x' = ax + b$ ， $y' = cy + d$ ，則 $\mu'_x = a\mu_x + b$ ， $\mu'_y = c\mu_y + d$ ， $\sigma'_x = |a|\sigma_x$ ，

$$\sigma'_y = |c|\sigma_y，r' = \frac{ac}{|ac|} \times r，$$

$$\text{已知 } x' = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \left(\frac{1}{\sigma_x}\right)x + \left(-\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right)，y' = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} = \left(\frac{1}{\sigma_y}\right)y + \left(-\frac{\mu_y}{\sigma_y}\right)。$$

(1) $\mu'_x = a\mu_x + b = \left(\frac{1}{\sigma_x}\right)\mu_x + \left(-\frac{\mu_x}{\sigma_x}\right) = 0$ ，同理 $\mu'_y = 0$ ，故 $\mu'_x = \mu'_y$ 正確。

(2) $\sigma'_x = |a| \times \sigma_x = \left|\frac{1}{\sigma_x}\right| \times \sigma_x = 1$ ，同理 $\sigma'_y = 1$ ，故 $\sigma'_x = \sigma'_y$ 正確。

(3) 因為 $ac = \left(\frac{1}{\sigma_x}\right)\left(\frac{1}{\sigma_y}\right) > 0$ ，所以 $r' = \frac{ac}{|ac|} \times r = r$ ，故 $r' = r$ 正確。

(4)(5) 由迴歸直線的定義可知正確。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

5. 設某公司疫情期間近四年的營業額，第二年比第一年成長 62%，第三年比第二年衰退 4%，第四年比第三年衰退 19%，則這四年的平均成長率為_____。

〔搭配單元 8〕

解► 設平均每年的成長率為 r ，

則 $(1+r)^3 = (1+0.62)(1-0.04)(1-0.19) \Rightarrow 1+r = 1.08$ ，故 $r = 0.08 = 8\%$ 。

6. 設某校高一學生某次數學段考成績如下表：

分數	20	30	40	50	60	70	80	90	100
人數	15	35	38	65	57	35	22	8	5

對於這 280 人的數學段考成績的數據，若第一四分位數為 Q_1 ，第 75 百分位數為 P_{75} ，則 $P_{75} - Q_1$ 的值為_____。

〔搭配單元 8〕

解► 將 280 個數據由小到大排序為 $x_1, x_2, \dots, x_{280}$ 。

(1) 因為 $280 \times \frac{1}{4} = 70$ 是整數，所以百分位數為 $P_{25} = \frac{x_{70} + x_{71}}{2} = \frac{40 + 40}{2} = 40$ ，

可得 $Q_1 = P_{25} = 40$ 。

(2) 因為 $280 \times \frac{75}{100} = 210$ 是整數，所以百分位數為 $P_{75} = \frac{x_{210} + x_{211}}{2} = \frac{60 + 70}{2} = 65$ 。

故 $P_{75} - Q_1 = 65 - 40 = 25$ 。

7. 小方班上，某次段考國文成績平均 80 分，標準差 10 分，英文成績平均 64 分，標準差 8 分，數學成績平均 76 分，標準差 12 分，已知此次段考小方國文考 74 分，英文考 58 分，數學考 70 分，試問與班上同學比較之下哪一科較好？〔搭配單元 8〕

解► 國文的 z 分數： $\frac{74-80}{10} = -\frac{6}{10} = -0.6$ ，

英文的 z 分數： $\frac{58-64}{8} = -\frac{6}{8} = -0.75$ ，

數學的 z 分數： $\frac{70-76}{12} = -\frac{6}{12} = -0.5$ ，

因為 $-0.5 > -0.6 > -0.75$ ，故數學成績較好。

8. 某班甲、乙、丙、丁、戊等 5 位同學的數學學測成績 y 與高三上學期平均每月缺課天數 x 統計如下表：

	甲	乙	丙	丁	戊
x	6	3	5	5	1
y	1	8	7	9	15

則 5 位同學在高三上學期平均每月缺課天數與數學學測成績的相關係數為_____。

〔搭配單元 9〕

解►

	甲	乙	丙	丁	戊	
x	6	3	5	5	1	$\mu_x = 4$
y	1	8	7	9	15	$\mu_y = 8$
$x - \mu_x$	2	-1	1	1	-3	
$y - \mu_y$	-7	0	-1	1	7	
$(x - \mu_x) \times (y - \mu_y)$	-14	0	-1	1	-21	$S_{xy} = -35$
$(x - \mu_x)^2$	4	1	1	1	9	$S_{xx} = 16$
$(y - \mu_y)^2$	49	0	1	1	49	$S_{yy} = 100$

$$\mu_x = \frac{1}{5}(6+3+5+5+1) = 4, \quad \mu_y = \frac{1}{5}(1+8+7+9+15) = 8,$$

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}} \times \sqrt{S_{yy}}} = \frac{-35}{\sqrt{16} \times \sqrt{100}} = -\frac{35}{40} = -0.875.$$

9. 設有10筆 (x_i, y_i) 的資料，且其標準差 $\sigma_x = 2$ ， $\sigma_y = 4$ ，相關係數 $r = 0.4$ 。若 y 對 x 的迴歸直線之斜率為 m ，求 $m = ?$ [搭配單元 9]

解► 由公式知 $m = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.4 \times \frac{4}{2} = 0.8$ 。

10. 已知兩變量 X ， Y 的數據如下表：

X	2	4	5	6	8
Y	2	0	4	a	6

設以最小平方法，求得 Y 對 X 的迴歸直線為 $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ ，則 a 的值應為何？

[搭配單元 9]

解► $\mu_x = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5$ ， $\mu_y = \frac{2+0+4+a+6}{5} = \frac{a+12}{5}$ ，

又迴歸直線通過 (μ_x, μ_y) ，所以 $\frac{a+12}{5} = \frac{3}{4} \times 5 - \frac{3}{4} \Rightarrow a = 3$ 。

- ◆ 11. 設 9 位學生的數學學測成績 (y) 與其每週研讀數學的時數 (x) 如下表，但其中有兩位同學不知學測成績 y_8 、 y_9 。

數學學測成績 (y)	11	9	9	12	8	13	14	y_8	y_9
每週研讀時數 (x)	12	11	10	13	9	11	16	12	14

若已知此 9 位學生的數學學測成績平均為 11 級分，標準差為 2 級分，而每週研讀數學的平均時數為 12 小時。則

(1) 兩人數學學測成績的和為何？

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25。

(2) 若已知 $y_8 < y_9$ ，則由上面數據可算出 y 對 x 的迴歸直線的方程式，請利用迴歸直線預測：當有一個學生每週研讀數學 12 小時，則其數學學測成績為多少級分？

[搭配單元 8~9]

解 ▶ (1) $\frac{11+9+9+12+8+13+14+y_8+y_9}{9} = 11$ ，可得 $y_8 + y_9 = 23$ ，故選 ③。

(2) 設 $y_8 - 11 = a$ ， $y_9 - 11 = b$ （因為 $y_8 < y_9$ ，所以 $a < b$ ）又 $\mu_y = 11$ ， $\sigma_y = 2$ ， $\mu_x = 12$ 。

y_i	11	9	9	12	8	13	14	y_8	y_9
x_i	12	11	10	13	9	11	16	12	14
$y_i - \mu_y$	0	-2	-2	1	-3	2	3	a	b
$x_i - \mu_x$	0	-1	-2	1	-3	-1	4	0	2
$(y_i - \mu_y)^2$	0	4	4	1	9	4	9	a^2	b^2
$(x_i - \mu_x)^2$	0	1	4	1	9	1	16	0	4
$(x_i - \mu_x) \times (y_i - \mu_y)$	0	2	4	1	9	-2	12	0	$2b$

$$(I) \ a + b = (y_8 - 11) + (y_9 - 11) = y_8 + y_9 - 22 = 23 - 22 = 1 \Rightarrow a + b = 1 \dots\dots ①,$$

$$y \text{ 的標準差為 } 2 = \sqrt{\frac{1}{9}(0+4+4+1+9+4+9+a^2+b^2)} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \dots\dots ②,$$

$$\text{由 } ①② \text{ 聯立可解得 } a = -1, \ b = 2 \Rightarrow y_8 - 11 = -1, \ y_9 - 11 = 2, \text{ 得 } y_8 = 10, \\ y_9 = 13。$$

$$(II) \ S_{xx} = 0+1+4+1+9+1+16+0+4 = 36, \ S_{xy} = 0+2+4+1+9+(-2)+12+0+2 \times 2 = 30,$$

$$y \text{ 對 } x \text{ 的迴歸直線方程式為 } y - \mu_y = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}(x - \mu_x) \text{ 得 } y - 11 = \frac{30}{36}(x - 12),$$

$$\text{將 } x = 12 \text{ 代入，得 } y - 11 = \frac{30}{36}(12 - 12), \text{ 故 } y = 11。$$

〈另解〉

迴歸直線方程式通過點 $(\mu_x, \mu_y) = (12, 11)$ ，而所求之學生每週研讀數學 $x = 12$ （小時）恰等於 μ_x ，故可得其數學學測成績 $y = \mu_y = 11$ （級分）。