單元 11 廣義角三角比與極坐標

建議配分 1～10 題每題 8 分，11～12 題每題 10 分。

1. 選出所有 $-93°$ 的同界角。

(1) $93°$　(2) $267°$　(3) $357°$　(4) $-453°$　(5) $467°$。

解▸ 因為 $267°=(-93°)+360°$，$-453°=(-93°)+360°\times(-1)$，

故選(2)(4)。

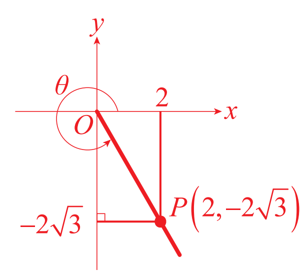
2. 已知 $\left(2,-2\sqrt{3}\right)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，求 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的值。

解▸ 如圖，設 $\left(2,-2\sqrt{3}\right)$ 為 P 點 $\Rightarrow r=\overline{OP}=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4$，

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

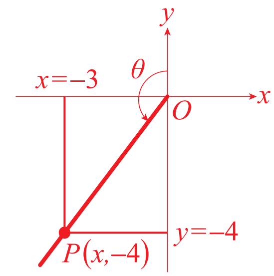
$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$。



3. 已知 $(x,-4)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，且 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，求 $\sin\theta$， $\cos\theta$ 的值。

解▸ 設 $(x,-4)$ 為 P 點，由 $\tan\theta=\dfrac{-4}{x}=\dfrac{4}{3}$，



可得 $x=-3$， $r=\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$。

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$，

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$。

4. 根據下列條件，判斷各 θ 是第幾象限角？

(1) $\sin\theta>0$， $\tan\theta<0$。　　(2) $\sin\theta\cos\theta>0$。

解▸ (1) 由 $\sin\theta>0$，知 θ 屬於第一象限或第二象限，或 θ 角的終邊落在 y 軸正向上，又由 $\tan\theta<0$，知 θ 為第二象限角。

(2) $\sin\theta\cos\theta>0$ 表示 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 同正負符號，
即 $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta>0$ 或 $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta<0$。
若 $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta>0$， θ 角屬於第一象限，
若 $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta<0$， θ 角屬於第三象限，
所以 θ 為第一象限角或第三象限角。

5. 已知 θ 為第四象限角且 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$，求 $\cos\theta$ 與 $\tan\theta$ 的值。

解▶ 利用平方關係式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，且 θ 為第四象限角，

得 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

再利用商數關係式，得 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$。

6. 已知 $-90°<\theta<0°$ 且 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，求 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ 的值。

解▶ $-90°<\theta<0°$，$\cos\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$，

得 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\left(3+2\sqrt{2}\right)+\left(3-2\sqrt{2}\right)=6$。

〈另解〉

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{2(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{2}{\cos\theta}=6$。

7. 求 $\sin^2 21^\circ+\sin^2 111^\circ+\cos^2 49^\circ+\cos^2 319^\circ$ 的值。

解▸ 原式 $=\sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ+\sin^2 41^\circ+\cos^2 41^\circ$

$=\sin^2 21^\circ+\cos^2 21^\circ+\sin^2 41^\circ+\cos^2 41^\circ=1+1=2$。

8. 求下列各式的值：

(1) $3\tan 390^\circ+\tan 225^\circ+2\tan 120^\circ+2\sin(-300^\circ)$。

(2) $\dfrac{\cos 300^\circ}{1+\sin 120^\circ}+\dfrac{1}{\tan 210^\circ}$。

解▸ (1) $3\tan 390^\circ+\tan 225^\circ+2\tan 120^\circ+2\sin(-300^\circ)$

$=3\tan(360^\circ+30^\circ)+\tan(180^\circ+45^\circ)+2\tan(180^\circ-60^\circ)+2\sin(-360^\circ+60^\circ)$

$=3\tan 30^\circ+\tan 45^\circ-2\tan 60^\circ+2\sin 60^\circ$

$=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1-2\times\sqrt{3}+2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=1$。

(2) $\dfrac{\cos 300^\circ}{1+\sin 120^\circ}+\dfrac{1}{\tan 210^\circ}$

$=\dfrac{\cos(360^\circ-60^\circ)}{1+\sin(180^\circ-60^\circ)}+\dfrac{1}{\tan(180^\circ+30^\circ)}$

$=\dfrac{\cos 60^\circ}{1+\sin 60^\circ}+\dfrac{1}{\tan 30^\circ}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$

$=(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=2$。

9. 已知 $90° < \theta < 180°$ 且 $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$，求下列各式的值：

(1) $\tan\theta$。　(2) $\cos(180° + \theta)$。　(3) $\tan(180° - \theta)$。　(4) $\sin(270° + \theta)$。

解▸ (1) 由 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 可得 $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$，

因為 $90° < \theta < 180°$，即 θ 為第二象限角，$\cos\theta < 0$，

所以 $\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = -\dfrac{5}{13}$，

由商數關係 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，得 $\tan\theta = \dfrac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\dfrac{12}{5}$。

(2) $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta = -\left(-\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{5}{13}$。

(3) $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta = -\left(-\dfrac{12}{5}\right) = \dfrac{12}{5}$。

(4) $\sin(270° + \theta) = -\cos\theta = -\left(-\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{5}{13}$。

10. 已知 $270° \le \theta \le 360°$ 且 $\sin 2019° = \sin\theta$，求 θ 的值。

解▸ $\sin 2019° = \sin(360° \times 5 + 219°) = \sin 219° = -\sin 39°$，

又因為 $\sin 321° = -\sin 39°$，所以 $\theta = 321°$。

11. 設 A，B，C 為 $\triangle ABC$ 的三個內角。選出所有正確的選項。

(1) $\sin(A+B+C)=0$　　(2) $\sin(A+B)=\sin C$

(3) $\cos(A+B)=-\cos C$　　(4) $\tan(A+B)=\tan C$。

解▸ 由 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，

(1) $\sin(A+B+C)=\sin 180^\circ=0$。

(2) $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$。

(3) $\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$。

(4) $\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C$。

故選(1)(2)(3)。

12. (1)將直角坐標 $P\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ 轉換成極坐標。

(2)將極坐標 $Q[2,150^\circ]$ 轉換成直角坐標。

解▸ (1) 直角坐標 $P\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ 在第三象限，

因為 $r=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$，且 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，所以 $\theta=240^\circ$，

極坐標為 $P[2,240^\circ]$。

(2) 極坐標 $Q[2,150^\circ]$，其直角坐標為 $Q(2\cos 150^\circ, 2\sin 150^\circ)=Q\left(-\sqrt{3},1\right)$。