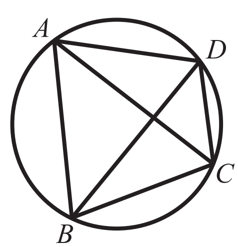
單元 12 三角比的性質

建議配分 1～10 題每題 8 分，11～12 題每題 10 分。

1. 在$\triangle ABC$中，已知$\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=6$，且$\angle C=30^\circ$，求$\triangle ABC$的面積。

解▸ 利用面積公式得$\triangle ABC$面積$=\dfrac{1}{2}\times 10\times 6\times \sin 30^\circ=15$。

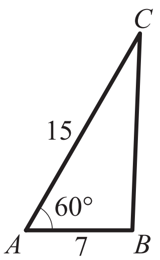
2. 如圖所示，$ABCD$為圓內接四邊形。已知$\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=6$，求$\overline{AD}$的值。



解▸ $\triangle BCD$中$\dfrac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}=2R\Rightarrow 2R=\dfrac{6}{\frac{1}{2}}=12$，

$\triangle ABD$中$\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=2R$，$\therefore \overline{AD}=2R\times\sin 45^\circ=12\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$。

3. 在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=7$ ，$\overline{AC}=15$ ，$\angle A=60^\circ$ ，求 $\overline{BC}$ 的長度。



解▸ 利用餘弦定理 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\cos A$ ，

得 $\overline{BC}^2=7^2+15^2-2\times7\times15\times\cos60^\circ$

$=49+225-105=169$ ，

即 $\overline{BC}=13$ 。

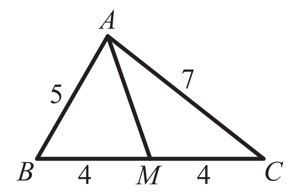
4. 在△ABC 中，已知 $a=\sqrt{19}$ ，$b=3$ ，$c=5$ ，求 $\angle A$ 的角度。

解▸ 利用餘弦定理，

得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+5^2-\left(\sqrt{19}\right)^2}{2\times3\times5}=\dfrac{1}{2}$ ，

故 $\angle A=60^\circ$ 。

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線。且已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=8$，求中線 $\overline{AM}$ 的長度。



解▸ 依題意畫圖如右。

在 $\triangle ABM$ 中，由餘弦定理 $\cos B=\dfrac{5^2+4^2-\overline{AM}^2}{2\times5\times4}$……①

在 $\triangle ABC$ 中，由餘弦定理 $\cos B=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$……②

由上述①及②可得 $\dfrac{41-\overline{AM}^2}{40}=\dfrac{1}{2}$，即 $\overline{AM}^2=21$，

故 $\overline{AM}=\sqrt{21}$。

6. 求三邊長分別為 5，6，7 的三角形之面積。

解▸ 令 $s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$，利用海龍公式，

得三角形面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$。

7. 下列有關測量的敘述，哪些正確？

(1)若自點 P 測得點 Q 的仰角為 $32°$，則自點 Q 測得點 P 的俯角為 $58°$

(2)若自地面上 P 點測得兩目標物 Q 和 R 的仰角各為 $50°$ 和 $40°$，則 Q 點所在位置比 R 點所在位置高

(3)若自地面上 P 點和 Q 點測同一建築物的仰角相同，則 P，Q 和此建築物的距離一樣遠

(4)若點 P 在點 Q 的東 $23°$ 南，則點 Q 在點 P 的南 $67°$ 東

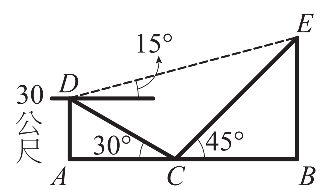
(5)若點 P 在點 Q 的東 $23°$ 南，則點 Q 在點 P 的西 $23°$ 北。

解▸ (1) 錯：自點 P 測得點 Q 的仰角與自點 Q 測得點 P 的俯角相等。

(2) 錯：距離一樣時才可比較。

故選(3)(5)。

8. A、B 兩大樓矗立在同一街道上，今從此兩棟大樓間街道上的 C 點，測得 A、B 兩大樓的仰角分別為 $30°$ 及 $45°$，且在 A 大樓樓頂測得 B 大樓樓頂的仰角為 $15°$，如右圖所示。已知 A 大樓高 30 公尺，求 B 大樓的高度。



解▸ 在直角 $\triangle ADC$ 中，$\overline{AD}=30$ 公尺且 $\angle ACD=30°$，

故 $\overline{CD}=60$ 公尺。

又因為 $\angle CDE=15°+30°=45°$ 且 $\angle DCE=105°$，

所以 $\angle DEC=180°-105°-45°=30°$。

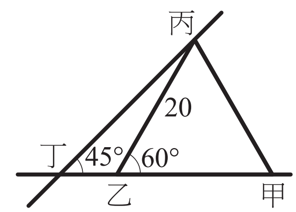
利用正弦定理 $\dfrac{\overline{CE}}{\sin\angle CDE}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle DEC}$，得 $\dfrac{\overline{CE}}{\sin 45°}=\dfrac{60}{\sin 30°}$，

由上式得 $\overline{CE}=\dfrac{60}{\sin 30°}\times\sin 45°=\dfrac{60}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=60\sqrt{2}$。

又由 $\overline{BE}=\overline{CE}\times\sin 45°=60\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=60$。

故 B 大樓的高度 $\overline{BE}$ 為 60 公尺。

9. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮，如右圖所示。已知交於丁鎮的兩公路之銳夾角為 45°，求丙、丁兩鎮間的距離。



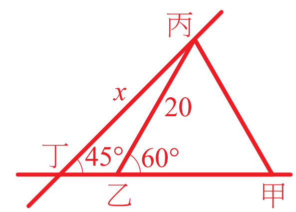
解▶ 設丙、丁間的距離為 x 公里，

於△乙丙丁中，

由正弦定理：$\dfrac{x}{\sin 120^\circ}=\dfrac{20}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow x=20\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=10\sqrt{6}$ 。

故丙、丁兩鎮間的距離為 $10\sqrt{6}$ 公里。



10. 某君在一廣場上從某一點出發，先往東北方前進 50 公尺後轉往正西方向行進，一段時間後測得原出發點在他的南偏東 60° 方向，求此時他與原出發點的距離。

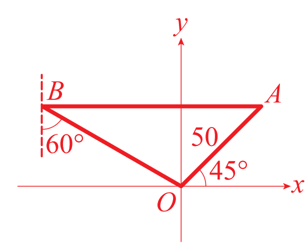
解▶ 作圖如右：

由題意知 $\triangle OAB$ 中，

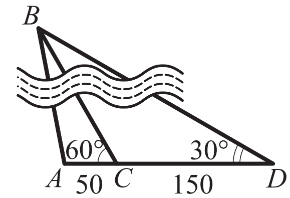
$\angle ABO=30^\circ$ ， $\angle BAO=45^\circ$ ，

由正弦定理 $\dfrac{\overline{OB}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{OA}}{\sin 30^\circ}$ ，得 $\dfrac{\overline{OB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{50}{\frac{1}{2}}$ ，

故 $\overline{OB}=50\sqrt{2}$ （公尺）。



11. 如圖，A 與 B 兩點分別位於河口的兩岸邊，某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 200 公尺處 D 點，分別測得 $\angle ACB = 60°$，$\angle ADB = 30°$，求 A 與 B 的距離。



解▸ 如圖所示：

在 $\triangle BCD$ 中，

因為 $\angle DBC = \angle ACB - \angle BDC = 60° - 30° = 30°$，

所以 $\overline{BC} = \overline{CD} = 150$。

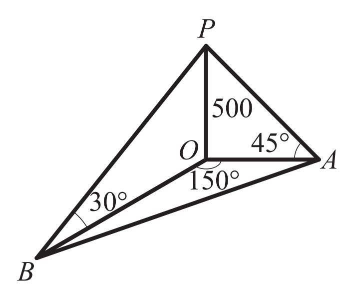
在 $\triangle ACB$ 中，

利用餘弦定理 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \times \overline{CA} \times \overline{CB} \times \cos \angle ACB$，得

$\overline{AB}^2 = (50)^2 + (150)^2 - 2 \times 50 \times 150 \times \frac{1}{2} = 17500$，$\overline{AB} = 50\sqrt{7}$。

故 A、B 兩點的距離為 $50\sqrt{7}$ 公尺。

12. 高空中有一氣球，其位置在 O 點正上方 500 公尺 P 處。已知從 O 點正東方 A 處觀看氣球其仰角為 $45°$，且在 O 點西 $30°$ 南 B 處測得氣球仰角為 $30°$，求 A 與 B 兩地間的距離。



解▸ 如圖所示：

由直角三角形 PAO，得 $\frac{500}{\overline{OA}} = \tan 45° \Rightarrow \overline{OA} = 500$。

再由直角三角形 PBO，得 $\frac{500}{\overline{OB}} = \tan 30° \Rightarrow \overline{OB} = 500\sqrt{3}$。

在 $\triangle OAB$ 中，

利用餘弦定理 $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OB} \cos \angle AOB$，得

$\overline{AB}^2 = 500^2 + \left(500\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times 500 \times 500\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 500^2 \times 7$，$\overline{AB} = 500\sqrt{7}$，

故 A 與 B 兩地間的距離為 $500\sqrt{7}$ 公尺。