



單元

# 6

# 古典機率



建議配分

每題 10 分。

1. 甲、乙兩人以「剪刀、石頭、布」猜拳。
- (1) 寫出樣本空間  $S$  與其樣本點的個數  $n(S)$ 。
  - (2) 寫出甲贏的事件  $A$  與其樣本點的個數  $n(A)$ 。

解► 甲、乙兩人猜拳，依序將猜拳的結果以 (甲, 乙) 表示，

(1) 樣本空間

$$S = \{(\text{刀}, \text{刀}), (\text{刀}, \text{石}), (\text{刀}, \text{布}), (\text{石}, \text{刀}), (\text{石}, \text{石}), (\text{石}, \text{布}), (\text{布}, \text{刀}), (\text{布}, \text{石}), (\text{布}, \text{布})\}。$$

樣本空間  $S$  的樣本點個數  $n(S) = 9$ 。

(2) 甲贏的事件  $A = \{(\text{刀}, \text{布}), (\text{石}, \text{刀}), (\text{布}, \text{石})\}$ 。

事件  $A$  的樣本點個數  $n(A) = 3$ 。

2. 人的血型有  $A$  型、 $B$  型、 $AB$  型與  $O$  型四種。現有夫妻兩人，事件  $P$  表示其中妻子的血型為  $O$  型，事件  $Q$  表示兩人中至少有一人是  $A$  型。就夫妻兩人血型可能的情況，以集合表示下列各事件：

(1) 事件  $P$ 。

(2) 事件  $Q$ 。

(3)  $P$  與  $Q$  都發生的事件。

(4)  $P$  或  $Q$  發生的事件。

解► 設序對  $(x, y)$  表示丈夫的血型為  $x$  型，妻子的血型為  $y$  型。

其中  $x, y \in \{A, B, AB, O\}$ 。

(1)  $P = \{(A, O), (B, O), (AB, O), (O, O)\}$ 。

(2)  $Q = \{(A, A), (B, A), (AB, A), (O, A), (A, B), (A, AB), (A, O)\}$ 。

(3)  $P$  與  $Q$  都發生的事件為  $P \cap Q = \{(A, O)\}$ 。

(4)  $P$  或  $Q$  發生的事件為

$$P \cup Q = \{(A, A), (B, A), (AB, A), (O, A), (A, B), (A, AB), (A, O), (B, O), (AB, O), (O, O)\}。$$

3. 擲一粒骰子一次，觀察所出現的點數。求下列各事件的機率：

- (1) 出現質數點。
- (2) 出現的點數小於 3。

解► 擲一粒骰子一次，樣本空間  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $n(S) = 6$ 。

(1) 設  $A$  表示出現質數點的事件，則  $A = \{2, 3, 5\}$ ， $n(A) = 3$ ，

$$\text{故 } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}。$$

(2) 設  $B$  表示出現的點數小於 3 的事件，則  $B = \{1, 2\}$ ， $n(B) = 2$ ，

$$\text{故 } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}。$$

4. 袋中有大小相同編號 1，2，3，4，5 號的球各一顆。從袋中取球兩次，每次取一球，取出後不放回。設  $A$  表示所取兩球的編號之和為 6 的事件。

- (1) 求此試驗的樣本空間之元素個數。
- (2) 求事件  $A$  發生的機率。

解► 設  $(x, y)$  表示第一次取出編號為  $x$  的球，第二次取出編號為  $y$  的球，

- (1) 樣本空間的樣本點個數有  $5 \times 4 = 20$  個。
- (2) 球號和為 6 的情形有  $(1, 5)$ ， $(2, 4)$ ， $(4, 2)$ ， $(5, 1)$  共 4 種。

$$\text{故機率為 } \frac{4}{20} = \frac{1}{5}。$$

5. 袋中有大小相同編號1至6號的球各一顆。從袋中同時取出2球，求下列各事件的機率：

(1) 取出的兩顆球的號碼是5號與6號。

(2) 取出的兩顆球的號碼是連號。

解▶ 同時取出2球，樣本空間 $S$ 的樣本點個數 $n(S) = C_2^6 = 15$ 。

(1) 取出的號碼為5號與6號的情形只有一種，故機率為 $\frac{1}{15}$ 。

(2) 取出的號碼是連號的情形為 $(1,2)$ ， $(2,3)$ ， $(3,4)$ ， $(4,5)$ ， $(5,6)$ 共5種。

故機率為 $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ 。

6. 設 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 為某樣本空間中的三個事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ，

$P(A \cap B) = P(B \cap C) = \frac{1}{12}$ ， $P(A \cap C) = 0$ 。求 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三個事件中至少發生一個事件的機率。

解▶  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三個事件中至少發生一個事件的機率為

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - 0 + 0 \\ &= \frac{7}{12}。 \end{aligned}$$

7. 一袋中有6顆大小相同的球，其中有紅球4顆，白球2顆。從袋中同時取出三球，求下列各事件的機率：

(1) 取出的三顆球為2紅球與1白球。

(2) 取出的三顆球中至少有1紅球與1白球。

解▶ (1) 取出2紅球與1白球的機率為 $\frac{C_2^4 \times C_1^2}{C_3^6} = \frac{3}{5}$ 。

(2) 取出至少有1紅球與1白球的情形為「2紅1白」或「2白1紅」，

機率為 $\frac{C_2^4 \times C_1^2 + C_2^2 \times C_1^4}{C_3^6} = \frac{4}{5}$ 。

8. 甲、乙兩人各從1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8中任選三個相異的數字, 求兩人所選的數字中至少有一個數字相同的機率。

解► 設  $A$  表示甲、乙兩人所選的數字中至少有一個數字相同的事件, 則  $A'$  表示甲、乙兩人所選的數字均不相同的事件。

$$\text{故 } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{C_3^8 \times C_3^5}{C_3^8 \times C_3^8} = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}。$$

9. 袋中有四顆相同的球, 四球分別標上1分、2分、-1分與-2分。自袋中取球4次, 每次取一球, 且記錄分數後就將球放回袋中, 求4次取球的分數總和恰為0分的機率。

解► 自袋中每次取一球, 取後放回, 取球4次, 樣本空間  $S$  共有  $4^4 = 256$  個樣本點。4次取球的分數總和恰為0分的情形有三類如下表:

情形	(1, 2, -1, -2)	(1, 1, -1, -1)	(2, 2, -2, -2)
機率	$\frac{4!}{256} = \frac{24}{256}$	$\frac{4!}{256} = \frac{6}{256}$	$\frac{4!}{256} = \frac{6}{256}$

$$\text{故所求機率為 } \frac{24}{256} + \frac{6}{256} + \frac{6}{256} = \frac{9}{64}。$$

10. 袋中有6顆紅球與若干顆白球, 今從袋中一次取出2顆球。已知此二球為1紅球與1白球的機率為  $\frac{8}{15}$ , 求袋中白球的顆數。

解► 設白球有  $x$  顆, 依題意知,  $P(1 \text{ 紅球 } 1 \text{ 白球}) = \frac{8}{15}$

$$\Rightarrow \frac{C_1^6 \times C_1^x}{C_2^{x+6}} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{6x}{(x+6)(x+5)} = \frac{8}{15} \Rightarrow 2x^2 - 23x + 60 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ 或 } \frac{15}{2} \text{ (不合)},$$

故袋中的白球有4顆。