



單元

7

數學期望值



建議配分

每題 10 分。

1. 箱中裝有 100 元、200 元、300 元、400 元的紅包袋各一個。今從箱中任抽取 1 個紅包袋，已知每個紅包袋被抽中的機會都相等，求所取得紅包金額的期望值。

解► 因為每一個紅包袋被取到的機率均為 $\frac{1}{4}$ ，所以所得到金額的期望值為

$$100 \times \frac{1}{4} + 200 \times \frac{1}{4} + 300 \times \frac{1}{4} + 400 \times \frac{1}{4} = 250 \text{ (元)}。$$

2. 袋中有 3 顆大小相同的球，其中 2 顆球上標示 10 元，1 顆球上標示 50 元。玩家每次從袋中任取 2 顆球，且可獲得的獎金是這兩球所標示金額的總和，求玩家每次所得獎金的期望值。

解► 取出的兩顆球所標金額的總和有 20 元、60 元兩種，其所對應的機率分別為 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{3}$ 。

$$\text{故所得獎金的期望值為 } \frac{1}{3} \times 20 + \frac{2}{3} \times 60 = \frac{140}{3} \text{ (元)}。$$

3. 某人擲一粒公正骰子一次。若擲出奇數點，則可得15元；若擲出6點，則損失9元；若擲出2或4點，則損失6元。求此人擲骰子一次所得金額的期望值。

解▶ 擲骰子一次，所得金額與其對應的機率如下：

金額	15	-9	-6
機率	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

所得金額的期望值為 $E = 15 \times \frac{3}{6} + (-9) \times \frac{1}{6} + (-6) \times \frac{2}{6} = 4$ (元)。

4. 同時丟3枚均勻的硬幣一次。若出現 k 個正面，則可以獲得 2^k 元 ($k=1, 2, 3$)，為使賭局公平，出現3個反面時應賠多少元？

解▶ 設出現3個反面時應賠 x 元。丟3枚硬幣，所得的金額與其對應的機率如下：

金額	2	4	8	$-x$
機率	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

因為使賭局公平，即期望值為0，所以 $2 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 8 \times \frac{1}{8} + (-x) \times \frac{1}{8} = 0$ ，

解得 $x = 26$ ，故出現3個反面時應賠26元。

5. (1) 單一選擇題每題有 A 、 B 、 C 、 D 四個選項，恰有一個選項是正確的。若每題答對者可得 5 分，則答錯應倒扣幾分才公平？
- (2) 上述計分方式中，若某人已確知選項 A 不正確，於是隨意猜答 B 、 C 、 D 三選項的其中之一，則該題得分的期望值為何？

解► (1) 設答錯應倒扣 x 分，則 $5 \times \frac{1}{4} + (-x) \times \frac{3}{4} = 0$ ，解得 $x = \frac{5}{3}$ 。

故每題答錯應倒扣 $\frac{5}{3}$ 分。

(2) 確知選項 A 不正確，隨意猜答 B 、 C 、 D 其中之一時，猜對的機率為 $\frac{1}{3}$ ，猜錯的機率為 $\frac{2}{3}$ 。

故該題得分的期望值為 $5 \times \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ (分)。

6. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？

(1) 20 元 (2) 30 元 (3) 40 元 (4) 50 元 (5) 60 元。 【學測】

解► 依題意，對應的所得獎金與機率如下：

獎金	100	0
機率	$\frac{C_1^3 \times C_1^3}{C_2^6} = \frac{3}{5}$	$\frac{C_2^3 + C_2^3}{C_2^6} = \frac{2}{5}$

故所求的期望值為

$$100 \times \frac{3}{5} + 0 \times \frac{2}{5} = 60 \text{ (元)}。$$

7. 根據統計資料得知：一位 25 歲的人在一年內存活的機率為 0.999。保險公司針對 25 歲的人推出以下一年期的人壽保險：「投保人若在投保後一年內死亡，則可獲理賠金 100 萬元；否則不予理賠。」

已知此一年期保險的保費為 1200 元，求保險公司對於每份保單的利潤期望值。

- 解► 25 歲的人一年內若平安度過，保險公司賺 1200 元，否則要賠 $(1000000 - 1200)$ 元，利潤期望值為

$$\begin{aligned} & 1200 \times 0.999 + (-1000000 + 1200) \times 0.001 \\ & = 1200 \times (0.999 + 0.001) - 1000000 \times 0.001 \\ & = 1200 - 1000 = 200 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

8. 公司年終尾牙舉辦摸彩活動，參加員工每人得摸彩券一張，摸彩券編號為 000 ~ 999。主持人抽出一組幸運號碼，與該號碼三位數字完全相同者可獲 10 萬元；末二位數字相同者可獲 2 萬元；末位數字相同者可獲 5000 元，每張摸彩券不可重複領獎。求每張摸彩券獎金的期望值。

- 解► 可獲 10 萬元的機率為 $\frac{1}{1000}$ ，

可獲 2 萬元的機率為 $\frac{10-1}{1000} = \frac{9}{1000}$ ，

可獲 5000 元的機率為 $\frac{100-1-9}{1000} = \frac{90}{1000}$ ，

獎金的期望值為 $100000 \times \frac{1}{1000} + 20000 \times \frac{9}{1000} + 5000 \times \frac{90}{1000} = 730 \text{ (元)}$ 。

9. 投擲一粒不公正的骰子。設擲出 k 點，即可得到與點數相同金額。已知擲骰子一次所得的金額 k 與其對應的機率如下：

金額	1	2	3	4	5	6
機率	x	y	y	x	y	y

又知所得金額的期望值為 3 元，求 x ， y 的值。

解► 依題意，列得

$$\begin{cases} x+y+y+x+y+y=1 \\ x+2y+3y+4x+5y+6y=3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x+4y=1 \\ 5x+16y=3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{12}.$$

10. 抽獎遊戲中，參加者自箱中抽出一球，確定顏色後放回。只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，其金額分別為（抽得藍色球者）2000 元、（抽得紅色球者）1000 元。箱中已置有 2 顆藍色球及 5 顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得消費券金額的期望值為 300 元，則主辦單位應於箱內再置入幾顆其他顏色的球？

【98 學測】

解► 設再放入 n 顆其他顏色的球。

$$P(\text{藍球}) = \frac{2}{n+7}, P(\text{紅球}) = \frac{5}{n+7},$$

$$300 = \frac{2}{n+7} \times 2000 + \frac{5}{n+7} \times 1000 \Rightarrow 3n+21 = 40+50 \Rightarrow n=23.$$

故應該再放入 23 顆其他顏色的球。