

## 一、前言

如果把教學比喻為旅行，課綱是旅程中的地圖，可以了解旅途的全貌，告訴我們要去哪裡；而學測試題就是指南針，讓我們隨時修正方向。現在讓我們一起來看看，115 學年度的學測數學 B 將指引我們往什麼方向前進？

## 二、試題分布

冊 別	單 元	題 型	難易度	分數合計	單冊合併計分
第一冊	第一章 數與式	單選 1	易	5 分	29 分
	第二章 指數、對數				
	第三章 多項式函數	多選 9	中	5 分	
		選填 16	中	5 分	
	第四章 直線與圓	單選 6	易	5 分	
		混合 18	易	3 分	
		混合 19	中	6 分	
(混合 20)					
第二冊	第一章 數列與級數	單選 5	易	5 分	25 分
		多選 12	難	5 分	
	第二章 數據分析	多選 10	易	5 分	
	第三章 排列組合與機率	選填 14	易	5 分	
	第四章 三角比	選填 13	易	5 分	
第三冊 B	第一章 正弦函數與週期性現象	多選 8	易	5 分	21 分
		第二章 按比例成長模型	單選 2	中	
	第三章 平面向量與應用	選填 17	難	5 分	
		混合 20	易	6 分	

冊別	單元	題型	難易度	分數合計	單冊合併計分
第四冊 B	第一章 空間概念與空間坐標系	單選 4	中	5 分	25 分
		多選 11	中	5 分	
	第二章 機率	單選 7	中	5 分	
		選填 15	中	5 分	
	第三章 矩陣與資料表格	單選 3	易	5 分	
		(選填 15)			

(若題目有跨兩個章節，但僅用到次要概念，則用括號表示，不計入分數合計)

由上方表格可看出此次第一冊的分量占最多，高一內容占 54%，高二內容占 46%。

### 三、試題特色

#### 1. 數 B 特有內容入題率高且靈活：

(1) 經緯度 (單選 4)：

結合赤道與北緯 60 度的距離換算考球面幾何概念。

(2) 圓錐截痕 (多選 11)：

以生活中的「立燈」光影為情境，考橢圓、拋物線、雙曲線等圓錐曲線的定義，著重在觀念及邏輯判斷。

(3) 單點透視法 (選填 17)：

考空間點投影至畫布的坐標變換及「消失點」的概念，結合空間幾何與直線方程式，需具備良好的空間想像力，鑑別度高。

#### 2. 試題取材跨領域且貼近生活：

試題大量結合各領域真實的情境：

(1) 金融理財：單選 2 (連續複利)、單選 5 (投注策略)。

(2) 世界地理：單選 4 (經緯度航行)、單選 6 (領海基線)。

(3) 統計科學：多選 10 (相關係數與迴歸直線)。

(4) 藝術設計：多選 11 (燈罩與圓錐曲線)、選填 17 (單點透視)。

這也呼應課綱中領會「數學作為理解世界工具」的定位，而非僅為考試科目。

#### 3. 強調「情境解讀」與「數學翻譯」：

試題高度重視「能解讀資料，並用數學概念進行推論與決策」的核心素養：

(1) 多選 10 (生物統計)：

探討昆蟲身長與體內養分濃度的相關性，著重於如何解讀已知數據。

(2) 多選 12 (溶液稀釋)：

雖是傳統的遞迴數列問題，但包裝在溶液混合的情境中，考驗學生將文字操作轉化為數學式的能力。

(3)混合 18~20 (星軌攝影)：

以長時間曝光的「星軌」照片為背景，結合了旋轉、坐標幾何與向量。這類題目視覺感強，需要考生從圖形中提取圓心、旋轉角等資訊，並選擇適合的數學工具解決問題。這樣的出題方式對應大學選才所重視的「可遷移能力」，評量學生是否能把學過的數學概念，用在新問題上。

#### 4. 整體難易度中偏易，計算量適中但鑑別度高：

試題難易度占分如下：易 49%，中 41%，難 10%。多數的題目僅測驗單一章節內容，計算量適中。跨章節的題目只有選填 15 和混合 20。整份試題沒有高難度的計算，而是用「適合的數學工具做出合理的判斷」來決勝。

## 四、結語

從 111 年到 115 年，數學 B 的試題已從「考你學過什麼」轉型為「考你能用數學做什麼」。因此對於教師教學的定位，應該從教學生「遇到這一題怎麼解」調整為教學生「遇到沒看過的題目，該怎麼開始想」。而給學生的建議是要需培養：讀題的耐心、嘗試錯誤的勇氣及解釋自己想法的能力。如此面對數學 B 便能從從容容、游刃有餘。

## 第壹部分、選擇(填)題(占85分)

## 一、單選題(占35分)

說明：第 1. 題至第 7. 題，每題 5 分。

1. 當標準值為 95，試選出有幾個整數  $N$  與標準值的誤差百分比  $\frac{|N-95|}{95} \times 100\%$  小於 5%。

- (1) 4 個                      (2) 5 個                      (3) 8 個                      (4) 9 個                      (5) 10 個

答 案：(4)

命題出處：第一冊第一章 數與式

測驗目標：絕對值不等式的計算

難 易 度：易

詳 解： $\frac{|N-95|}{95} \times 100\% < 5\% \Rightarrow \frac{|N-95|}{95} < 0.05 \Rightarrow |N-95| < 0.05 \times 95 = 4.75$   
 $\Rightarrow -4.75 < N-95 < 4.75 \Rightarrow 90.25 < N < 99.75$   
 $\Rightarrow N=91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99$ ，共 9 個  
 故選(4)

2. 以計算機的自然對數按鍵  $\ln$  (即  $\ln x = \log_e x$ ) 估算連續複利本利和  $100e^{\frac{3n}{100}} = 135$  所需期數  $n$ ，試選出等於  $n$  的選項。

- (1)  $\frac{3}{100} \ln(135-100)$                       (2)  $\frac{100}{3} \ln(135-100)$                       (3)  $\frac{135}{100} \ln\left(\frac{3}{100}\right)$   
 (4)  $\frac{3}{100} \ln\left(\frac{135}{100}\right)$                       (5)  $\frac{100}{3} \ln\left(\frac{135}{100}\right)$

答 案：(5)

命題出處：第三冊 B 第二章 按比例成長模型

測驗目標：理解並運用「自然對數」的定義

難 易 度：中

詳 解： $100e^{\frac{3n}{100}} = 135 \Rightarrow e^{\frac{3n}{100}} = \frac{135}{100}$   
 兩邊取自然對數  $\ln$ ，則  $\frac{3n}{100} = \ln\left(\frac{135}{100}\right) \Rightarrow n = \frac{100}{3} \ln\left(\frac{135}{100}\right)$   
 故選(5)

3. 已知實數二階方陣  $A$  滿足  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  以及  $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。試選出  $A$  的反方陣。

(1)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(3)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(4)  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

(5)  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

答 案：(2)

命題出處：第四冊 B 第三章 矩陣與資料表格

測驗目標：二階反方陣的意義

難 易 度：易

詳 解：  $\begin{cases} A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

故選(2)

4. 電腦程式模擬在太平洋等速航行的甲、乙兩艘船。甲船沿著北緯 60 度向西航行，乙船沿著赤道向東航行。在某一時間點甲船在西經 169 度、乙船在東經 140 度，試選出當甲船到達東經 171 度時，乙船在東經幾度。

(1) 120 度

(2) 130 度

(3) 150 度

(4) 160 度

(5) 180 度

答 案：(3)

命題出處：第四冊 B 第一章 空間概念與空間坐標系

測驗目標：理解經緯線與三角比的關係

難 易 度：中

詳 解：如右圖

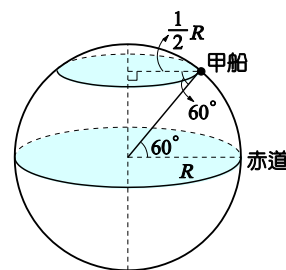
設地球半徑為  $R$ ，則北緯 60 度的緯線半徑為  $\frac{1}{2}R$

甲船從西經 169 度向西航行至東經 171 度時 (可看成西經 189 度)，表示甲船在北緯 60 度的緯線航行了 20 度  
又兩船為等速航行，表示在同一段時間內走過的實際距離 (弧長) 相同

設乙船在赤道航行的角度為  $\theta_z$ ，則

$$2\pi \times \frac{1}{2}R \times \frac{20^\circ}{360^\circ} = 2\pi \times R \times \frac{\theta_z}{360^\circ} \Rightarrow \theta_z = 10^\circ \text{ (向東)}$$

即乙船航行至東經 150 度，故選(3)



5. 某人購買公益彩券，第一次以  $N$  元為投注金額。之後每次要投注時，先將前次投注金額增加一半設為預定金額。如果預定金額大於  $2N$  元，則將預定金額減少一半投注；否則就以預定金額投注。前四次投注紀錄如下表：

	第一次	第二次	第三次	第四次
預定金額(元)		$\frac{3}{2}N$	$\frac{9}{4}N$	$\frac{27}{16}N$
投注金額(元)	$N$	$\frac{3}{2}N$	$\frac{9}{8}N$	$\frac{27}{16}N$

試選出此人第七次的投注金額為多少元。

- (1)  $\frac{3^6}{2^6}N$       (2)  $\frac{3^6}{2^8}N$       (3)  $\frac{3^6}{2^9}N$       (4)  $\frac{3^7}{2^7}N$       (5)  $\frac{3^7}{2^{10}}N$

答 案：(3)

命題出處：第二冊第一章 數列與級數

測驗目標：等比數列的計算

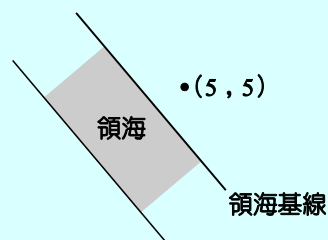
難 易 度：易

詳 解：依題意，可列出下表

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次
預定金額(元)		$\frac{3}{2}N$	$\frac{9}{4}N$	$\frac{27}{16}N$	$\frac{81}{32}N > 2N$	$\frac{243}{128}N$	$\frac{729}{256}N > 2N$
投注金額(元)	$N$	$\frac{3}{2}N$	$\frac{9}{8}N$	$\frac{27}{16}N$	$\frac{81}{64}N$	$\frac{243}{128}N$	$\frac{729}{512}N$

因此，第七次的投注金額為  $\frac{729}{512}N = \frac{3^6}{2^9}N$  元，故選(3)

6. 各國沿岸的「領海基線」其外側距離基線十二浬間之海域，為該國之「領海」。在以浬為單位的坐標平面上，某國有一部分的領海基線為直線  $L: 4x + 3y - 12 = 0$  上的某一線段，且  $(5, 5)$  位於該領海基線的內側，如右圖所示。試選出該段領海在  $L$  與下列哪一條直線之間。



- (1)  $4x + 3y + 48 = 0$   
 (2)  $4x + 3y + 18 = 0$   
 (3)  $4x + 3y = 0$   
 (4)  $4x + 3y - 24 = 0$   
 (5)  $4x + 3y - 72 = 0$

答 案：(1)

命題出處：第一冊第四章 直線與圓

測驗目標：平行線的距離與二元一次不等式的幾何意義

難 易 度：易

詳 解：依題意，設所求直線方程式為  $4x + 3y + k = 0$

$$\Rightarrow \frac{|-12-k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 12 \Rightarrow |-12-k| = 60$$

$$\Rightarrow -12-k = \pm 60 \Rightarrow k = 48 \text{ 或 } -72$$

$$\text{又 } (5, 5) \text{ 代入 } 4x + 3y - 12 > 0$$

$$(5, 5) \text{ 代入 } 4x + 3y + 48 > 0$$

$$(5, 5) \text{ 代入 } 4x + 3y - 72 < 0$$

則所求直線為  $4x + 3y + 48 = 0$ ，故選(1)

7. 有  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三種福袋各一個，其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  中獎的機率分別為  $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ ，且不同福袋中獎與否互不影響。設在福袋  $A$  中獎的條件下，至少有兩個福袋中獎的機率為  $p$ ，且設在至少有兩個福袋中獎的條件下，福袋  $A$  中獎的機率為  $q$ 。試選出  $\frac{p}{q}$  之值。

(1)  $\frac{11}{18}$

(2)  $\frac{17}{18}$

(3) 1

(4)  $\frac{18}{17}$

(5)  $\frac{18}{11}$

答 案：(2)

命題出處：第四冊 B 第二章 機率

測驗目標：條件機率的計算

難 易 度：中

詳 解： $A$  中， $B$  中， $C$  中    $A$  中， $B$  不中， $C$  中    $A$  中， $B$  中， $C$  不中

$$p = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$$

$$q = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{15}{17}$$

$A$  不中， $B$  中， $C$  中

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{18} \text{，故選(2)}$$

二、多選題 (占 25 分)

說明：第 8. 題至第 12. 題，每題 5 分。

8. 試選出與函數  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3$  在每個實數  $x$  所得函數值皆相同的函數。

(1)  $y = 6 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3$

(2)  $y = 3 \sin\left(\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right)x + \pi\right) + 3$

(3)  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x - \pi\right) + 3$

(4)  $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) - 3$

(5)  $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3$

答 案：(3)(5)

命題出處：第三冊 B 第一章 正弦函數與週期性現象

測驗目標：理解正弦函數的圖形、週期性

難 易 度：易

詳 解：函數  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3$  的振幅為 3，週期為  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$

(1)  $\times$ ： $y = 6 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3$  的振幅為  $6 \neq 3$

(2)  $\times$ ： $y = 3 \sin\left(\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi\right)x + \pi\right) + 3$  的週期為  $\frac{2\pi}{\frac{11\pi}{5}} = \frac{10}{11} \neq 10$

(3)  $\circ$ ：利用同界角，

$$y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x - \pi\right) + 3 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x - \pi + 2\pi\right) + 3 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3$$

(4)  $\times$ ： $x=0$  代入  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3$  得  $y=3$

$x=0$  代入  $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) - 3$  得  $y=-3$ ，兩者不相等

(5)  $\circ$ ： $\because \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$

$$\therefore y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x + \pi\right) + 3 = -3 \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right) + 3$$

故選(3)(5)

9. 設  $f(x) = (1-x)(2-x)^2(4+x)$ 。試選出正確的選項。

- (1)  $f(x)$  除以  $(1-x)(2-x)(4+x)$  的餘式為  $-x+2$   
 (2) 若將  $f(x)$  表為  $a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2$ ，則  $c = -6$   
 (3)  $f(x) > 0$  的解區間為  $(-4, 2)$   
 (4)  $\frac{f(2026)}{f(-2022)} > 1$   
 (5)  $f(2026) > f(-2022)$

答 案：(2)(4)

命題出處：第一冊第三章 多項式函數

測驗目標：多項式的除法原理及多項不等式的計算

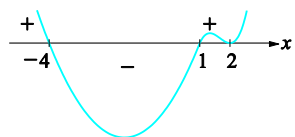
難 易 度：中

詳 解：(1)  $\times$ ：  $f(x) = (1-x)(2-x)(4+x) \cdot (2-x)$

即  $f(x)$  被  $(1-x)(2-x)(4+x)$  整除，餘式為 0

$$\begin{aligned} (2) \circ : f(x) &= (x-2)^2 [(1-x)(4+x)] \\ &= (x-2)^2 (-x^2 - 3x + 4) \\ &= (x-2)^2 [a(x-2)^2 + b(x-2) + c] \\ \Rightarrow -x^2 - 3x + 4 &= a(x-2)^2 + b(x-2) + c \\ \text{將 } x=2 \text{ 代入，得 } c &= -4 - 6 + 4 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \times : f(x) &= (1-x)(2-x)^2(4+x) = -(x-1)(x-2)^2(x+4) > 0 \\ \Rightarrow (x-1)(x-2)^2(x+4) &< 0 \end{aligned}$$



如上略圖，解區間為  $(-4, 1)$

$$\begin{aligned} (4) \circ : \frac{f(2026)}{f(-2022)} &= \frac{-2025 \times (-2024)^2 \times 2030}{2023 \times 2024^2 \times (-2018)} \\ &= \frac{2025 \times 2030}{2023 \times 2018} > 1 \end{aligned}$$

$$(5) \times : -2025 \times (-2024)^2 \times 2030 < 2023 \times 2024^2 \times (-2018)$$

故選(2)(4)

10. 某研究探討昆蟲的身長與其體內兩種養分 A、B 濃度的關係。研究中蒐集某種昆蟲，測得牠們身長與體內 A 濃度的數據如下表。

	平均數	變異數	相關係數
身長	65 單位	100 平方單位	0.75
A 濃度	50 單位	225 平方單位	

已知每隻昆蟲體內的 B 濃度均為 A 濃度的 0.5 倍。試選出正確的選項。

- (1) B 濃度的標準差為  $\frac{15}{2}$  單位
- (2) 若身長的中位數為 65 單位，則 B 濃度的中位數為 25 單位
- (3) B 濃度與 A 濃度的相關係數為 0.5
- (4) 若找到一身長為 65 單位的昆蟲，利用 A 濃度對身長的迴歸直線 (最適直線) 預測，其體內 A 濃度為 50 單位
- (5) B 濃度 (Y) 對身長 (X) 的迴歸直線斜率為  $\frac{1}{2}$

答 案：(1)(4)

命題出處：第二冊第二章 數據分析

測驗目標：標準差、中位數、相關係數及最適直線的概念及計算

難 易 度：易

詳 解：由題意知  $B=0.5A$

$$(1) \bigcirc : \sigma_A = \sqrt{225} = 15 \Rightarrow \sigma_B = 15 \times 0.5 = \frac{15}{2}$$

(2)  $\times$ ：資訊不足，無法判斷

(3)  $\times$ ： $r=1$

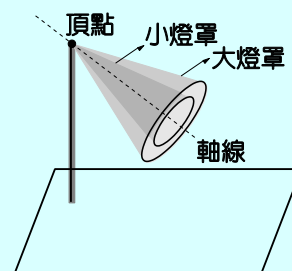
(4)  $\bigcirc$ ：身長 65 單位與 A 濃度 50 單位皆為平均，迴歸直線必過平均

(5)  $\times$ ：Y 對 X 的迴歸直線斜率為

$$\begin{aligned} r \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} &= 0.75 \times \frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{2} \times 0.75 \times \frac{15}{10} \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故選(1)(4)

11. 有一立燈為了採光，採用兩個可以替換的大、小燈罩。兩燈罩皆為直圓錐面的一部分，裝在燈上其軸線位置相同、燈源皆在頂點，且大燈罩照射在地面上的光線範圍大於小燈罩的光線範圍，如右圖所示。令大、小燈罩在地面上所成的光線邊緣分別為圓錐曲線  $\Gamma$ 、 $\gamma$  的一部分。試選出正確的選項。



- (1) 如果  $\Gamma$  是橢圓，則  $\gamma$  是拋物線
- (2) 如果  $\Gamma$  是拋物線，則  $\gamma$  是橢圓
- (3) 如果  $\Gamma$  是雙曲線，則  $\gamma$  是拋物線
- (4) 如果  $\gamma$  是拋物線，則  $\Gamma$  是拋物線
- (5) 如果  $\gamma$  是雙曲線，則  $\Gamma$  是雙曲線

答 案：(2)(5)

命題出處：第四冊 B 第一章 空間概念與空間坐標系

測驗目標：圓錐曲線的認識與應用

難 易 度：中

詳 解：令母線與軸線的夾角為  $\alpha$ ，軸線與平面的夾角為  $\theta$

若  $\alpha < \theta \Rightarrow$  交線為橢圓（含圓）

若  $\alpha = \theta \Rightarrow$  交線為拋物線

若  $\alpha > \theta \Rightarrow$  交線為雙曲線

已知  $\alpha_\Gamma > \alpha_\gamma$

(1)  $\times$ ： $\Gamma$  是橢圓  $\Rightarrow \theta > \alpha_\Gamma > \alpha_\gamma \Rightarrow$  皆為橢圓

(2)  $\circ$ ： $\Gamma$  是拋物線  $\Rightarrow \theta = \alpha_\Gamma > \alpha_\gamma \Rightarrow \gamma$  為橢圓

(3)  $\times$ ： $\Gamma$  是雙曲線  $\Rightarrow \theta < \alpha_\Gamma \Rightarrow \gamma$  無法判斷

(4)  $\times$ ： $\gamma$  是拋物線  $\Rightarrow \theta = \alpha_\gamma < \alpha_\Gamma \Rightarrow \Gamma$  是雙曲線

(5)  $\circ$ ： $\gamma$  是雙曲線  $\Rightarrow \theta < \alpha_\gamma < \alpha_\Gamma \Rightarrow \Gamma$  是雙曲線

故選(2)(5)

12. 有兩容器，A 瓶內有含糖 100 公克的紅茶 1000 毫升，B 瓶內有不含糖的紅茶 500 毫升。用以下方式稀釋 A 瓶的甜度：將 A 瓶混合均勻後，倒出 500 毫升至 B 瓶，再將 B 瓶混合均勻後，倒 500 毫升回 A 瓶，稱此為一次稀釋。重複此稀釋動作，令第  $n$  次稀釋完，A 瓶的含糖量為  $a_n$  公克。試選出正確的選項。

(1)  $a_1 = 75$

(2) 第  $n$  次稀釋完，B 瓶的含糖量為  $50 - \frac{1}{2} a_n$  公克

(3)  $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} \left( 100 - \frac{1}{2} a_n \right)$

(4) 找到實數  $c$  滿足數列  $\langle a_n - c \rangle$  為公比是  $\frac{1}{4}$  的等比數列

(5) 第 100 次稀釋完，A 瓶的含糖量小於 60 公克

答 案：(1)(3)(4)

命題出處：第二冊第一章 數列與級數

測驗目標：數列的遞迴關係的應用

難 易 度：難

詳 解：(1) ○： $a_1 = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{1}{2} = 75$

(2) ×：令  $B$  瓶的含糖量為  $b_n$ ，則  $a_n + b_n = 100$

$$\Rightarrow b_n = 100 - a_n \neq 50 - \frac{1}{2}a_n$$

(3) ○：完成一次稀釋後， $A$  的糖量等於「 $A$  剩下的」加「從  $B$  倒回的」

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{2}a_n\right) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(100 - a_n + \frac{1}{2}a_n\right) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(100 - \frac{1}{2}a_n\right) \end{aligned}$$

(4) ○： $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(100 - \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{4}a_n + 50$

$$\text{令 } a_{n+1} - c = \frac{1}{4}(a_n - c) \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}c$$

$$\text{取 } \frac{3}{4}c = 50 \Rightarrow c = \frac{200}{3} \text{ 即可}$$

(5) ×：承(4)， $a_n - \frac{200}{3} = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{200}{3}\right) = \dots\dots$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(a_1 - \frac{200}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(75 - \frac{200}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{25}{3} + \frac{200}{3}$$

$$\Rightarrow a_{100} = \left(\frac{1}{4}\right)^{99} \times \frac{25}{3} + \frac{200}{3}$$

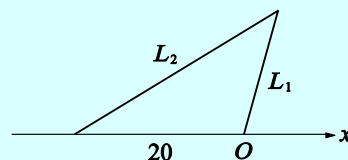
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{99} \times \frac{25}{3} + 66\frac{2}{3} > 60$$

故選(1)(3)(4)

三、選填題 (占 25 分)

說明：第 13. 題至第 17. 題，每題 5 分。

13. 坐標平面上， $L_1$  為通過原點  $O$  且斜角為  $75^\circ$  的直線； $L_2$  為通過點  $(-20, 0)$  且斜角為  $30^\circ$  的直線，如右圖所示。則  $L_1$ 、 $L_2$  的交點到原點的距離為 (13-1)(13-2)。(四捨五入至整數)



答 案：14

命題出處：第二冊第四章 三角比

測驗目標：正弦定理的應用

難 易 度：易

詳 解：如右圖，令  $L_1$  與  $L_2$  交點為  $A$ ，

$L_2$  與  $x$  軸交點為  $B(-20, 0)$

由題意可知  $\angle ABO = 30^\circ$ ， $\angle AOX = 75^\circ$

$\Rightarrow \angle BAO = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

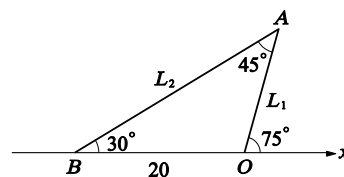
由正弦定理知  $\frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{OA}}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow \overline{OA} = 20 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$

$\approx 14.14 \approx 14$

故所求距離為 14



14. 將 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 七個數字排成一個七位數。若要求排出的數字 3, 4 相鄰、5, 6

相鄰以及 6, 7 相鄰，則共可排出 (14-1)(14-2) 個七位數。

答 案：96

命題出處：第二冊第三章 排列組合與機率

測驗目標：排列數的計算

難 易 度：易

詳 解：依題意可視為  $1 \cdot 2 \cdot (34) \cdot (567)$  四個排列，

其中 3、4 可交換位置，且 5、7 可對調位置

故共可排出  $4! \times 2! \times 2! = 96$  個七位數

15. 某校健康檢查：全體學生中有近視的占  $\frac{1}{2}$ 、有蛀牙的占  $\frac{1}{3}$ 。設  $p$  為全體學生中無近視且無蛀牙的學生所占比例。將部分資料依所占比例以列聯表呈現如右：

	有近視	無近視	總和
有蛀牙			$\frac{1}{3}$
無蛀牙		$p$	$\frac{2}{3}$
總和	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

已知有近視的學生中，有蛀牙的占少數；有蛀牙

的學生中，有近視的占多數。則  $p$  的範圍為  $\frac{\textcircled{15-1}}{\textcircled{15-2}} < p < \frac{\textcircled{15-3}}{\textcircled{15-4} \textcircled{15-5}}$ 。(化為最簡分數)

答 案： $\frac{1}{3} < p < \frac{5}{12}$

命題出處：第四冊 B 第二章 機率

測驗目標：列聯表及條件機率的應用

難 易 度：中

詳 解：

	有近視	無近視	總和
有蛀牙	$p - \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{1}{3}$
無蛀牙	$\frac{2}{3} - p$	$p$	$\frac{2}{3}$
總和	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

列聯表中，有近視且無蛀牙所占比例 =  $\frac{2}{3} - p$ ，

無近視且有蛀牙所占比例 =  $\frac{1}{2} - p$

$\Rightarrow$  有近視且有蛀牙所占比例 =  $\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - p\right) = p - \frac{1}{6}$

又有近視的學生中，有蛀牙的占少數  $\Rightarrow p - \frac{1}{6} < \frac{2}{3} - p \Rightarrow p < \frac{5}{12}$

有蛀牙的學生中，有近視的占多數  $\Rightarrow p - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - p \Rightarrow p > \frac{1}{3}$

故  $\frac{1}{3} < p < \frac{5}{12}$

16. 坐標平面上， $L$  為一次函數  $y=f(x)$  的圖形， $\Gamma$  為二次函數  $y=g(x)$  的圖形。已知  $L$  與  $\Gamma$  交於  $(1, 0)$ 、 $(5, 4)$  兩點，且點  $(2, 2)$  在  $\Gamma$  上。則  $g(x)-f(x)$  的最大值為  $\frac{\textcircled{16-1}}{\textcircled{16-2}}$ 。(化為最簡分數)

答 案： $\frac{4}{3}$

命題出處：第一冊第三章 多項式函數

測驗目標：一次函數、二次函數及最大、最小值的計算

難 易 度：中

詳 解：由題意知，直線  $L$  的斜率為  $\frac{4-0}{5-1}=1$ ，又過點  $(1, 0) \Rightarrow f(x)=x-1$

令  $g(x)=ax^2+bx+c$ ，將  $(1, 0)$ 、 $(5, 4)$ 、 $(2, 2)$  分別代入得

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 25a+5b+c=4 \\ 4a+2b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=3 \\ c=-\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x^2+3x-\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow g(x)-f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}(x-3)^2+\frac{4}{3}$$

故所求最大值為  $\frac{4}{3}$

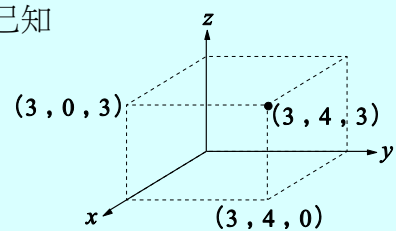
17. 利用單點透視法將坐標空間的點繪製在畫布的坐標平面上。已知

(一)空間中與  $y$  軸平行的直線，在畫布上的消失點為  $(0, 15)$

(二)空間中與  $z$  軸平行的直線，在畫布上都與  $y$  軸平行

若點  $(0, 0, 0)$ 、 $(3, 4, 0)$ 、 $(3, 0, 3)$  繪在畫布上分別為

$(0, 0)$ 、 $(\frac{13}{5}, 2)$ 、 $(3, 3)$ ，則點  $(3, 4, 3)$  繪在畫布上的



$y$  坐標為  $\frac{\textcircled{17-1} \textcircled{17-2}}{\textcircled{17-3}}$ 。(化為最簡分數)

答 案： $\frac{23}{5}$

命題出處：第三冊 B 第三章 平面向量與應用

測驗目標：單點透視法及空間在平面上的投影

難 易 度：難

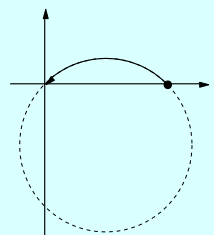
詳 解：令點  $(3, 4, 3)$  在畫布上的坐標為  $(a, b)$   
 $\therefore (3, 4, 0)$  到  $(3, 4, 3)$  的直線平行  $z$  軸  
 $\therefore$  根據(二)，在畫布上會平行  $y$  軸  $\Rightarrow$  在畫布上的  $x$  坐標相同，即  $a = \frac{13}{5}$   
 又  $\therefore (3, 0, 3)$  到  $(3, 4, 3)$  的直線平行  $y$  軸  
 $\therefore$  根據(一)，在畫布上的消失點為  $(0, 15) \Rightarrow$  在畫布上皆與  $(0, 15)$  共線  
 通過  $(3, 3)$  及  $(0, 15)$  的直線方程式為  $y - 15 = \frac{3 - 15}{3 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = -4x + 15$   
 將  $(\frac{13}{5}, b)$  代入得  $b = (-4) \times \frac{13}{5} + 15 = \frac{23}{5}$ ，故所求  $y$  坐標為  $\frac{23}{5}$

第貳部分、混合題或非選擇題 (占 15 分)

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇(填)題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

有一張星軌照片，照片中的星星各自繞著以北極星為圓心且以逆時鐘方向旋轉  $90^\circ$  角所畫出的圓弧軌跡。在此照片所設的坐標平面上令北極星為點  $P$ 。已知甲星軌跡的起點、終點坐標分別為  $(8, 0)$ 、 $(0, 0)$ ，軌跡如右圖所示。根據上述，試回答下列問題。



18. 試選出甲星軌跡的起點與終點連線線段的中垂線方程式。(單選題，3 分)

- (1)  $x = 4$
- (2)  $y = 4$
- (3)  $y = x - 4$
- (4)  $y = -x + 4$
- (5)  $y = 4x$

答 案：(1)

命題出處：第一冊第四章 直線與圓

測驗目標：中垂線方程式的計算

難 易 度：易

詳 解： $\therefore (8, 0)$ 、 $(0, 0)$  兩點的中點為  $(4, 0)$   
 $\therefore$  通過  $(4, 0)$  的鉛垂線方程式為  $x = 4$   
 故選(1)

19. 令  $L$  為通過點  $(8, 0)$  且斜率為 1 的直線。試說明點  $P$  在  $L$  上，並求甲星軌跡所在的圓方程式。(非選擇題，6 分)

答 案：說明略， $(x-4)^2+(y+4)^2=32$

命題出處：第一冊第四章 直線與圓

測驗目標：圓方程式的計算

難 易 度：中

詳 解：①如右圖，令  $A(8, 0)$ ， $B(0, 0)$ ，由題意知  $\angle APB=90^\circ$ ，

$$\text{又 } \overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \angle BAP = 45^\circ \Rightarrow m_{\overline{PA}} = 1$$

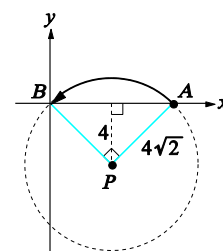
即  $P$  在  $L$  上

②等腰直角  $\triangle PAB$  中， $\overline{AB} = 8$

$\Rightarrow \overline{AB}$  邊上的高為 4  $\Rightarrow P(4, -4)$  為圓心

又  $\overline{PA} = \overline{PB} = 4\sqrt{2}$  為半徑

故所求圓方程式為  $(x-4)^2+(y+4)^2=32$



20. 已知照片中乙星軌跡的起點  $Q$  坐標為  $(2, 8)$ 。令  $R$  為其軌跡終點，試求  $\overrightarrow{PR}$  以及點  $R$  的坐標。(非選擇題，6 分)

答 案： $\overrightarrow{PR} = (-12, -2)$ ， $R(-8, -6)$

命題出處：第三冊 B 第三章 平面向量與應用

測驗目標：垂直的向量關係與坐標運算

難 易 度：易

詳 解：如右圖， $m_{\overline{PQ}} = \frac{-4-8}{4-2} = -6 \Rightarrow m_{\overline{PR}} = \frac{1}{6}$

直線  $\overleftrightarrow{PR}$  的方程式為  $y+4 = \frac{1}{6}(x-4)$ ，即  $x-6y=28$

令  $R(28+6t, t)$ ，其中  $t$  為實數

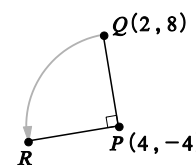
$$\because \overline{PQ} = \overline{PR} \Rightarrow \sqrt{(4-2)^2+(-4-8)^2} = \sqrt{(28+6t-4)^2+(t+4)^2}$$

$$\Rightarrow 37t^2+296t+444=0 \Rightarrow t^2+8t+12=0 \Rightarrow t=-6 \text{ 或 } -2$$

$$\therefore R(-8, -6) \text{ 或 } R(16, -2)$$

但終點坐標為以  $P$  為圓心逆時針旋轉  $90^\circ$ ，取  $R(-8, -6)$

$$\text{故 } \overrightarrow{PR} = (-8-4, -6+4) = (-12, -2)$$



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. 一維數據  $X : x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

$$\begin{aligned} \text{標準差 } \sigma_X &= \sqrt{\frac{1}{n} [(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} [x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - n\mu_X^2]} \end{aligned}$$

4. 二維數據  $(X, Y) : (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ,

$$\text{相關係數 } r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$