單元 6～7 總習題

建議配分 第 1～10 題每題 8 分，第 11 題每小題 10 分。

1. 袋中有編號 1 到 20 的整數號碼球共 20 個，今從袋中取一球觀其號碼，求取到的球號是質數的機率？

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{7}{20}$ (4) $\frac{9}{20}$ (5) $\frac{11}{20}$。 〔搭配單元 6〕

解▸ 設 S 為樣本空間， A 從袋中取一球而取到球號是質數的事件，

則 $n(S)=20$ ， $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ ， $n(A)=8$ ，

所求為 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ ，故選(2)。

2. 某一水果商批發了 10 箱水果，從中任選 2 箱做農藥檢驗，若驗出任一箱水果的農藥過量，則整批水果退貨。已知 10 箱中有 2 箱水果所含的農藥過量，則這批水果被退貨的機率為何？

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{45}$ (4) $\frac{16}{45}$ (5) $\frac{17}{45}$。 〔搭配單元 6〕

解▸ 設事件 A 為至少驗出一箱農藥過量，

則事件 A' 為兩箱皆無驗出農藥過量，

依題意，所求為 $P(A)=1-P(A')=1-\frac{C^8_2}{C^{10}_2}=1-\frac{28}{45}=\frac{17}{45}$ ，故選(5)。

3. 春節期間，甲乙兩人想買高鐵車票出遊。若兩人買得到車票的機率分別為 0.4 、 0.5 ，且兩人同時買不到車票的機率是 0.2 。試求甲買不到但乙買得到車票的機率為

(1) 0.1　(2) 0.2　(3) 0.3　(4) 0.4　(5) 0.5 。　〔搭配單元 6〕

解▸ 由題意可知 $P(甲)=0.4$ ， $P(乙)=0.5$ ， $P(甲'\cap乙')=0.2$ ，

$P(甲\cup乙)=1-P(甲\cup乙)'=1-P(甲'\cap乙')=1-0.2=0.8$ ，

$P(甲\cap乙)=P(甲)+P(乙)-P(甲\cup乙)=0.4+0.5-0.8=0.1$ ，

所求 $P(甲'\cap乙)=P(乙)-P(甲\cap乙)=0.5-0.1=0.4$ ，故選(4)。

4. 一袋中有 2 黃 3 黑 1 紅共 6 顆球。每個球被取到的機率都相同：

(I) P_1 表示從盒子中依次取球 3 次，取後放回，取出的球三次中恰有兩次是黃球的機率。

(II) P_2 表示從盒子中依次取球 3 次，取後不放回，取出的球三次中恰有兩次是黃球的機率。

(III) P_3 表示從盒子中一次取出 3 個球，取出的三球恰有兩個是黃球的機率。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) $P_1=P_2=P_3$　(2) $P_1>P_2$　(3) $P_1>P_3$　(4) $P_2=P_3$　(5) $P_1=P_2$ 。

〔搭配單元 6〕

解▸ 依題意，可把 3 顆黑球 1 顆紅球直接視為 4 顆非黃球，則

$$P_1=\frac{\left(C_1^2\times C_1^2\times C_1^4\right)\times C_2^3}{6^3}=\frac{2}{9} ,$$

$$P_2=\frac{\left(C_1^2\times C_1^1\times C_1^4\right)\times C_2^3}{6\times5\times4}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10} ,$$

$$P_3=\frac{\left(C_2^2\times C_1^4\right)}{C_3^6}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10} ,$$

由上面可知 $P_1>P_2=P_3$ ，故選(2)(3)(4)。

5. 從5個數字1、2、3、4、5中，可以重複的隨機抽取3個數字組成一個三位數，則此三位數的各位數字和為9之機率為____________。〔搭配單元 6〕

解▸ 三位數的各位數字和為9有：

① $3,3,3 \Rightarrow 1$種。

② $2,3,4 \Rightarrow 3! = 6$（種）。

③ $2,2,5 \Rightarrow \dfrac{3!}{2!} = 3$（種）。

④ $1,3,5 \Rightarrow 3! = 6$（種）。

⑤ $1,4,4 \Rightarrow \dfrac{3!}{2!} = 3$（種）。

共19種，故所求機率為 $\dfrac{19}{5^3} = \dfrac{19}{125}$。

6. 設 A、B、C 為同一樣本空間的三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$，$P(B\cap C)=\dfrac{1}{12}$，$P(C\cap A)=0$，則 A、B、C 三事件都不發生的機率為____________。

〔搭配單元 6〕

解▸ 因為 $P(C\cap A)=0$，所以 $P(A\cap B\cap C)=0$，

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}-0+0=\frac{13}{24}，$$

所求為 $P(A'\cap B'\cap C')=P(A\cup B\cup C)'=1-P(A\cup B\cup C)=1-\dfrac{13}{24}=\dfrac{11}{24}$。

7. 有 4 個特製的均勻正四面體的骰子，其面上標有 $1,2,3,4$。若同時投擲這 4 個骰子一次，則至多有一個骰子標有 3 的一面因貼在桌面上而看不見數字之機率為__________。

〔搭配單元 6〕

解▸ 依題意可知即求：

4 個骰子都沒有數字 3 的面朝下或恰有 1 個骰子數字 3 的面朝下，

故所求機率為 $\dfrac{3^4}{4^4}+\dfrac{C_1^4\times 3^3}{4^4}=\dfrac{189}{256}$。

8. 已知袋中有 3 個紅球，n 個白球。今從袋中一次取出 2 個球，已知此二球為 1 紅球 1 白球的機率為 $\dfrac{4}{7}$，則 n 的值為__________。〔搭配單元 6〕

解▸ 依題意知，$P(1\text{紅球}1\text{白球})=\dfrac{4}{7}$，

$\dfrac{C_1^3\times C_1^n}{C_2^{n+3}}=\dfrac{4}{7}\Rightarrow\dfrac{3n}{\dfrac{(n+3)(n+2)}{1\times 2}}=\dfrac{4}{7}\Rightarrow(2n-3)(n-4)=0\Rightarrow n=4$ 或 $\dfrac{3}{2}$（不合），故 $n=4$。

9. 擲 3 個公正的硬幣，若三個正面可得 30 元，二個正面可得 20 元，一個正面可得 10 元，為使賭局公平（即期望值為 0 元），則當出現三個反面時，應付＿＿＿＿＿＿元。

〔搭配單元 7〕

解▸

情形	三正面零反面	二正面一反面	一正面二反面	零正面三反面
m_i	30	20	10	$-m$
p_i	$\frac{C_3^3}{2^3}=\frac{1}{8}$	$\frac{C_2^3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{C_1^3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{C_0^3}{2^3}=\frac{1}{8}$

$30\times\frac{1}{8}+20\times\frac{3}{8}+10\times\frac{3}{8}+(-m)\times\frac{1}{8}=0$，解得 $m=120$。

10. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 20 元；如果兩球顏色相同，則得獎金 10 元。請問此遊戲獎金的期望值為多少元？

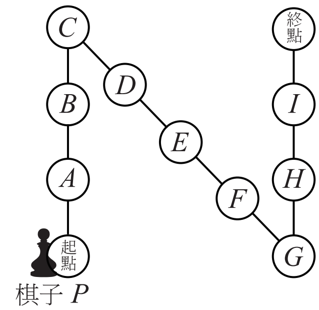
〔搭配單元 7〕

解▸

情形	兩球顏色不同（1紅1白）	兩球顏色相同（2紅或2白）
m_i	20	10
p_i	$\frac{C_1^3\times C_1^3}{C_2^6}=\frac{3}{5}$	$\frac{C_2^3+C_2^3}{C_2^6}=\frac{2}{5}$（或 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$）

$20\times\frac{3}{5}+10\times\frac{2}{5}=16$（元）。

11. 如圖，有一個遊戲，棋子 P 想由起點走到終點，而棋子 P 走的規則如下：



(I) 投擲一個骰子，棋子 P 前進的步數就依骰子擲出的點數。
（例如，骰子擲出 6 點，則棋子 P 前進 6 步到 F 點。）

(II) 若棋子 P 前進的步數超過終點，則由終點退回剩餘的步數，而下次再依骰子擲出的點數前進。
（例如，接續(I)，骰子再擲出 6 點，則棋子 P 會到 H 點。）

(III)如此反覆前進後退，直到恰好擲出落到終點的點數即可停止。
（例如，接續(II)，骰子再擲出 2 點，則棋子 P 前進抵達終點。）

(1)試問只擲出二次即可達終點的機率為何？

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{9}$　④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{1}{18}$ 。

(2)擲出三次才可達到終點的機率為____________。　〔搭配單元 6〕

解▸ (1) 設第一、二次骰子出現的點數分別為 x 、 y ，$(1 \le x, y \le 6)$

由題意知 $x+y=10$ ，$(x,y)=(5,5)$，$(4,6)$，$(6,4)$，共 3 種，

故機率為 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$ ，故選④。

(2) 設第一、二、三次骰子出現的點數分別為 x 、 y 、 z $(1 \le x, y, z \le 6)$，

(i) 前兩次點和不超過 9，即 $x+y \le 9$ 且 $x+y+z=10$ 。

① 當 $z=1$ 時， $x+y=9$ ，則 $(x,y)=(6,3)$，$(5,4)$，$(4,5)$，$(3,6)$，有 4 種。

② 當 $z=2$ 時， $x+y=8$ ，則 $(x,y)=(6,2)$，$(5,3)$，$(4,4)$，$(3,5)$，$(2,6)$，有 5 種。

③ 當 $z=3$ 時， $x+y=7$ ，則 $(x,y)=(6,1)$，$(5,2)$，$(4,3)$，$(3,4)$，$(2,5)$，$(1,6)$，有 6 種。

④ 當 $z=4$ 時， $x+y=6$ ，則 $(x,y)=(5,1)$，$(4,2)$，$(3,3)$，$(2,4)$，$(1,5)$，有 5 種。

⑤ 當 $z=5$ 時， $x+y=5$ ，則 $(x,y)=(4,1)$，$(3,2)$，$(2,3)$，$(1,4)$，有 4 種。

⑥ 當 $z=6$ 時， $x+y=4$ ，則 $(x,y)=(3,1)$，$(2,2)$，$(1,3)$，有 3 種。

(ii) 前兩次點和超過 10，即 $x+y \ge 11$ ，

① 當 $z=1$ 時， $x+y=11$ ，則 $(x,y)=(5,6)$，$(6,5)$，有 2 種。

② 當 $z=2$ 時， $x+y=12$ ，則 $(x,y)=(6,6)$，有 1 種。

由(i)(ii)可得共 $4+5+6+5+4+3+2+1=30$ 種，故機率為 $\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$ 。