

封面插圖以淺綠色為背景，上方有紅色的「111年」旗幟。中央偏上位置有「分科測驗最前線」的大字標題，下方則是「數學甲科」的副標題。副標題下方標註了編著者「家齊高中 黃峻棋老師 編著」。右側有一個女孩在雲海中揮手的插圖，左側則有飄浮的紙張和幾何圖形。

111年

分科測驗最前線

數學甲科

家齊高中 黃峻棋老師 編著

龍騰戰地記者報導

新課綱第一屆的考試總會引起大眾較多的關注。學測如此，分科測驗也是這樣。以分科測驗來說，除了制度上的爭議不斷之外，內容的大幅增加，對學生來說更是一大負擔，更何況教學的時數比以前更少。

雖然考試的內容包含高一、高二（3A、4A）和高三選修數學甲的全部內容，但試想，在有限的時間（80 分鐘）內，大約 15~18 題的試題要考完全部的內容，「教材內容的統整」應該是同學們的致勝關鍵。

大考
風向球
P.3

試題
大剖析
P.6



62001N2/D/000000

發行人：李枝昌
發行所：龍騰文化事業股份有限公司
網址：<https://www.ltedu.com.tw>

電話：02-22982933
傳真：02-22989766
出刊日：111年7月20日

龍騰文化
肯定自己 > 肯定不同

學測複習 我們從不缺席

數學科講義全書系 高三唯一首選



題型整理
最完整的複習講義

素養題、混合題
最多最完整



針對數B學生
量身打造



111 年 分科測驗最前線

大考風向球

111 分科測驗命題特色

一、111 分科測驗試題分布

我把考試的內容統整如下：

1. 極限：(1)數列的極限；(2)函數的極限。
2. 方程式與不等式：(1)多項式方程式與不等式；(2)指、對數方程式與不等式；(3)三角方程式與不等式。
3. 最大值與最小值：(1)算幾不等式、柯西不等式、三角不等式；(2)二次函數的極值；(3)正、餘弦函數的疊合；(4)多項式函數的極值（微分）。
4. 平面幾何：(1)三角比；(2)直線與圓；(3)平面向量；(4)二次曲線；(5)矩陣（平面上的線性變換）。
5. 複數平面：(1)複數的幾何意涵；(2)棣美弗定理與複數的 n 次方根。
6. 多項式函數的微分：(1)導數與導函數；(2)多項式函數的圖形；(3)多項式函數的極值；(4)函數圖形與多項式方程式根的性質。
7. 多項式函數的積分：(1)上和與下和；(2)多項式函數的積分（微積分基本定理）；(3)定積分及其應用（面積與體積）。
8. 空間幾何：(1)空間向量；(2)空間中的平面與直線。
9. 機率與統計：(1)排列、組合與機率；(2)數據分析；(3)隨機變數與二項分布、幾何分布。

註：更詳盡的重點內容可參考「龍騰文化——【考前攻略】數學甲分科測驗 16 週」。

今年數學甲試題的分布如下表（虛章名稱依據龍騰課本設定）。

冊	虛章	名稱	題號	配分	小計
一	1	數與式		0	8
	2	直線與圓	5	4	
	3	多項式函數	13	4	
二	1	數列與級數	1	3	18
	2	排列、組合	10	6	
	3	機率		0	
	4	數據分析		0	
	5	三角比	5, 7, 12, 15	9	
三	1	三角函數	11	3	7
	2	指數、對數函數	1	3	
	3	平面向量	15	1	
四	1	空間向量	3	6	22
	2	空間中的平面與直線		0	
	3	條件機率與貝氏定理		0	
	4	矩陣	2, 5, 6	16	
甲上	1	極限	8	8	24
	2	微分	15, 16, 17	10	
	3	積分	14	6	
甲下	1	機率與統計	9	6	21
	2	複數	4, 11	11	
	3	二次曲線	7	4	

註：若命題跨 2 個以上的單元，則會在跨到的單元個別計入一題，並將配分平均分配到所跨單元。

二、試題分析

整份試題的特色如下：

1. 高一、高二內容配分大約占 55 分；高三的內容配分大約占 45 分。
2. 高一、高二的考題相對簡單，例如單選題 1, 2, 3；多選題 5, 6；選填題 10。這些題目大部分的考生應該都能掌握。推估均標大約在 40 分左右（原始分數）。
3. 高三的考題具有高鑑別度。多選題 4；選填題 9, 11 屬於難易適中的試題。其中選填題 11 命題相當活潑，利用複數絕對值的幾何意義和棣美弗定理才能順利解出。推估前標大約在 60 分左右（原始分數）。

4. 多選題 7 偏難，雖然拋物線的定義簡單，三角比的概念也不難，可是解題過程中必須用到同位角、內錯角這些幾何觀念，恐怕多數的同學無法全部答對。
5. 多選題 8 偏難，極限的觀念本來就不容易，如果又要舉反例說明選項錯誤，大部分的同學應該半寫半猜。
6. 混合題題組（12～14 題）偏難，這題大概只有第 12 題可拿到分數，第 13，14 題如果無法看出這個立體圖形的截面，應該很難拿到分數。
7. 非選擇題題組（15～17 題）中偏難，寫到這裡，如果同學時間夠的話，第 15，16 題應該可以拿到分數，但第 17 題計算量偏多（估計），很難全部拿分。推估頂標大約在 70 分左右（原始分數）。
8. 意外的亮點？三角函數（疊合）沒有出現考題，取而代之的是選填題第 10 題的排列組合。是故意嗎？不過排列組合的觀念應該是在準備機率的過程中就會牢記的。

從分科試題看 112 學測

如果把數學甲這份試題和今年學測數學 A 試題拿來比較的話，個人覺得數學甲這份試題好很多，理由有幾點：

1. 數學甲這份試題有較多的基礎題（大約 40～50 分），參加考試的同學只要熟讀教材內容，應該可以拿到基本分數。
2. 對於前段或頂尖的學生來說，這份題目鑑別度高，級分應該可以適度拉開。
3. 數學甲重理解，沒有太長的題幹閱讀，也沒有太複雜的計算。雖然題目稍多，時間不夠，但是解題速度也是另類的鑑別度。

因此，整份試題可說是難易適中，鑑別度高的試題。

未來命題趨勢

從第一屆的學測和分科測驗來看，未來的考試同學務必注意下列幾個關鍵點：

1. 課綱中的新單元內容務必精讀熟練。例如三次函數圖形的特徵、平面上的比例（數 B）、球面坐標（數 B）、平面上的線性變換（數 A）、幾何分布等。
2. 跨單元的統整試題（包含混合題）一定要多練，這種題型應該是重中之重，高低分的分水嶺。
3. 新課綱強調的素養能力。包括閱讀理解、幾何作圖（善用工具）等，平時就要培養這些能力。

羅馬不是一天造成的，不要忽略基礎觀念的培養，熟練基礎觀念才能開始把跨單元的題型連結起來。在期待命題委員能命出難易適中的題目之前，我們要先把自己的能力充實好。

加油了！祝福各位考生考試順利。



分科測驗最前線

試題大剖析

(此份試卷解題係依據大學考試中心於 111 年 7 月 11 日所公告之答案為主)

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1 設 a_1, a_2, a_3, a_4 是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令 $b = \sum_{n=1}^3 \log_{a_n} a_{n+1}$ ，試選出正確的選項。

(1) $2 < b \leq 3$ (2) $3 < b \leq 4$ (3) $4 < b \leq 5$ (4) $5 < b \leq 6$ (5) $6 < b \leq 7$

出處：龍騰版《數學 2》單元 1 數列與遞迴關係、《數學 3A》單元 6 對數與對數律

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 3 週 焦點 2 P34 範例 9

解題觀念：等比數列、對數律（換底公式）

答案：(3)

解析：由題意知 $a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_n = 10 \times 10^{n-1} = 10^n$ ，

$$\text{所以 } b = \sum_{n=1}^3 \log_{a_n} a_{n+1} = \log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_4$$

$$= \frac{\log a_2}{\log a_1} + \frac{\log a_3}{\log a_2} + \frac{\log a_4}{\log a_3}$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{12+9+8}{6} = \frac{29}{6},$$

所以 $4 < b \leq 5$ 。故選(3)。

2

設 c 為實數使得三元一次方程組 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + cy + 3z = 1 \\ 3x - 3y + cz = 0 \end{cases}$ 無解。試選出 c 之值。

(1) -3 (2) -2 (3) 0 (4) 2 (5) 3

出處：龍騰版《數學 4A》單元 8 三元一次聯立方程式

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 12 週 P152 經典試題 4

解題觀念：三元一次聯立方程式的解

答案：(2)

解析：由高斯消去法（矩陣列運算）可得

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & c & 3 & 1 \\ 3 & -3 & c & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-3) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & c+2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-3 & 0 \end{bmatrix},$$

由選項中得知當 $c = -2$ 時，聯立方程式無解。故選(2)。

3

坐標空間中 O 為原點，點 P 在第一卦限且 $\overline{OP} = 1$ 。已知直線 OP 與 x 軸有一夾角為 45° ，且 P 點到 y 軸的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。試選出點 P 的 z 坐標。

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

出處：龍騰版《數學 4A》單元 1 空間概念、單元 3 空間向量的運算

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 13 週 P165 經典試題 1

解題觀念：空間坐標系、空間向量的運算

答案：(4)

解析：設 $P(x, y, z)$ ，其中 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $z > 0$ ，

因為 $\overline{OP} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ ，所以 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \dots\dots ①$ ，

因為 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ 與 x 軸的夾角為 45° ，令 x 軸方向向量 $\vec{v} = (1, 0, 0)$ ，

$$\cos 45^\circ = \frac{\left| \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \overrightarrow{OP} \right| \left| \vec{v} \right|} = \frac{x}{1}, \text{ 所以 } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots ②,$$

$$\text{又 } P \text{ 到 } y \text{ 軸的距離} = \sqrt{x^2 + z^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x^2 + z^2 = \frac{6}{9}, \frac{1}{2} + z^2 = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } z^2 = \frac{1}{6}, z = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \dots\dots ③,$$

由 ③ 得 P 點的 z 坐標為 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。故選(4)。

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

- 4 設多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + k$ 、 $g(x) = x^2 + ax + 1$ ，其中 k, a 為實數。已知 $g(x)$ 整除 $f(x)$ ，且方程式 $g(x) = 0$ 有虛根。試選出為方程式 $f(x) = 0$ 的根之選項。

(1) -3 (2) 0 (3) 1 (4) $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ (5) $\frac{3+\sqrt{-5}}{2}$

出處：龍騰版《選修數學甲（下）》單元 3 複數與多項式方程式

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 3 週 焦點 1 P30 範例 3

解題觀念：多項式方程式的根

答案：(1)(4)

解析：由題意知 $f(x) = g(x)Q(x)$

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - 2x + k = (x^2 + ax + 1)(x + k) \quad (\text{比較領導係數與常數項}),$$

$$\text{所以 } x^3 + 2x^2 - 2x + k = x^3 + (a+k)x^2 + (ak+1)x + k,$$

$$\text{得 } \begin{cases} a+k=2 \\ ak+1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2-k \\ ak=-3 \end{cases}, \text{ 所以 } (2-k)k=-3$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0, \quad (k-3)(k+1) = 0, \text{ 所以 } k=3 \text{ 或 } -1。$$

$$\text{又 } g(x) = 0 \text{ 有虛根} \Rightarrow x^2 + ax + 1 = 0 \text{ 有虛根},$$

$$\text{所以 } a^2 - 4 < 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) < 0, \quad -2 < a < 2,$$

$$\text{所以當 } k=3 \text{ 時, } a=-1 \text{ (合), 當 } k=-1 \text{ 時, } a=3 \text{ (不合),}$$

$$\text{得 } f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ 或 } x = -3。$$

故選(1)(4)。

5

坐標平面上有一圖形 Γ ，其方程式為 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 101$ 。試選出正確的選項。

- (1) Γ 與 x 軸負向、 y 軸負向分別交於 $(-9, 0)$ 、 $(0, -9)$
- (2) Γ 上 x 坐標最大的點是點 $(11, 0)$
- (3) Γ 上的點與原點距離的最大值為 $\sqrt{2} + \sqrt{101}$
- (4) Γ 在第三象限的點之極坐標可用 $[9, \theta]$ 表示，其中 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
- (5) Γ 經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示

出處：龍騰版《數學 1》單元 6 圓方程式、《數學 2》單元 11 廣義角三角比與極坐標、
《數學 4A》單元 10 矩陣的應用

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 9 週 焦點 3 P114 範例 5

解題觀念：圓方程式、極坐標、線性變換

答案：(1)(3)(5)

解析：已知 $\Gamma: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 101$ ，所以圖形為一圓，圓心 $A(1, 1)$ ，半徑 $\sqrt{101}$ 。

(1) $\bigcirc$ ：令 $x = 0$ ， $(y-1)^2 = 100$ ， $y = -9$ 或 11 ，

令 $y = 0$ ， $(x-1)^2 = 100$ ， $x = -9$ 或 11 ，

所以 Γ 與 x 軸負向交於 $(-9, 0)$ ，與 y 軸負向交於 $(0, -9)$ 。

(2) $\times$ ：反例，當 $y = 0.5 \Rightarrow (x-1)^2 = 100.75$ ， x 的值可大於 11 。

(3) $\bigcirc$ ：示意圖如右圖，

Γ 上的點與原點距離的最大值為

$\overline{OA} + \overline{AB} = \sqrt{2} + \sqrt{101}$ ($\overline{AB}$ 為圓半徑)。

(4) $\times$ ：承(1)， Γ 與 x 軸負向，

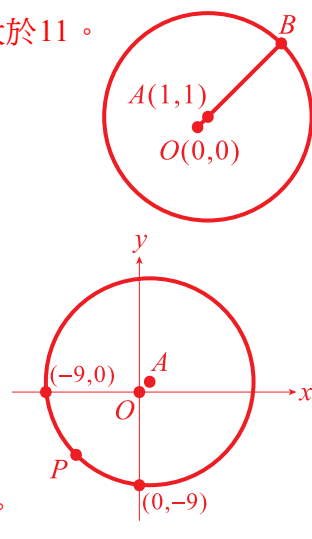
y 軸負向的交點為 $(-9, 0)$ ， $(0, -9)$ ，

但 Γ 在第三象限的點 $P(x, y)$ 與原點的距離不一定等於 9 (因為 $\sqrt{101} - \sqrt{2} \leq \overline{OP} \leq \sqrt{101} + \sqrt{2}$)，

所以 P 點的極坐標不一定為 $[9, \theta]$ ， $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 。

(5) $\bigcirc$ ： Γ 經過旋轉之後仍為圓方程式，所以不含 xy 項。

故選(1)(3)(5)。



假設 2 階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0)$ ， $A(1,0)$ ， $B(0,1)$ 分別映射到 $O(0,0)$ ， $A'(3,\sqrt{3})$ ， $B'(-\sqrt{3},3)$ ，並將與原點距離為 1 的點 $C(x,y)$ 映射到點 $C'(x',y')$ 。試選出正確的選項。

- (1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ (2) $\overline{OC'} = 2\sqrt{3}$ (3) $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角為 60° (4) 有可能 $y = y'$
 (5) 若 $x < y$ 則 $x' < y'$

出處：龍騰版《數學 4A》單元 10 矩陣的應用

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 12 週 焦點 3 P149 範例 2

解題觀念：平面上的線性變換

答案：(2)(4)

解析：由題意知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ，所以 $a = 3$ ， $c = \sqrt{3}$ ，

且 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$ ，所以 $b = -\sqrt{3}$ ， $d = 3$ ，

故 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$ 。

(1) $\times$ ： $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12$ 。

(2) $\circ$ ： $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - \sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x + 3y \end{bmatrix}$ ，

因為 $\overline{OC} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ， $x^2 + y^2 = 1$ ，

所以 $\overline{OC'} = \sqrt{(3x - \sqrt{3}y)^2 + (\sqrt{3}x + 3y)^2} = \sqrt{12x^2 + 12y^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 。

(3) $\times$ ： $\overrightarrow{OC} = (x, y)$ ， $\overrightarrow{OC'} = (x', y') = (3x - \sqrt{3}y, \sqrt{3}x + 3y)$ ，

所以 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC'}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OC'}|} = \frac{3(x^2 + y^2)}{1 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $\theta = 30^\circ$ 。

(4) $\circ$ ：承(2)， $y' = \sqrt{3}x + 3y$ ，若 $y' = y \Rightarrow y = y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ，

且 $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{3}{4}x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}$ （代入驗算合），

所以 y 可能等於 y' 。

(5) $\times$ ：反例，若 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x' = -\sqrt{3}$ ， $y' = -3$ ，則 $x' > y'$ 。

故選(2)(4)。

假設 A, B 為一拋物線 Γ 上兩點且其連線段通過 Γ 的焦點 F 。設 A, F, B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A', F', B' 。試選出等於 $\frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}$ 的選項。(注意：此示意圖僅說明

各點的相關位置，各點間距離關係並不正確)

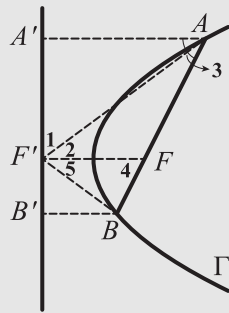
(1) $\tan \angle 1$ ，其中 $\angle 1 = \angle A'F'A$

(2) $\sin \angle 2$ ，其中 $\angle 2 = \angle AF'F$

(3) $\sin \angle 3$ ，其中 $\angle 3 = \angle A'AF$

(4) $\cos \angle 4$ ，其中 $\angle 4 = \angle F'FB$

(5) $\tan \angle 5$ ，其中 $\angle 5 = \angle FF'B$



出處：龍騰版《數學 2》單元 10 直角三角形的三角比、《選修數學甲(下)》單元 5 拋物線

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 11 週 P139 經典試題 8

解題觀念：拋物線的定義、三角比

答案：(3)(5)

解析：(1) $\times$ ：因為 $\triangle AA'F'$ 為直角三角形，所以 $\frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}} = \frac{1}{\tan \angle 1}$ 。

(2) $\times$ ： $\angle 2 = \angle AF'F = \angle A'AF'$ (內錯角相等)，

$$\text{所以 } \tan \angle 2 = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}。$$

(3) $\circ$ ：如圖， $\overline{AF} = \overline{AA'}$ ， $\overline{FH} = \overline{A'F'}$ ，

$$\text{所以 } \sin \angle 3 = \frac{\overline{FH}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{AA'}}。$$

(4) $\times$ ：承(3)，因為 $\angle 4 = \angle 3$ (同位角相等)，

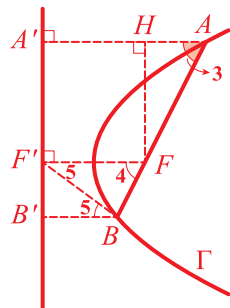
$$\text{所以 } \frac{\overline{A'F'}}{\overline{AA'}} = \sin \angle 3 = \sin \angle 4。$$

(5) $\circ$ ：因為 $\angle 5 = \angle FF'B = \angle F'BB'$ (內錯角相等)，

$$\text{所以 } \tan \angle 5 = \frac{\overline{B'F'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{B'F'}}{\overline{BF}} \quad (\text{因為 } \overline{BB'} = \overline{BF}, \text{ 拋物線的定義}),$$

$$\text{又 } \frac{\overline{B'F'}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{AA'}}。$$

故選(3)(5)。



假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，試選出正確的選項。

- (1) $b_n < 6 - \frac{4n-1}{n}$ (2) $b_n > \frac{4n-1}{2n}$ (3) 數列 $\langle b_n \rangle$ 有可能發散 (4) $a_{10000} < 6.1$ (5) $a_{10000} > 5.9$

出處：龍騰版《選修數學甲（上）》單元1 數列的極限與無窮等比級數

類似考題：【考前攻略】數學甲 第1週 焦點1 P4 範例5

解題觀念：數列的極限

答案：(2)(5)

解析：(1) $\times$ ：由題意 $b_n < a_n - \frac{4n-1}{n}$ ， a_n 的值不一定等於6。

$$\text{反例，} b_n = 6 - \frac{4n-1}{n}, a_n = 6 + \frac{1}{n},$$

$$\text{滿足 } b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6 \text{ 但 } b_n \not> 6 - \frac{4n-1}{n}。$$

$$(2) \bigcirc：\text{因為 } b_n + \frac{4n-1}{n} < 3b_n \Rightarrow 2b_n > \frac{4n-1}{n}, \text{ 所以 } b_n > \frac{4n-1}{2n}。$$

(3) $\times$ ：承(1)(2)，

$$\text{因為 } b_n < a_n - \frac{4n-1}{n} \text{ 且 } b_n > \frac{4n-1}{2n},$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n} = 4, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n} = 2,$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

$$(4) \times：\text{反例，} a_n = \frac{6n+20000}{n}, \text{ 則 } a_{10000} = 8 > 6.1。$$

$$(5) \bigcirc：\text{因為 } a_n > b_n + \frac{4n-1}{n} \text{ 且 } b_n > \frac{4n-1}{2n}$$

$$\Rightarrow a_n > \frac{4n-1}{2n} + \frac{4n-1}{n} = \frac{12n-3}{2n}$$

$$\Rightarrow a_{10000} > 6 - \frac{3}{20000} > 5.9。$$

故選(2)(5)。

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9

大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有 5 支籤、其中只有 1 支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取 3 回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。

我們可將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X) =$

$\frac{(9-1)(9-2)}{9}$ 。（四捨五入到整數位）

出處：龍騰版《選修數學甲（下）》單元 2 二項分布與幾何分布

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 15 週 焦點 3 P189 範例 7

解題觀念：幾何分布的期望值

答案：14

解析：每位顧客中獎的機率 P 為 $\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^2}_{\text{第 1 次第 2 次都抽中大吉}} + \underbrace{\frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2}_{\text{第 1 次不中，第 2 次第 3 次抽中大吉}} = \frac{1}{25} + \frac{4}{125} = \frac{9}{125}$ ，

所以 $E(X) = \frac{1}{P} = \frac{125}{9} = 13.8\cdots \approx 14$ 。

10

老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這4天，發完國、英、數、社、自共5張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子一定要在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子不要在週二發出。依此要求，學藝共有 $\frac{(10-1)(10-2)}{2}$ 種安排方式。

出處：龍騰版《數學2》單元4 排列、單元5 組合

類似考題：【考前攻略】數學甲 第15週 焦點1 P181 範例2

解題觀念：排列組合

答案：42

解析：由題意知，國文卷一定要在星期一發放，且英文卷不能在星期二發放，討論如下：

$$\textcircled{1} \begin{array}{cc} \text{一、二、三、四} & \Rightarrow \frac{3!}{\text{國英}} = 6。 \\ & \text{其他3科排二、三、四} \end{array}$$

$$\textcircled{2} \begin{array}{cc} \text{一、二、三、四} & \Rightarrow \frac{3!}{\text{國}} + \frac{3!}{\text{英}} + \frac{3 \times 2!}{\text{星期二排兩科或星期四排兩科}} = 18。 \\ & \text{排一、二、四 排二、三、四} \end{array}$$

$$\textcircled{3} \begin{array}{cc} \text{一、二、三、四} & \Rightarrow \frac{3!}{\text{國}} + \frac{3!}{\text{英}} + \frac{3 \times 2!}{\text{星期二排兩科或星期三排兩科}} = 18。 \\ & \text{排一、二、三 排二、三、四} \end{array}$$

所以共有 $6+18+18=42$ （種）。

11

在複數平面上，複數 z 在第一象限且滿足 $|z|=1$ 以及 $\left| \frac{-3+4i}{5} - z^3 \right| = \left| \frac{-3+4i}{5} - z \right|$ ，其中

$i = \sqrt{-1}$ 。若 z 的實部為 a 、虛部為 b ，則 $a = \frac{\sqrt{11-1}}{11-2}$ 、 $b = \frac{(11-3)\sqrt{11-4}}{11-5}$ 。（化為最簡根式）

出處：《數學 3A》單元 3 三角的和差角公式、龍騰版《選修數學甲（下）》單元 4 複數的幾何意涵

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 6 週 P73 經典試題 16

解題觀念：複數的絕對值、棣美弗定理、半角公式

答案： $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 、 $b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：作簡圖，

因為 $|z|=1$ ，

令 $z = \cos \theta + i \sin \theta = a + bi$ ， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，

所以 $z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$ 。

因為 $\angle zOz^3 = 2\theta$ ，

且 $\triangle Ozw \cong \triangle Owz^3$ ，

所以 $\angle zOw = \angle wOz^3 = \theta$ 。

因為 $\left| \frac{-3+4i}{5} - z^3 \right| = \left| \frac{-3+4i}{5} - z \right|$ ，

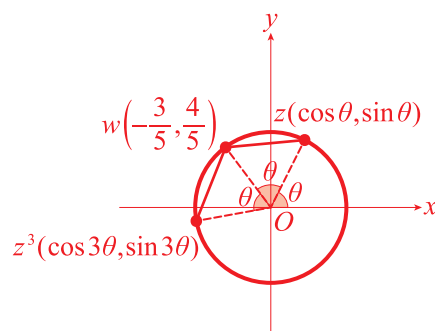
表示點 $w\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 到 z^3 點和到 z 點的距離相等，

所以 $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$ ， $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$ 。

$$\text{故 } \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}，$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}。$$

$$\text{得 } a = \frac{\sqrt{5}}{5}，b = \frac{2\sqrt{5}}{5}。$$

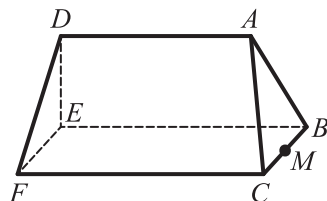


第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選填題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

有一積木（如圖），其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形， $BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在直線 BC 的投影為 M 且在平面 $BCFE$ 的投影為 P 。已知 $\overline{AD} = 30$ 、 $\overline{CF} = 40$ 、 $\overline{AP} = 15$ 且 $\overline{BC} = 10$ 。將平面 $BCFE$ 置於水平桌面上，且將與 $BCFE$ 平行的平面稱為水平面。試回答下列問題。



12 利用 $\overline{AD}$ 在平面 $BCFE$ 的投影長為 30，可得 $\tan \angle AMP = \textcircled{12}$ 。（選填題，2 分）

出處：龍騰版《數學 2》單元 10 直角三角形的三角比

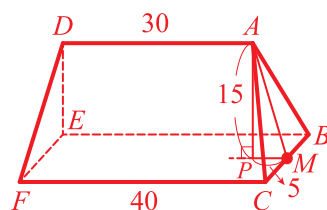
【考前攻略】數學甲 第 4 週 焦點 1

解題觀念：三角比

答案：3

解析： $\overline{MP} = \frac{40-30}{2} = 5$ ，

$$\text{所以 } \tan \angle AMP = \frac{\overline{AP}}{\overline{MP}} = \frac{15}{5} = 3。$$



- 13 令 Q 為 $\overline{FC}$ 上一點，滿足 $\overrightarrow{AQ}$ 與 $\overrightarrow{DF}$ 平行。利用 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACQ$ 為全等三角形，證明若水平面 W 介於 A, P 之間且與 A 的距離為 x ，則 W 與此積木所截的矩形區域之面積為 $20x + \frac{4}{9}x^2$ 。(非選擇題，4 分)

出處：龍騰版《數學 1》單元 8 多項式的除法原理

【考前攻略】數學甲 第 3 週 焦點 1

解題觀念：多項式的基本概念

答案：見解析

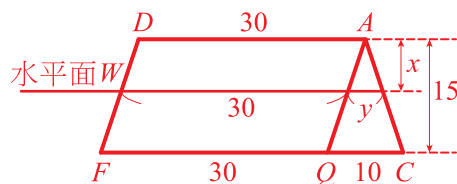
解析：由相似三角形知 $\frac{y}{10} = \frac{x}{15}$ ，得 $y = \frac{2}{3}x$ ，

所以水平面的長 $= 30 + y = 30 + \frac{2}{3}x$ 。

同理 $\frac{z}{10} = \frac{x}{15}$ ，得 $z = \frac{2}{3}x$ ，

所以水平面的寬 $= \frac{2}{3}x$ 。

故矩形面積 $= \left(30 + \frac{2}{3}x\right) \times \frac{2}{3}x = 20x + \frac{4}{9}x^2$ 。



- 14 將線段 $\overline{AP}$ 的 n 等分點沿著向量 $\overrightarrow{AP}$ 的方向依序設為 $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = P$ 。在每一個分段 $\overline{P_{k-1}P_k}$ ，考慮以通過 P_k 的水平面與此積木所截的矩形為底、 $\overline{P_{k-1}P_k}$ 為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和（不需化簡），且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。(非選擇題，6 分)

出處：龍騰版《選修數學甲（上）》單元 5 積分、單元 6 積分的應用

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 8 週 焦點 3 P101 範例 7

解題觀念：黎曼和、定積分求體積

答案：見解析，體積 2750

解析：將 $\overline{AP}$ 分割成 n 等分，每一等分高度 $= \frac{15}{n}$ ，

得積木體積的黎曼和

$$= \left[20 \times \left(\frac{15}{n} \times 1 \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{15}{n} \times 1 \right)^2 \right] \times \frac{15}{n} + \left[20 \times \left(\frac{15}{n} \times 2 \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{15}{n} \times 2 \right)^2 \right] \times \frac{15}{n} + \dots + \left[20 \times \left(\frac{15}{n} \times n \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{15}{n} \times n \right)^2 \right] \times \frac{15}{n},$$

$$\text{所以體積 } V = \int_0^{15} \left(20x + \frac{4}{9}x^2 \right) dx = \left(10x^2 + \frac{4}{27}x^3 \right) \Big|_0^{15} = 2250 + 500 = 2750.$$

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9$ 以及 $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ 。若令 $|\vec{a}| = x$ ，其中 $1 < x < 8$ ，且令 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角為 θ ，則利用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos \theta$ 以 x 表示成 $\frac{c}{9x - x^2} + d$ ，其中 c 、 d 為常數且 $c > 0$ 。令此表示式為 $f(x)$ ，且其定義域為 $\{x | 1 < x < 8\}$ 。試回答下列問題。

15 求 $f(x)$ 及其導函數。(非選擇題，4 分)

出 處：龍騰版《數學 2》單元 12 三角比的性質、《數學 3A》單元 8 平面向量、
《選修數學甲（上）》單元 3 微分、單元 4 函數性質的判定
【考前攻略】數學甲 第 10 週 焦點 1

解題觀念：餘弦定理、向量表示法、微分公式

答 案： $f(x) = \frac{16}{9x - x^2} - 1$ ， $f'(x) = \frac{-144 + 32x}{(9x - x^2)^2}$

解 析：設 $|\vec{a}| = x$ ，

因為 $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9 \Rightarrow |\vec{b}| = 9 - x$ ，

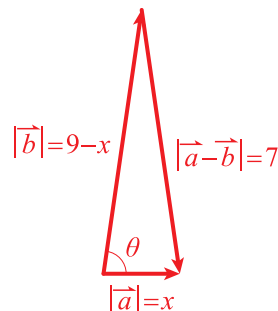
又 $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ ，

作簡圖，

由餘弦定理可得

$$\begin{aligned} f(x) = \cos \theta &= \frac{x^2 + (9-x)^2 - 7^2}{2x(9-x)} = \frac{2x^2 - 18x + 32}{2x(9-x)} = \frac{x^2 - 9x + 16}{x(9-x)} \\ &= \frac{16 - x(9-x)}{x(9-x)} = \frac{16}{x(9-x)} - 1 = \frac{16}{9x - x^2} - 1, \end{aligned}$$

所以 $f'(x) = \frac{-16(9-2x)}{(9x-x^2)^2} = \frac{-144+32x}{(9x-x^2)^2}$ 。



16

說明 $f(x)$ 在定義域中遞增、遞減的情況。並說明 x 為多少時 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夾角 θ 最大。(非選擇題，4 分)

出處：龍騰版《選修數學甲（上）》單元 4 函數性質的判定

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 7 週 P87 經典試題 3

解題觀念：函數的增減性

答案：見解析

解析：因為 $1 < x < 8 \Rightarrow (9x - x^2)^2$ 恆大於 0，

所以當 $-144 + 32x > 0$ 時，即 $32x > 144$

$\Rightarrow x > \frac{9}{2}$ 時， $f'(x) > 0$ ，即 $f(x)$ 為遞增函數。

當 $-144 + 32x < 0$ 時，即 $x < \frac{9}{2}$ 時， $f'(x) < 0$ ，即 $f(x)$ 為遞減函數。

又當 $x = \frac{9}{2}$ 時， $\cos \theta$ 有最小值 $= -\frac{17}{81}$ ，此時 θ 角最大。

17

利用 $f(x)$ 的一次估計（一次近似），求當 $x = 4.96$ 時， $\cos \theta$ 約為多少？（非選擇題，4 分）

出處：龍騰版《選修數學甲（上）》單元 3 微分

類似考題：【考前攻略】數學甲 第 7 週 焦點 4 P86 範例 7

解題觀念：一次估計

答案：-0.2016

解析：因為 $f(x) = \frac{16}{9x - x^2} - 1$ ，

又 $9x - x^2 = -(x-5)^2 - (x-5) + 20$ ，

即 $9x - x^2$ 在 $x = 5$ 附近的一次近似函數為 $-(x-5) + 20$ ，

所以當 $x = 4.96$ 時，一次近似值為 $-(-0.04) + 20 = 20.04$ ，

故所求 $\approx \frac{16}{20.04} - 1 \approx -0.2016$ 。

【另解】

$f(5) = -0.2$ ， $f'(5) = 0.04$ ，

所以 $f(x)$ 在 $x = 5$ 的一次近似為 $f(5) + f'(5)(x-5) = 0.04(x-5) - 0.2$ ，

將 $x = 4.96$ 代入，一次近似值為 $0.04(4.96-5) - 0.2 = -0.2016$ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑）

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2 \right)}$

6. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線（迴歸直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

$\sin 23^\circ \approx 0.40$ ， $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\sin 53^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 23^\circ \approx 0.92$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.60$

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$

9. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

學測的事 就是我們的試

數學科試題教材全系列 總有好試發生



跟學測一模一樣的解題手感
題題錄製影音解題

