單元 1 數列與遞迴關係

建議配分　每題 10 分。

1. 寫出下列數列第 5 項的值：

(1) $\langle 2\rangle$　　(2) $\langle -3n+10\rangle$　　(3) $\langle (-2)^{n-1}\rangle$　　(4) $\left\langle \dfrac{5n+3}{2n-1}\right\rangle$ 。

解▸ 各數列第 5 項的值如下：

(1) 2 。

(2) $(-3)\times 5+10=-5$ 。

(3) $(-2)^{5-1}=(-2)^4=16$ 。

(4) $\dfrac{5\times 5+3}{2\times 5-1}=\dfrac{28}{9}$ 。

2. 已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_2=54$ ， $a_5=15$ ，求 a_7 及一般項 a_n 。

解▸ 設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 a_1 ，公差為 d ，則 $a_2=a_1+d$ ， $a_5=a_1+4d$ 。

由題意可得： $a_1+d=54$ ， $a_1+4d=15$ ，

將兩式相減可得 $3d=-39$ ，解得 $d=-13$ ，

代回 $a_1+d=54$ ，解得 $a_1=67$ 。

因此， $a_7=a_1+6d=67+6\times(-13)=-11$ ，

一般項 $a_n=a_1+(n-1)d=67+(n-1)\times(-13)=-13n+80$ 。

3. 已知等比數列$\langle a_n \rangle$中$a_3=4$，$a_6=108$，求a_5及一般項a_n。

解▸ 設等比數列$\langle a_n \rangle$的首項為a_1，公比為r，則$a_3=a_1r^2$，$a_6=a_1r^5$。

由題意可得：$a_1r^2=4$，$a_1r^5=108$，

將兩式相除可得$\dfrac{a_1r^5}{a_1r^2}=\dfrac{108}{4}$，即$r^3=27$，解得$r=3$，

代回$a_1r^2=4$，可得$a_1=\dfrac{4}{9}$。

因此，$a_5=a_1r^4=\dfrac{4}{9}\times 3^4=36$，一般項$a_n=a_1r^{n-1}=\dfrac{4}{9}\times 3^{n-1}=4\times 3^{n-3}$。

4. 已知等比數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1+a_2=16$，$a_2+a_3=48$，求a_3+a_4的值。

解▸ $r=\dfrac{a_2+a_3}{a_1+a_2}=\dfrac{48}{16}=3$，

$a_3+a_4=(a_2+a_3)\times r=48\times 3=144$。

5. 已知 20，a，b 為等差數列，a，b，36 為等比數列，且 a，b 皆為正數，求 a，b 的值。

解▸ 由於 20，a，b 為等差數列，設公差為 d，令 $a=20+d$，$b=20+2d$。

由於 a，b，36 為等比數列，所以 $b^2=36a \Rightarrow (20+2d)^2=36(20+d)$

$\Rightarrow (d+10)^2=9(d+20) \Rightarrow d^2+20d+100=9d+180 \Rightarrow d^2+11d-80=0$

$\Rightarrow (d+16)(d-5)=0 \Rightarrow d=-16$ 或 5，

當 $d=-16$ 時，$(a,b)=(20+d,20+2d)=(4,-12)$ 不合，

當 $d=5$ 時，$(a,b)=(20+d,20+2d)=(25,30)$，故 $a=25$，$b=30$。

6. 設 $\langle a_n \rangle$，$\langle b_n \rangle$ 都是等差數列，問下列哪些選項是正確的？

(1) $\langle a_n+1 \rangle$ 是等差數列　　(2) $\langle 2a_n \rangle$ 是等差數列　　(3) $\langle a_n+b_n \rangle$ 是等差數列

(4) $\langle a_n \times b_n \rangle$ 是等差數列　　(5) $\langle 2^{b_n} \rangle$ 是等比數列。

解▸ 設 $\langle a_n \rangle$ 的公差為 d，$\langle b_n \rangle$ 的公差為 e。

(1) $\langle a_n+1 \rangle$ 是首項為 a_1+1，公差為 d 的等差數列。

(2) $\langle 2a_n \rangle$ 是首項為 $2a_1$，公差為 $2d$ 的等差數列。

(3) $\langle a_n+b_n \rangle$ 是首項為 a_1+b_1，公差為 $d+e$ 的等差數列。

(4) $\langle a_n \times b_n \rangle$ 不一定是等差數列。

例如：$\langle a_n \rangle=\langle 1,2,3 \rangle$，$\langle b_n \rangle=\langle 1,3,5 \rangle$，而 $\langle a_n \times b_n \rangle=\langle 1,6,15 \rangle$ 不是等差數列。

(5) $\langle 2^{b_n} \rangle$ 是首項為 2^{b_1}，公比為 2^e 的等比數列。

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(3)(5)。

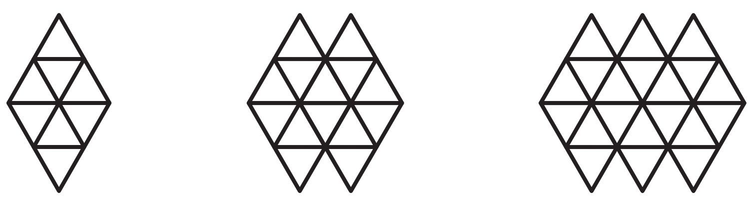
7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \dfrac{1}{1-a_{n-1}} \ (n \geq 2) \end{cases}$，求 $a_4 + a_5 + a_6$ 的值。

解▶ $a_2 = \dfrac{1}{1-a_1} = \dfrac{1}{1-2} = -1$，$a_3 = \dfrac{1}{1-a_2} = \dfrac{1}{1-(-1)} = 0.5$，

$a_4 = \dfrac{1}{1-a_3} = \dfrac{1}{1-0.5} = 2 = a_1$，$a_5 = \dfrac{1}{1-a_4} = \dfrac{1}{1-2} = -1 = a_2$，依此類推。

所以 $a_4 + a_5 + a_6 = 2 + (-1) + 0.5 = 1.5$。

8. 用正三角形地磚依照如下的規律拼成若干圖形。



第1圖　　第2圖　　第3圖

依此規律可畫第 4 圖、第 5 圖、…，並設 a_n 是第 n 圖中正三角形地磚的總數。

(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式。　　(2)求 a_{100} 的值。

解▶ 因為觀察第1圖、第 2 圖與第 3 圖時，我們發現圖形每次均向右增加圖形 ，也就是 6 個正三角形地磚，所以，這些圖形的地磚總數可看成一個首項為 8，公差為 6 的等差數列。因此，

(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 6 \ (n \geq 2) \end{cases}$。

(2) $a_{100} = 8 + (100-1) \times 6 = 602$。

9. 設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_n = a_{n-1} - \dfrac{1}{n(n+1)} \ (n \geq 2) \end{cases}$。

(1)寫出a_2，a_3的值。

(2)猜測一般項a_n的公式。

(3)使用數學歸納法驗證你的猜測。

解▸ (1) 由遞迴關係式可得$a_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3} = \dfrac{4}{3}$，$a_3 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3 \times 4} = \dfrac{5}{4}$。

(2) 由(1)猜測$a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$。

(3) ① 當$n=1$時，$a_1 = \dfrac{3}{2} = \dfrac{1+2}{1+1}$，猜測是正確的。

② 設$n=k$時猜測正確，即$a_k = \dfrac{k+2}{k+1}$，

則當$n=k+1$時，

$$a_{k+1} = a_k - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+2}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+4k+3}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)(k+3)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{k+2} = \frac{(k+1)+2}{(k+1)+1},$$

即當$n=k+1$時，猜測也是正確的。

故由數學歸納法可知：

對於所有的正整數n，$a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$恆成立。

10. 使用數學歸納法證明：對所有的正整數n，$7^n + 5$恆為6的倍數。

解▸ 設$a_n = 7^n + 5$。

① 當$n=1$時，$a_1 = 7^1 + 5 = 12$，是6的倍數。

② 設$n=k$時命題成立，即$a_k = 7^k + 5 = 6 \times m$，$m$是一個正整數，

則當$n=k+1$時，

$a_{k+1} = 7^{k+1} + 5 = 7 \times 7^k + 5 = 7(7^k + 5) - 30 = 7 \times 6m - 30 = 6 \times (7m - 5)$，

即a_{k+1}也是6的倍數。

故由數學歸納法可知：對於所有正整數n，$7^n + 5$恆為6的倍數。