單元 5 組合

建議配分 1～6 題每題 12 分，7～8 題每題 14 分。

1. 已知 $C^{20}_{r+5}=C^{20}_{3r-1}$，求正整數 r 的值。

解▸ 因為 $C^{20}_{r+5}=C^{20}_{3r-1}$，所以 $r+5=3r-1$ 或 $(r+5)+(3r-1)=20$

解得 $r=3$ 或 4。

2. 某次考試共有10個題目，規定從這10題中選做8題。

(1)共有多少種選法？

(2)若前3題一定要全做，則共有多少種選法？

解▸ (1) 選法有 $C^{10}_{8}=45$（種）。

(2) 因為前3題一定要全做，所以相當於從另7題選做5題。

故選法共有 $C^{7}_{5}=21$（種）。

3. 從一列有10節車廂的電車中，選出3節車廂為自由座。
(1)共有多少種選法？
(2)若第一節車廂或最後一節車廂至少有一節車廂為自由座，則共有多少種選法？

解▸ (1) 選法共有 $C_3^{10}=120$（種）。

(2) 分二類：

① 頭尾2節恰1節自由座：選法有 $C_1^2\times C_2^8=2\times28=56$（種）。

② 頭尾2節都是自由座：選法有 $C_2^2\times C_1^8=1\times8=8$（種）。

根據加法原理，得選法共有 $56+8=64$（種）。

4. 從6本不同的課本和5本不同的講義中，任選4本。
問：既有課本又有講義的選法共有多少種？

解▸ 分三類：

(1) 1本課本3本講義：選法有 $C_1^6\times C_3^5=6\times10=60$（種）。

(2) 2本課本2本講義：選法有 $C_2^6\times C_2^5=15\times10=150$（種）。

(3) 3本課本1本講義：選法有 $C_3^6\times C_1^5=20\times5=100$（種）。

根據加法原理，得共有 $60+150+100=310$（種）選法。

〈另解〉(任意選取)−(4本課本)−(4本講義)

$=C_4^{11}-C_4^6-C_4^5=330-15-5=310$（種）。

5. 將 6 本不同的書依下列情形分配，方法各有多少種？
(1)分給甲、乙、丙 3 人，每人各得 2 本。
(2)分裝入 3 個相同的袋子，每袋裝 2 本。

解▸ (1) 從 6 本中取出 2 本給甲，取法有 C_2^6 種；再從其餘的 4 本取出 2 本給乙，取法有 C_2^4 種；剩下的 2 本給丙，取法有 C_2^2 種。
故分法共有 $C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 = 15 \times 6 \times 1 = 90$（種）。
(2) 先假設袋子是不同的，並依序作甲，乙，丙的記號，則有 $C_2^6 C_2^4 C_2^2$ 種分法，但事實上袋子是相同的，因此每 3! 種只能算 1 種。
故分法共有 $C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{3!} = 90 \times \frac{1}{6} = 15$ 種分法。

6. 從「series」一字的 6 個字母中，任意選取 4 個排成一列，共有多少種排法？

解▸ 「series」一字共有二個 s，二個 e，一個 r，一個 i。
分三類：
(1) 二同二同：就是 s，s，e，e 排一列，排法共有 $\frac{4!}{2!2!} = 6$（種）。
(2) 二同二異：從 s，e 中選 1 種字母，並出 2 個，再從剩下 3 種字母中選 2 種，並各出 1 個，排一列，排法共有 $C_1^2 \times C_2^3 \times \frac{4!}{2!} = 72$（種）。
(3) 四異：從 s，e，r，i 中選 4 種，並各出 1 個，再排一列，排法共有 $C_4^4 \times 4! = 24$（種）。
由加法原理，得排法共有 $6 + 72 + 24 = 102$（種）。

7. 已知$\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^5$展開式中$x^4$的係數為80，求實數$a$的值。

解▸ 由二項式定理，知展開式中的每一項皆形如$C_r^5\left(ax^2\right)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_r^5a^{5-r}x^{10-3r}$，

當$10-3r=4$，即$r=2$時，x^4項為$C_2^5a^3x^4=10a^3x^4$。

因此，$10a^3=80$。解得$a=2$。

8. 求滿足不等式$2000<C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n<3000$的正整數$n$。

解▸ 因為$C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n=2^n$，所以$C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n=2^n-C_0^n=2^n-1$。

因此，原式可改寫為$2000<2^n-1<3000\Rightarrow 2001<2^n<3001$。

又因為$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，$2^{12}=4096$，所以$n=11$。