112 學測最前線 數A

試題大剖析

（此份試卷解題係依據大學考試中心於 112 年 1 月 13 日所公告之答案為主）

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1 若在計算器中鍵入某正整數 N，接著連按「$\sqrt{\ }$」鍵（取正平方根）3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？

(1) 2^3　(2) 2^4　(3) 2^6　(4) 2^8　(5) 2^{12}

出　　處：龍騰版《數學 1》單元 3　指數

類似考題：《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 1　實數與指對數　P17 例 16

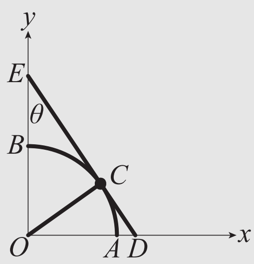
《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 8　指數與對數　P139 範例 1

解題觀念：正整數指數與指數律

答　　案：(4)

解　　析：依題意，$\sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}}=N^{\frac{1}{8}}=2\Rightarrow N=2^8$，故選(4)。

2 坐標平面上，以原點O為圓心、1為半徑作圓，分別交坐標軸正向於A、B兩點。在第一象限的圓弧上取一點C作圓的切線分別交兩軸於點D、E，如圖所示。令$\angle OEC=\theta$，試選出為$\tan\theta$的選項。



(1) $\overline{OE}$　(2) $\overline{OC}$　(3) $\overline{OD}$

(4) $\overline{CE}$　(5) $\overline{CD}$

出　　處：龍騰版《數學 2》單元 10　直角三角形的三角比

類似考題：《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 7　三角比　P166 例 1

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 9　三角比　P161 類題 2

解題觀念：銳角三角比

答　　案：(5)

解　　析：因為$\triangle DOE$為直角三角形且$\overline{OC}\perp\overline{DE}$，

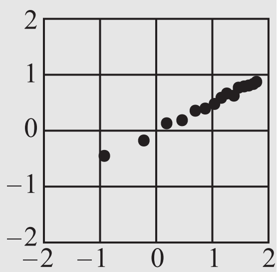
所以$\angle OEC=90^\circ-\angle EOC=\angle COD=\theta$，

在直角三角形$\triangle OCD$中，

因為$\overline{OC}=1$且$\angle COD=\theta$，

所以$\tan\theta=\overline{OC}\tan\theta=\overline{CD}$，故選(5)。

3 某生推導出兩物理量s,t應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據(s_k,t_k)，$k=1,\ldots,15$。老師建議他將其中的t_k先取對數，在坐標平面上標出對應的點$(s_k,\log t_k)$，$k=1,\ldots,15$，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得s,t的關係式最可能為下列哪一選項？



(1) $s=2t$　(2) $s=3t$　(3) $t=10^s$　(4) $t^2=10^s$　(5) $t^3=10^s$

出　　處：龍騰版《數學 2》單元 9　二維數據分析

類似考題：《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 9　指數與對數函數　P42 例 13

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 7　數據分析　P132 類題 2

解題觀念：最小平方法與迴歸直線

答　　案：(4)

解　　析：因為樣本點分布均在直線$y=\frac{1}{2}x$附近，

所以可能的迴歸線方程式為$y=\frac{1}{2}x$，

將$(s_k,\log t_k)$代入$y=\frac{1}{2}x$得$\log t_k=\frac{1}{2}s_k$，

$\Rightarrow s_k=2\log t_k=\log t_k{}^2\Rightarrow t_k{}^2=10^{s_k}$，故選(4)。

4 將數字 1、2、3、⋯、9 等 9 個數字排成九位數（數字不得重複），使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\dfrac{8!}{4!4!}$ (2) $\dfrac{8!}{5!3!}$ (3) $\dfrac{9!}{5!4!}$ (4) $\dfrac{8!}{5!}$ (5) $\dfrac{9!}{5!}$

出　　處： 龍騰版《數學 2》單元 5　組合

類似考題： 《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 5　排列組合與機率　P118 例 12

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 5　排列組合　P.89 類題 1

解題觀念： 組合

答　　案： (1)

解　　析： 依題意，此九位數的最中間位數（第 5 位數）須為 9，

接著將 1～8 平分 2 組，並依題目所要求的順序排在 9 的左 4 位數與右 4 位數，

依題意，各組排法皆為 1 種

$\Rightarrow \left(C_4^8\times 1\right)\left(C_4^4\times 1\right)=\dfrac{8!}{4!4!}$，故選(1)。

5 已知坐標空間中 P、Q、R 為平面 $2x-3y+5z=\sqrt{7}$ 上不共線三點。

令 $\overrightarrow{PQ}=\left(a_1,b_1,c_1\right)$，$\overrightarrow{PR}=\left(a_2,b_2,c_2\right)$。試選出下列行列式中絕對值為最大的選項。

(1) $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

出　　處： 龍騰版《數學 4A》單元 4　三階行列式

類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 11　空間向量　P108 例 16

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 12　空間向量　P239 類題 2

解題觀念： 平行六面體的體積

答　　案： (2)

解　　析： 因為 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\,//\left(2,-3,5\right)$，

令 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\left(2t,-3t,5t\right)$（$t\in\mathbb{R}$ 且 $t\neq 0$），

將各選項的三階行列式表為 $\begin{vmatrix}x & y & z\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$，

則 $\left|\begin{vmatrix}x & y & z\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}\right|$ 可視為三向量 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PR}$ 與 $\left(x,y,z\right)$ 所張出的平行六面體體積

$$\Rightarrow\left|\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right|=\left|\left(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right)\cdot(x,y,z)\right|=\left|(2t,-3t,5t)\cdot(x,y,z)\right|=\left|(2x-3y+5z)t\right|$$ 。

(1)式$\Rightarrow\left|\left(2\times(-1)-3\times1+5\times1\right)t\right|=0$ 。

(2)式$\Rightarrow\left|\left(2\times1-3\times(-1)+5\times1\right)t\right|=|10t|$ 。

(3)式$\Rightarrow\left|\left(2\times1-3\times1+5\times(-1)\right)t\right|=|-6t|$ 。

(4)式$\Rightarrow\left|\left(2\times(-1)-3\times(-1)+5\times1\right)t\right|=|6t|$ 。

(5)式$\Rightarrow\left|\left(2\times(-1)-3\times(-1)+5\times(-1)\right)t\right|=|-4t|$ 。

可知選項(2)為最大，故選(2)。

6 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點O。從O以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為P、Q，試問所得的內積$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$之期望值為下列哪一個選項？

(1)$\frac{4}{7}$ (2)$\frac{5}{7}$ (3)$\frac{6}{7}$ (4)1 (5)$\frac{8}{7}$

出　　處：龍騰版《數學 4A》單元 3　空間向量的運算

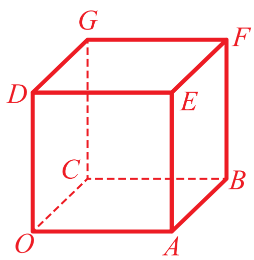
類似考題：《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 11　空間向量　P125 例 22

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 12　空間向量　P232 類題 2

解題觀念：空間向量的內積

答　　案：(3)

解　　析：如圖，



以O為出發點，長度為1的向量：$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$；

以O為出發點，長度為$\sqrt{2}$的向量：$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OG}$；

以O為出發點，長度為$\sqrt{3}$的向量：$\overrightarrow{OF}$ 。

$\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)$可能組合有$(1,1),(1,\sqrt{2}),(1,\sqrt{3}),(\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{3})$：

$\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)=(1,1)$時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$（3組）；

$\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)=(1,\sqrt{2})$時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$（3組）或1（6組）；

$\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)=(1,\sqrt{3})$時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1$（3組）；

$\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1$（3組）；

$\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|\right)=(\sqrt{2},\sqrt{3})$時，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2$（3組）。

則$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$期望值$=\dfrac{0\times3+0\times3+1\times6+1\times3+1\times3+2\times3}{C_2^7}=\dfrac{18}{21}=\dfrac{6}{7}$，故選(3)。

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1)甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元

(2)工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高

(3)工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高

(4)工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少

(5)工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高

出　　處：龍騰版《數學 2》單元 2　級數

類似考題：《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 4　數列與級數　P99 關鍵素養題

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 4　數列與級數　P61 好學說例 A

解題觀念：級數

答　　案：(3)(5)

解　　析：設兩人起薪為 x 元，

甲調薪的時間點為第 4 個月、第 7 個月、第 10 個月、……，

即每到第 $3n+1$ 個月時調薪為 $x+200n$ 元（$n\in\mathbb{N}$）；

乙調薪的時間點為第 13 個月、第 25 個月、第 37 個月、……，

即每到第 $12n+1$ 個月時調薪為 $x+1000n$ 元（$n\in\mathbb{N}$）。

(1) ╳：甲在第 9 個月薪資為 $x+200\times 2=x+400$ 元，
相較起薪增加 400 元。

(2) ╳：甲在第 13 個月薪資為 $x+200\times 4=x+800$ 元，
乙在第 13 個月薪資為 $x+1000$ 元，
故乙的薪資較高。

(3) ○：甲在第 19 個月薪資為 $x+200\times 6=x+1200$ 元，
乙在第 19 個月薪資為 $x+1000$ 元，
故甲的薪資較高。

(4) ╳：甲共領 $x\times 3+(x+200)\times 3+(x+400)\times 3+\cdots+(x+1000)\times 3$

$$=3\times\frac{(x+(x+1000))\times 6}{2}=18x+9000\text{ 元，}$$

乙共領 $x\times 12+(x+1000)\times 6=18x+6000$ ，
故甲領到的薪資較高。

(5) ○：第 3 年（第 25 ～ 36 月）乙的月薪為 $x+1000\times 2=x+2000$ 元，
第 3 年甲的月薪分別為 $x+1600$ 元（第 25 ～ 27 月），
$x+1800$ 元（第 28 ～ 30 月）， $x+2000$ 元（第 31 ～ 33 月），
$x+2200$ 元（第 34 ～ 36 月），
故甲的月薪共有 3 個月會比乙高。

故選(3)(5)。

8 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數 n，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

(1) $p_{n+1} > p_n$

(2) $p_3 = 0.3$

(3) $\langle p_n \rangle$ 為等差數列

(4) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 $p_2 - p_1$

(5) 玩此遊戲 n 次且 $n \geq 2$ 時，至少中獎 2 次的機率等於 $2p_n$

出　　處：龍騰版《數學 4A》單元 7　條件機率與貝氏定理

類似考題：《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》

單元 13　條件機率與貝氏定理　P144 例 5

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 6　機率與期望值　P110 範例 9

解題觀念：獨立事件

答　　案：(1)(4)

解　　析：$p_n = 1 - p(n\text{次皆沒中獎}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$，

(1) ○：$p_{n+1} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} > 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n = p_n$。

(2) ╳：$p_3 = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 \neq 0.3$。

(3) ╳：$p_2 - p_1 = \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) - \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)\right) = \left(\frac{9}{10}\right) - \left(\frac{9}{10}\right)^2$，

$p_3 - p_2 = \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3\right) - \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 \neq p_2 - p_1$，

故 $\langle p_n \rangle$ 不為等差數列。

(4) ○：$p(\text{第1次沒中獎且第2次中獎})$

$= \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \times \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{9}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = p_2 - p_1$。

(5) ╳：$p(\text{玩}n\text{次至少中獎2次}) = 1 - p(\text{玩}n\text{次都沒中獎}) - p(\text{玩}n\text{次只中獎1次})$

$= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n - C_1^n \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$

$\neq 2p_n$。

故選(1)(4)。

9 設 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ 是首項為 3 且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式

$$\log_3 a_1-\log_3 a_2+\log_3 a_3-\log_3 a_4+\cdots+(-1)^{n+1}\log_3 a_n>18$$

的項數 n 之可能選項。

(1) 23　(2) 24　(3) 25　(4) 26　(5) 27

出　　處： 龍騰版《數學 3A》單元 7　對數函數

類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》
單元 9　指數與對數函數　P41 例 12
《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 8　指數與對數　P155 類題 2

解題觀念： 對數函數的應用

答　　案： (3)(5)

解　　析： 因為 $\langle a_n\rangle$ 為首項 >0，公比 >1 的等比數列，

所以對所有正整數 n，$\log a_{n+1}>\log a_n$ 恆成立。

若 n 為偶數，

則 $(\log_3 a_1-\log_3 a_2)+(\log_3 a_3-\log_3 a_4)+\cdots+(\log_3 a_{n-1}-\log_3 a_n)$ 必小於 0，

所以 n 為奇數。

$$\log_3 a_1-\log_3 a_2+\log_3 a_3-\log_3 a_4+\cdots+(-1)^{n+1}\log_3 a_n=\log_3\frac{a_1\times a_3\times\cdots\times a_{n-2}\times a_n}{a_2\times a_4\times\cdots\times a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \log_3\frac{a_1\times a_3\times\cdots\times a_{n-2}\times a_n}{a_2\times a_4\times\cdots\times a_{n-1}}>18$$

$$\Rightarrow \frac{a_1\times a_3\times\cdots\times a_{n-2}\times a_n}{a_2\times a_4\times\cdots\times a_{n-1}}>3^{18}$$

$$\Rightarrow a_1\times\left(\frac{a_3}{a_2}\right)\times\left(\frac{a_5}{a_4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)>3^{18}$$

$$\Rightarrow 3\times\left(3\sqrt{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}>3^{18}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{3n+1}{4}}>3^{18}$$

$\Rightarrow n>\dfrac{71}{3}=23\dfrac{2}{3}$，$n$ 可能為 25 或 27，故選(3)(5)。

10 考慮坐標平面上的直線 L：$5y+(2k-4)x-10k=0$（其中 k 為一實數），以及長方形 $OABC$，其頂點坐標為 $O(0,0)$、$A(10,0)$、$B(10,6)$、$C(0,6)$。設 L 分別交直線 OC、直線 AB 於點 D、E。試選出正確的選項。

(1)當 $k=4$ 時，直線 L 通過點 A

(2)若直線 L 通過點 C，則 L 的斜率為 $-\frac{5}{2}$

(3)若點 D 在線段 $\overline{OC}$ 上，則 $0\le k\le 3$

(4)若 $k=\frac{1}{2}$，則線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部（含邊界）

(5)若線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部（含邊界），則 L 的斜率可能為 $\frac{3}{10}$

出　　處： 龍騰版《數學 1》單元 5　直線方程式

類似考題： 《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 3　直線與圓　P59 例 1
《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 3　直線與圓　P39 類題 2

解題觀念： 直線方程式

答　　案： (1)(3)(5)

解　　析： (1)○：L：$4x+5y-40=0$，$A(10,0)$ 代入 L 等號成立，故 A 在 L 上。

(2)╳：$C(0,6)$ 代入 L 得 $30-10k=0\Rightarrow k=3$，

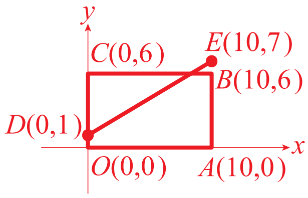
此時 L：$2x+5y-30=0$，L 的斜率為 $-\frac{2}{5}$。

(3)○：表 $\overline{OC}$ 與 L 相交 $\Rightarrow\left(5\times 0+(2k-4)\times 0-10k\right)\left(5\times 6+(2k-4)\times 0-10k\right)\le 0$

$\Rightarrow(-10k)(30-10k)\le 0\Rightarrow 0\le k\le 3$。

(4)╳：L：$-3x+5y-5=0$ 分別與直線 OC、直線 AB 交於 $D(0,1)$、$E(10,7)$，

由圖可知 $\overline{DE}$ 有部分在長方形 $OABC$ 外部。



(5)○：對所有實數 k，直線 L：$5y+(2k-4)x-10k=0$ 必過 $(5,4)$，

若直線 L 斜率為 $\frac{3}{10}$，則 L 方程式為 $3x-10y=-25$，

此時直線 L 分別與直線 OC、直線 AB 交於 $D\left(0,\frac{5}{2}\right)$、$E\left(10,\frac{11}{2}\right)$，

因為 D、E 分別位在 $\overline{OC}$ 與 $\overline{AB}$ 上，

故 $\overline{DE}$ 位在長方形 $OABC$ 內部（含邊界）。

故選(1)(3)(5)。

11 坐標平面上，設 A 、 B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 $90°$ 的旋轉矩陣。設 C 、 D 分別表示以直線 $x=y$ 、 $x=-y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

(1) A 、 C 將點 $(1,0)$ 映射到同一點

(2) $A=-B$

(3) $C=D^{-1}$

(4) $AB=CD$

(5) $AC=BD$

出　　處： 龍騰版《數學 4A》單元 10　矩陣的應用

類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 14　矩陣　P171 例 17

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 14　矩陣　P280 類題 2

解題觀念： 重要的線性變換

答　　案： (2)(5)

解　　析： 依題意，

$$A=\begin{bmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}，$$

$$C=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & -\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}，D=\begin{bmatrix}\cos\frac{3}{2}\pi & \sin\frac{3}{2}\pi\\ \sin\frac{3}{2}\pi & -\cos\frac{3}{2}\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}，$$

(1) ╳： $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 。

(2) ○：由以上 A 、 B 矩陣可知 $A=-B$ 。

(3) ╳： $D^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\neq C$ 。

(4) ╳： $AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ， $CD=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 。

(5) ○： $AC=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ， $BD=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 。

故選(2)(5)。

12 令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試選出正確的選項。

(1)鉛直線 $x=\frac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸

(2)若鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 均為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a)=f(b)$

(3)在區間 $[0,2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

(4)在區間 $[0,2\pi)$ 中滿足 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π

(5) $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=4\sin^2\frac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到

出　　處：龍騰版《數學 3A》單元 4　正餘弦的疊合

類似考題：《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 8　三角函數　P21 例 18

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 10　三角函數　P191 類題 1

解題觀念：正弦與餘弦函數的疊合

答　　案：(1)(5)

解　　析：$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，週期 2π，振幅 2，對稱軸 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$（$k\in\mathbb{Z}$），

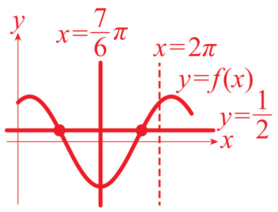
(1) ○：$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$ 為最大值 $\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$ 為對稱軸。

(2) ╳：反例：取 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分別等於 2 和 -2。

(3) ╳：$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2}{3}\pi$，當 $x\in[0,2\pi)$。

(4) ╳：由圖可知 $y=f(x)$ 與 $y=\frac{1}{2}$ 在區間 $[0,2\pi)$ 中相交兩點且兩點對稱 $x=\frac{7}{6}\pi$，

所以滿足 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的所有實數和 $=\frac{7}{6}\pi\times 2=\frac{7}{3}\pi>2\pi$。



(5) ○：利用半角公式，$y=4\sin^2\frac{x}{2}=4\times\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)=2-2\cos x$，

其週期、振幅皆與 $y=f(x)$ 相同，$y=f(x)$ 可由 $y=4\sin^2\frac{x}{2}$ 平移得到。

故選(1)(5)。

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量（單位：杯）與收入總金額（單位：元）如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。

已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為 13-1 13-2 元。

	果汁（杯）	奶茶（杯）	咖啡（杯）	收入總金額（元）
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

出　　處：龍騰版《數學 4A》單元 8　三元一次聯立方程式

類似考題：《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 14　矩陣　P156 例 2

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 14　矩陣　P263 類題 2

解題觀念：高斯消去法

答　　案：80

解　　析：設果汁每杯 x 元，奶茶每杯 y 元，咖啡每杯 z 元，

依題意可列式：$\begin{cases}60x+80y+50z=12900\\30x+40y+30z=6850\\50x+70y+40z=10800\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x+8y+5z=1290\\3x+4y+3z=685\\5x+7y+4z=1080\end{cases}$，

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}6&8&5&1290\\3&4&3&685\\5&7&4&1080\end{bmatrix} \times(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&210\\3&4&3&685\\5&7&4&1080\end{bmatrix} \times(-3)\quad \times(-5)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&210\\0&1&0&55\\0&2&-1&30\end{bmatrix} \times(-2) \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1&210\\0&1&0&55\\0&0&-1&-80\end{bmatrix}，解得 \begin{cases}x=75\\y=55\\z=80\end{cases}，$$

故咖啡每杯 80 元。

14 設 a,b 為實數（其中 $a>0$），若多項式 $ax^2+(2a+b)x-12$ 除以 $x^2+(2-a)x-2a$ 所得餘式為 6，則數對 $(a,b)=($ ⑭-1 ___ , ⑭-2⑭-3 ___ $)$。

出　　處： 龍騰版《數學 1》單元 8　多項式的除法原理

類似考題： 《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 2　多項式函數　P30 例 1

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 2　多項式　P15 好學說例 B

解題觀念： 多項式的四則運算

答　　案： $(3,-9)$

解　　析： $ax^2+(2a+b)x-12=\left(x^2+(2-a)x-2a\right)\times a+6$

$\Rightarrow ax^2+(2a+b)x-12=ax^2+\left(2a-a^2\right)x-2a^2+6$，

比較係數 $\begin{cases}2a+b=2a-a^2\\-12=-2a^2+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=-b\\2a^2=18\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(3,-9)$ 或 $(-3,-9)$（不合），

故 $(a,b)=(3,-9)$。

15 設 O、A、B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$。若 C、D 兩點在直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$、$3\overline{AD}=8\overline{BD}$，且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，則 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{⑮-1}{⑮-2}$。（化為最簡分數）

出　　處： 龍騰版《數學 3A》單元 9　平面向量的運算

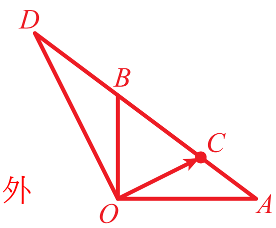
《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 10　平面向量

類似考題： 《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 11　平面向量　P211 類題 2

解題觀念： 向量的內積

答　　案： $\frac{3}{4}$

解　　析： 如圖，



由 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 知 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$，

由 $3\overline{AD}=8\overline{BD}$ 且 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$ 知 $\overline{AD}:\overline{BD}=8:3$ 且 D 在 $\overline{AB}$ 之外

$\Rightarrow\overrightarrow{OB}=\frac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{8}\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}$，

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{9}{25}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\frac{16}{25}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0$

$\Rightarrow 9\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=16\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\Rightarrow\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$。

16 令 E：$x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2,-1,0)$、$B(0,1,2)$、$C(-2,1,4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A、B、C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為 ⑯-1 $\sqrt{\text{⑯-2}}$。（化為最簡根式）

出　　處： 龍騰版《數學 4A》單元 5　空間中的平面

類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》
單元 12　空間中的平面與直線　P121 例 7
《【好好學】數學 A 學測總複習講義》
單元 13　空間中的平面與直線　P245 範例 1

解題觀念： 點到平面的距離公式

答　　案： $2\sqrt{2}$

解　　析： P 為 $\overline{AB}$ 的中垂面、$\overline{AC}$ 的中垂面與 $z=1$ 的交點，

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,2)\,//\,(1,-1,-1)$，$\overline{AB}$ 中點 $(1,0,1)\Rightarrow\overline{AB}$ 的中垂面：$x-y-z=0$，

$\overrightarrow{AC}=(-4,2,4)\,//\,(2,-1,-2)$，$\overline{AC}$ 中點 $(0,0,2)\Rightarrow\overline{AC}$ 的中垂面：$2x-y-2z=-4$，

$$\begin{cases}x-y-z=0\\2x-y-2z=-4\\z=1\end{cases}\Rightarrow P(-3,-4,1)$$

$$\Rightarrow d(P,E)=\frac{|-3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$ 。

17 坐標空間中有兩不相交直線 L_1：$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$，$t$ 為實數、L_2：$\begin{cases} x=2+2s \\ y=5+s \\ z=6-s \end{cases}$，$s$ 為實數，另一直線 L_3 與 L_1、L_2 皆相交且垂直。若 P、Q 兩點分別在 L_1、L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3，則 P、Q 兩點的距離為 $\underline{(17\text{-}1)\sqrt{(17\text{-}2)}}$。（化為最簡根式）

出　　處： 龍騰版《數學 4A》單元 6　空間中的直線

類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 12　空間中的平面與直線 P129 例 13

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 13　空間中的平面與直線 P256 範例 8

解題觀念： 與直線相關的距離

答　　案： $5\sqrt{2}$

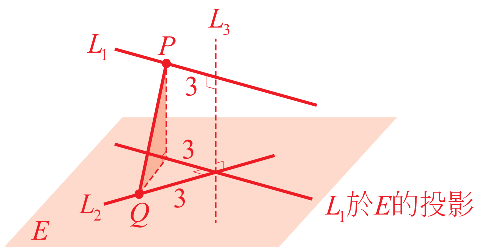
解　　析： 取 L_1 方向向量 $\overrightarrow{l_1}=(1,-1,1)$，

L_2 方向向量 $\overrightarrow{l_2}=(2,1,-1)$，

$\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_2}=(0,3,3)\,/\!/\,(0,1,1)$，

設包含 L_2 且平行 L_1 的平面 E 為 $y+z=k$，

L_2 上一點 $(2,5,6)$ 代入得 $k=11$，



則 $d(L_1,L_2)=d\left((1,1,2),y+z=11\right)=\dfrac{|1+2-11|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$，

因為 $\overrightarrow{l_1}\cdot\overrightarrow{l_2}=2-1-1=0$，所以 $\overrightarrow{l_1}\perp\overrightarrow{l_2}$，

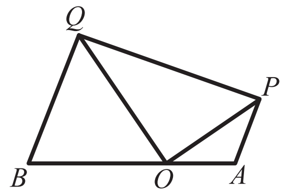
$\overline{PQ}=\sqrt{3^2+3^2+\left(d(L_1,L_2)\right)^2}=\sqrt{3^2+3^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=5\sqrt{2}$。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20題為題組

坐標平面上O為原點，給定$A(1,0)$、$B(-2,0)$兩點。另有兩點P、Q在上半平面，且滿足$\overline{AP}=\overline{OA}$、$\overline{BQ}=\overline{OB}$、$\angle POQ$為直角，如圖所示。令$\angle AOP=\theta$。根據上述，試回答下列問題。



18 線段$\overline{OP}$長為下列哪一選項？（單選題，3 分）

(1) $\sin\theta$　(2) $\cos\theta$　(3) $2\sin\theta$　(4) $2\cos\theta$　(5) $\cos 2\theta$

出　　處： 龍騰版《數學 2》單元 10　直角三角形的三角比

類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 8　三角函數　P16 例 13

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 9　三角比　P161 範例 1

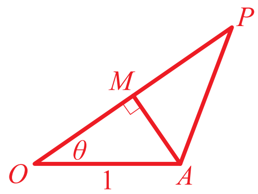
解題觀念： 銳角三角比

答　　案： (4)

解　　析： 作$\overline{AM}\perp\overline{OP}$交$\overline{OP}$於$M$，

因為$\overline{OA}=\overline{AP}$，所以$M$為$\overline{OP}$中點，

$\overline{OP}=2\overline{OM}=2\overline{OA}\cos\theta=2\cos\theta$，故選(4)。



19 若$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求點Q的坐標，並說明$\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。（非選擇題，6 分）

出　　處： 龍騰版《數學 2》單元 11　廣義角三角比與極坐標

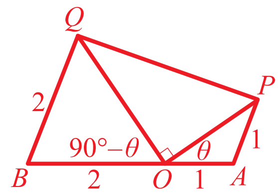
《【新關鍵】數學 1-2 冊學測總複習講義》單元 7　三角比

類似考題： 《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 9　三角比　P166 範例 4

解題觀念： 廣義角三角比

答　　案： $Q\left(-\frac{36}{25},\frac{48}{25}\right)$；說明詳見解析

解　　析： $\angle BOQ=180^\circ-90^\circ-\theta=90^\circ-\theta$，



$\overline{OQ}=2\overline{OB}\cos(90^\circ-\theta)=2\times2\times\sin\theta=\frac{12}{5}$，

令 $Q(x,y)$，

則 $\begin{cases}x=\overline{OQ}\cos(90^\circ+\theta)=\frac{12}{5}\times(-\sin\theta)=-\frac{36}{25}\\ y=\overline{OQ}\sin(90^\circ+\theta)=\frac{12}{5}\times\cos\theta=\frac{48}{25}\end{cases}\Rightarrow Q\left(-\frac{36}{25},\frac{48}{25}\right)$，

$\overline{OP}=2\cos\theta=\frac{8}{5}$，

$P\left(\overline{OP}\cos\theta,\overline{OP}\sin\theta\right)\Rightarrow P\left(\frac{32}{25},\frac{24}{25}\right)$

$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{32}{25}-1,\frac{24}{25}-0\right)=\left(\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right)$，

$\overrightarrow{BQ}=\left(-\frac{36}{25}-(-2),\frac{48}{25}-0\right)=\left(\frac{14}{25},\frac{48}{25}\right)=2\overrightarrow{AP}$。

20　（承 19 題）試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。（非選擇題，6 分）

出　　處： 龍騰版《數學 3A》單元 3　三角的和差角公式

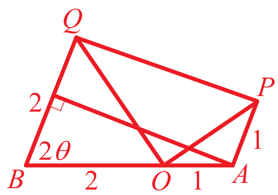
類似考題： 《【新關鍵】數學 3A-4A 冊學測總複習講義》單元 8　三角函數　P64 例 8

《【好好學】數學 A 學測總複習講義》單元 10　三角函數　P189 類題 2

解題觀念： 倍角公式

答　　案： $\frac{72}{25}$；$\frac{108}{25}$

解　　析： 因為 $\angle B=180^\circ-(90^\circ-\theta)-(90^\circ-\theta)=2\theta$，



所以 $d\left(A,\overleftrightarrow{BQ}\right)=\overline{AB}\sin2\theta=3\times2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{72}{25}$，

又 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$，所以 $\overline{BQ}\,//\,\overline{AP}$，

即四邊形 $PABQ$ 為一梯形，

故所求面積 $=\dfrac{(1+2)\times\frac{72}{25}}{2}=\frac{108}{25}$。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n\left(2a+(n-1)d\right)}{2}$

   首項為 a，公比為 r（$r\neq 1$）的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

   $$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 X：$x_1,x_2,\ldots,x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$

   標準差 $\sigma_x=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1-\mu_X\right)^2+\left(x_2-\mu_X\right)^2+\cdots+\left(x_n-\mu_X\right)^2\right]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2\right)-n\mu_X{}^2\right]}$

5. 二維數據 (X,Y)：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\left(x_1-\mu_X\right)\left(y_1-\mu_Y\right)+\left(x_2-\mu_X\right)\left(y_2-\mu_Y\right)+\cdots+\left(x_n-\mu_X\right)\left(y_n-\mu_Y\right)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-\mu_X\right)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\sqrt{3}\approx 1.732,\sqrt{5}\approx 2.236,\sqrt{6}\approx 2.449,\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010,\log 3\approx 0.4771,\log 5\approx 0.6990,\log 7\approx 0.8451$