翰林 114分科測驗

試題分析

數學甲

一、前　言

114 學年的分科測驗於 114 年 7 月 11 日與 12 日舉行，此次測驗共有 3 萬 9190 人報考，比 113 學年，112 學年皆略減，但高於 111 學年的報考人數。其中以選考數甲的考生最多，有 2 萬 3950 人，占總報名人數的 61.11 %，而首次登場的數乙考科也有 1 萬 6955 人報名。以下筆者將綜合各教師解題團隊，考生意見與筆者的個人經驗，提供以下分析給讀者們參考。

二、試題分析

(一) 試卷架構與配分

首先針對本次試卷所對應之單元比重，以及 113 年分科測驗數學甲之各冊占分，比較整理如下表。

<table>
<tr><th>冊　別</th><th>單元名稱</th><th>題　型</th><th>難易度</th><th>分　數</th><th>114 年
分科測驗
各冊占分</th><th>113 年
分科測驗
各冊占分</th></tr>
<tr><td rowspan="4">第一冊</td><td>第一章
數與式</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">4 分</td><td rowspan="4">6 分</td></tr>
<tr><td>第二章
指數、對數</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第三章
多項式函數</td><td>非選 14</td><td>中</td><td>4</td></tr>
<tr><td>第四章
直線與圓</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">第二冊</td><td>第一章
數列與級數</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">6 分</td><td rowspan="4">18 分</td></tr>
<tr><td>第二章
數據分析</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第三章
排列組合與機率</td><td>單選 3</td><td>易</td><td>6</td></tr>
<tr><td>第四章
三角比</td><td>(多選 5)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

冊　別	單元名稱	題　型	難易度	分　數	114 年分科測驗各冊占分	113 年分科測驗各冊占分
第三冊 A	第一章 三角函數	單選 1	易	6	20 分	
		(多選 5)				
	第二章 指數與對數函數	多選 6	中	8		
	第三章 平面向量	選填 11	中	6		
第四冊 A	第一章 空間向量	(選項 10)			20 分	26 分
	第二章 空間中的平面與直線	單選 2	中偏易	6		
		選填 10	中	6		
	第三章 機率	非選 12	易	2		
	第四章 矩陣	選填 9	易	6		
選修數學甲(上)	第一章 極限與函數	多選 5	中偏易	8	24 分	20 分
	第二章 微分	多選 7	中偏難	8		
	第三章 積分	非選 16	中	2		
		非選 17	中偏難	6		
選修數學甲(下)	第一章 二次曲線	多選 4	易	8	26 分	30 分
	第二章 複數與多項式方程式	多選 8	難	8		
	第三章 機率統計	非選 13	易	4		
		非選 14	中偏易	6		

（若題目有跨多個章節者，屬次要概念之單元，則以括號表示之，且不納入分數計算）

試題分析

從試卷架構來看，此次分科測驗維持往年的設計，有 3 題單選題 (18 分)、5 題多選題 (40 分)、3 題選填題 (18 分) 及 6 題 (2 大題)的混合題或非選擇題 (24 分)。在各冊的配分上，今年的試卷與去年相比，更偏重在二、三年級分流之後的數學內容，一年級一二冊的內容僅占 10 分，而二年級的 3A 與 4A 各占 20 分，數甲上下與去年相同占了 50 分。由於今年首次加入數乙考科，或許為了區分不同類組的學生，以自然組考生為主的數學甲測驗題目，評量問題的出處也著重於二三年級分流之後的部分，這是否會是未來分科測驗的一個考試趨勢？值得我們多加留意與觀察。

單以各考題本身來看，今年試題依然遵循評量準則，每一類題都是由簡至難，讓考生在作答時可以較為輕鬆作答，很容易安排作答順序。筆者認為今年題目難易度與去年相當，整體偏易，沒有題意難理解的問題敘述，閱讀素養類的問題，像是單選的第 3 題與非選的 12～14 題的題目敘述也簡單易懂，即使較難的問題也可依題目線索破題。整份試題僅有多選題第 8 題較難解決，基本觀念好的考生有較大的機會取得高分。

（二）試題特色

1. 評量的核心皆重視基本觀念：

近年來的大考在命題的設計上，其實都緊扣著基本觀念在做評量，沒有繁雜的計算。考生只要觀念熟練，能依據題意給出的條件與所求問題概念方向，即可容易破題作答。例如單選 1 ，依照對稱概念或圖形的平移作圖，就可快速解題。即使是較難的選填題 11，也可循著向量加法的平行四邊形法，順利找到線性組合的解題方向。綜觀近年大考試題，無論學測還是分科測驗，熟練基本觀念才是解題的王道。

2. 出題多以整合或跨單元的綜合應用題目為主：

在今年的試題中，明顯可以看到跨單元的綜合應用題型較多，例如單選 3 結合幾何圖形的交點與排列組合的計算；多選 5 結合廣義角的三角比、數列以及極限單元；多選 8 結合複數、直線與三角；選填 10 結合空間概念與空間中的直線；非選 12～14 結合獨立事件、期望值與幾何分布；非選 15～17 結合多項式函數與積分。這些整合性的問題通常能測驗出學生基本概念的應用能力，通常也是較有鑑別度的題目類型。不過雖然混合了各單元的概念，無疑還是基本概念的掌握程度，在本次試題設計中，依照題意的條件就可從此概念著手，算是相當破題與延續下去推論解題的題目設計。

3. 空間幾何的圖像理解很重要，多選題應注意選項順序的引導：

今年的試題中，有兩題空間幾何的相關問題，單選 2 與選填 10。在單選 2 中，如果空間觀念好的話，容易理解或想像出在正立方體中的垂直關係，這個問題就可迎刃而解，反之，如果選擇以建立坐標系的代數方法，可能需要花費較多時間。而選填 10 的基本關鍵在於空間中兩「平行」直線的距離，如果沒想到從三垂線定理著手，而執著於空間中直線距離的代數方法，可能就會覺得相當不易解決。空間幾何的問題，一般都是臺灣高中生普遍覺得困難的題目，要憑空想像出立體的空間圖形與其中的幾何關係確實不易，有賴平常多加練習。

另外，大考的多選題通常選項的安排都有其目的，有時候會有引導作答的作用，在碰到難題時格外有用。例如魔王題的多選 8，在不知如何解題的情況下，按照選項的引導順序作答，以選項作為解法的線索，按部就班就能順利解出。

4. 教師對教材的補充有關鍵性的作用：

在今年的試題中，有兩題相對於課綱內容而言比較特殊，多選 6 與多選 8。當然如果選擇按照課綱教材內容來處理也可以作答。例如多選 6，考慮 $y=1.2^x$ 與 $y=x$ 的交點，以及 $y=1.2^x$ 與 $y=\log_{1.2}x$ 是否相交，並透過繪圖來判斷，只要畫得準確，可得出 $y=1.2^x$ 與 $y=x$ 交於兩點，再利用對稱，可得到 $y=1.2^x$ 與 $y=\log_{1.2}x$ 相交於兩點。但是如果考生知道：「當 $1<a\leq 1.44\cdots\cdots=e^{\frac{1}{e}}$ 時，$y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 會相交 (當 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 時兩者相切)」，這個問題就相當容易解決了。另外，這次的魔王題多選 8，有些學生應該會選擇用到三角函數的三倍角與二倍角公式來處理，但是如果用到三倍角公式，正式的課綱教材是沒有的，當然可以臨時由二倍角與和角公式推得，但若考生原本就知道三倍角公式的話，將可節省不少時間。不過這個問題比較好的解法是不需要用到三倍角公式的，詳見後續的試題解析。

5. 非選擇題的證明變多了：

在今年的試題中，題組的 15～17 題裡面有 2 題證明題，這在以往的試題中比較少見，而且是以嚴謹的「證明」形式論述。在 113 年的考題中，用的是偏向解題類的「說明」，而在 112 年的考題中，也僅有一題證明。以臺灣學生的習慣，通常沒有耐心好好訓練嚴謹的證明論述形式，因此通常證明題都是對學生較為不利的題型，因此也會是提高鑑別度的題目之一。在教學上，教師提供嚴謹論證形式參考，配合學生經常性的練習書寫，會是提高這類型題目得分的有效方法。

以今年考完試記者對學生的訪談來看，學生普遍覺得空間、複數、證明以及旋轉體體積的題目較難處理，這些題目應該也是整份試題中用以區分高低分學生，具有鑑別度的試題。因應試題的出題方向與學生的學習困難點來調整教學策略，或是學生自己的學習與備考方向的調整，這是評量試題除了作為升學手段之外，所帶給教學現場的額外收穫。

三、歷年成績分析與預測

今年分科測驗數學甲的試題，著重基本概念而沒有繁雜的計算，又有不少簡易好得分的題目，難易度也與去年差不多，預測分數與去年相差無幾。在做分數預測時應該能以去年的五標與累積人數做為參考。

從大考中心的「113 學年度分科測驗成績相關統計資料說明會」中給出的資料可以看到幾個統計表格，首先是近幾年的級距變化，分科測驗採 60 級分制，將考生原始總分成績前 1 % 的分數平均，再除以 60 就是一個級距，其中數學甲近年的級距如下表：

表 1：近 3 年數學甲分數級距

學年度	113	112	111
級距	1.56867	1.36100	1.43700

級距較大表示該年前 1 %者的成績較高，試題相對簡單。以試題難易度預測，今年的試題與去年差不多，但是有多選 8 這個魔王題，以及一般學生普遍難拿高分的證明題，級距預測應該較去年低一些些。從歷年五標來看，今年的五標應該會介於 113 年與 111 年之間。若從去年的原始總分與級分來對照，今年原始分數 92 分應該就有 60 級分，原始分數 68 左右就有望達到頂標。

表 2：近 3 年數學甲級分五標

學年度	頂標	前標	均標	後標	底標
113	45	38	27	18	12
112	41	34	22	13	8
111	43	35	25	15	10

表 3：113 學年度數學甲原始分數與級分對照

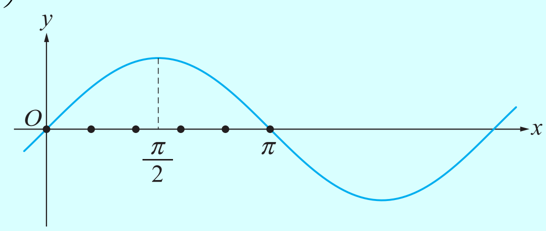
級分	60	59	58	57	56
級距	$92.55<X\leq100.00$	$90.98<X\leq92.55$	$89.41<X\leq90.98$	$87.85<X\leq89.41$	$86.28<X\leq87.85$
級分	55	54	53	52	51
級距	$84.71<X\leq86.28$	$83.14<X\leq84.71$	$81.57<X\leq83.14$	$80.00<X\leq81.57$	$78.43<X\leq80.00$
級分	50	49	48	47	46
級距	$76.86<X\leq78.43$	$75.30<X\leq76.86$	$73.73<X\leq75.30$	$72.16<X\leq73.73$	$70.59<X\leq72.16$
級分	45	44	43	42	41
級距	$69.02<X\leq70.59$	$67.45<X\leq69.02$	$65.88<X\leq67.45$	$64.32<X\leq65.88$	$62.75<X\leq64.32$
級分	40	39	38	37	36
級距	$61.18<X\leq62.75$	$59.61<X\leq61.18$	$58.04<X\leq59.61$	$56.47<X\leq58.04$	$54.90<X\leq56.47$
級分	35	34	33		
級距	$53.33<X\leq54.90$	$51.77<X\leq53.33$	$50.20<X\leq51.77$		

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1. 題至第 3. 題，每題 6 分。

1. 坐標平面上，函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$，如下圖所示。試選出在 $0<\theta\leq\pi$ 的範圍中滿足 $\sin\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的 θ 值。



(1) $\dfrac{\pi}{5}$　(2) $\dfrac{2\pi}{5}$　(3) $\dfrac{3\pi}{5}$　(4) $\dfrac{4\pi}{5}$　(5) π

答　　案：(2)

命題出處：第三冊 A 第一章　三角函數

測驗目標：正弦函數圖形的對稱性、函數圖形的平移

難 易 度：易

詳　　解：$y=\sin x$ 的圖形在 $0<\theta\leq\pi$ 時對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$，當 $\sin\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 時，

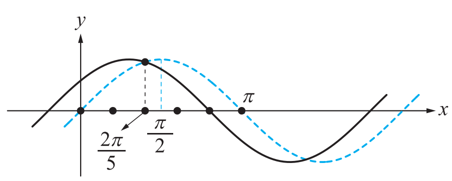
亦即 $\dfrac{\theta+\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 2\theta=\pi-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{4\pi}{5}\Rightarrow\theta=\dfrac{2\pi}{5}$

故選(2)

【另解】

考慮圖形的平移，

$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 為 $y=\sin x$ 的圖形往左平移 $\dfrac{\pi}{5}$ 單位，作圖如右

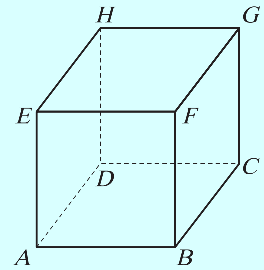


可以看出當 $x=\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ 時，兩者相交，

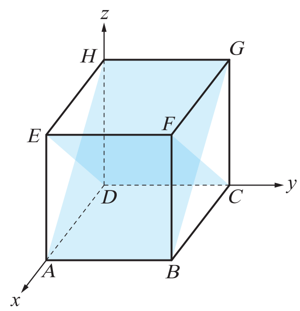
即 $\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\dfrac{2\pi}{5}\right)$

故選(2)

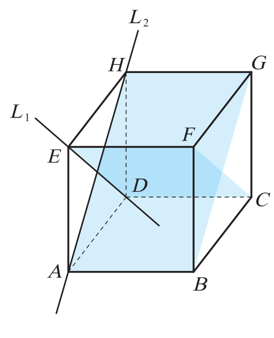
2. 空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$，其中頂點 A、B、C、D 在同一個平面上，且 $\overline{AE}$ 為其中一個邊，如右圖所示。下列選項中，試選出與平面 BGH 以及平面 CFE 皆垂直的平面。
(1)平面 ADH
(2)平面 BCD
(3)平面 CDG
(4)平面 DFG
(5)平面 DFH



答　　案：(1)
命題出處：第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線
測驗目標：熟悉空間中兩平面垂直的性質
難 易 度：中偏易
詳　　解：建立空間坐標系，設邊長為 1，得 $A(1,0,0)$、$B(1,1,0)$、$C(0,1,0)$、$D(0,0,0)$、$E(1,0,1)$、$F(1,1,1)$、$G(0,1,1)$、$H(0,0,1)$
可得平面 BGH 的法向量為
$\overrightarrow{n_1} \,//\, \overrightarrow{BG}\times\overrightarrow{BH}=(-1,0,1)\times(-1,-1,1)=(1,0,1)$
平面 CFE 的法向量為
$\overrightarrow{n_2} \,//\, \overrightarrow{FE}\times\overrightarrow{FC}=(0,-1,0)\times(-1,0,-1)=(1,0,-1)$
設與平面 BGH 及平面 CFE 皆垂直的平面法向量為 $\overrightarrow{n}$
$\overrightarrow{n} \,//\, \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,0,1)\times(1,0,-1)=(0,1,0)$
為平面 ADH 的法向量
故選(1)

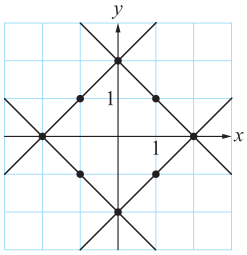


【另解】
在正立方體中作圖，平面 BGH 即平面 $ABGH$，可以發現正方形 $ADHE$ 的對角線 $\overline{DE}\perp\overline{AH}$，且 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$
(因為 $\overrightarrow{AB}\perp$平面 $ADHE$)，因此 $\overrightarrow{DE}$ 為平面 BGH 的法向量
同理，$\overrightarrow{AH}$ 為平面 CFE 的法向量，與 $\overrightarrow{DE}$ 、$\overrightarrow{AH}$ 皆垂直的向量為 $\overrightarrow{CD}$
而 $\overrightarrow{CD}$ 為平面 ADH 的法向量
故選(1)



3. 《幾何原本》上說：「給定相異兩點可決定一條直線」。一般來說，相異三點可決定 $C_2^3=3$ 條直線；但若這三點共線，此時僅決定一條直線。坐標平面上，已知圓 Γ_1：$x^2+y^2=4$ 與兩坐標軸交於 4 點、圓 Γ_2：$x^2+y^2=2$ 與直線 $x-y=0$ 交於 2 點、圓 Γ_2 與直線 $x+y=0$ 交於 2 點。試問這 8 點共可決定幾條不同的直線？
(1) 12　(2) 16　(3) 20　(4) 24　(5) 28

答　　案：(3)
命題出處：第二冊第三章　排列組合與機率
測驗目標：能判斷共線並求出組合數
難 易 度：易
詳　　解：圓 Γ_1：$x^2+y^2=4$ 與兩坐標軸交於 $(2,0)$、$(0,2)$、$(-2,0)$、$(0,-2)$ 四點
圓 Γ_2：$x^2+y^2=2$ 與直線 $x-y=0$ 交於 $(1,1)$、$(-1,-1)$ 兩點
圓 Γ_2 與直線 $x+y=0$ 交於 $(1,-1)$、$(-1,1)$ 兩點
其中 $(0,2)$、$(1,1)$、$(2,0)$ 三點共線
$(0,2)$、$(-1,1)$、$(-2,0)$ 三點共線
$(-2,0)$、$(-1,-1)$、$(0,-2)$ 三點共線
$(0,-2)$、$(1,-1)$、$(2,0)$ 三點共線
因此共可決定 $C_2^8-4\times C_2^3+4=28-12+4=20$
故選(3)



二、多選題（占 40 分）

說明：第 4. 題至第 8. 題，每題 8 分。

4. 試從下列坐標平面上的二次曲線中，選出與所有的鉛直線都相交的選項。
(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$
(2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$
(3) $-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$
(4) $y=\dfrac{4}{9}x^2$
(5) $x=\dfrac{4}{9}y^2$

答　　案：(3)(4)
命題出處：選修數學甲(下)第一章　二次曲線
測驗目標：熟練二次曲線的圖形
難 易 度：易

詳　　解：畫出各選項中的圖形後判斷是否與所有鉛直線都相交

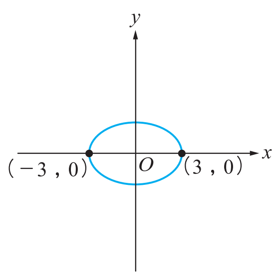
(1) ╳：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 為橢圓，如圖㈠，且 $-3\leq x\leq 3$，因此 $x>3$ 或 $x<-3$ 的鉛直線與圖形不相交

(2) ╳：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 為長軸平行 x 軸的雙曲線，如圖㈡，$-3<x<3$ 的鉛直線與圖形不相交

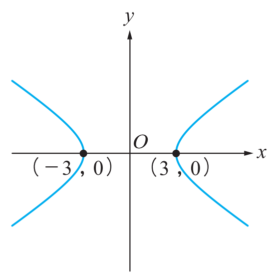
(3) ◯：$-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 為長軸平行 y 軸的雙曲線，如圖㈢，與所有的鉛直線皆相交

(4) ◯：$y=\frac{4}{9}x^2$ 為開口向上的拋物線，如圖㈣，與所有的鉛直線皆相交

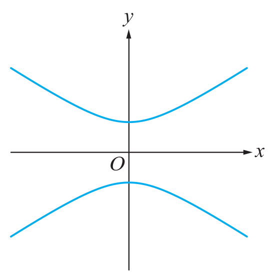
(5) ╳：$x=\frac{4}{9}y^2$ 為開口向右的拋物線，如圖㈤，$x<0$ 的鉛直線與圖形不相交



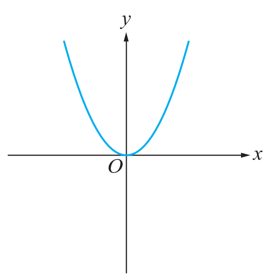
圖㈠



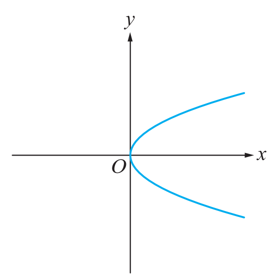
圖㈡



圖㈢



圖㈣



圖㈤

故選(3)(4)

5. 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$ ，其中 $a_n=\cos\left(n\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ ，n 為正整數。試選出正確的選項。

(1) $a_1=-\frac{1}{2}$

(2) $a_2=a_3$

(3) $a_4=a_{24}$

(4) $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n<1$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^n=3-2\sqrt{3}$

答　　案：(3)(5)

命題出處：第三冊 A 第一章　三角函數、選修數學甲(上)第一章　極限與函數

測驗目標：判斷數列的規律與極限、無窮等比級數的極限值

難 易 度：中偏易

詳　　解：(1)╳：$a_1=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)╳：$a_2=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_3=\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a_2\neq a_3$

(3)○：$a_4=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=a_2$

$a_5=\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=a_3=a_1$

由以上規律，可以發現：

$a_1=a_3=a_5=\cdots\cdots=a_{2n-1}=\cdots\cdots=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_2=a_4=a_6=\cdots\cdots=a_{2n}=\cdots\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故 $a_4=a_{24}$

(4)╳：由(3)可知，$\langle a_n \rangle=\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\cdots\cdots \right\rangle$

因此 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列，極限不存在

(5) ◯：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^n=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+\cdots\cdots$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4+\cdots\cdots$$

〈a_n〉為公比為$-\frac{\sqrt{3}}{2}$的無窮等比級數，因為$-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}<1$

級數收斂且和存在

故$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^n=\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=--\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$

故選(3)(5)

6. 設指數函數$f(x)=1.2^x$。試選出正確的選項。

(1)$f(0)>0$

(2)$f(10)>10$

(3)坐標平面上，$y=1.2^x$的圖形與直線$y=x$相交

(4)坐標平面上，$y=1.2^x$與$y=\log(1.2^x)$的圖形對稱於直線$y=x$

(5)對任意正實數b，$\log_{1.2}b\neq 1.2^b$

答　　案：(1)(3)

命題出處：第三冊 A 第二章　指數與對數函數

測驗目標：指數與對數函數圖形的性質與對稱性

難 易 度：中

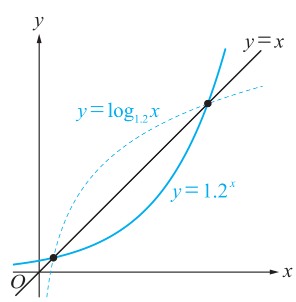
詳　　解：(1) ◯：$f(0)=1.2^0=1>0$

(2) ╳：$f(10)=1.2^{10}$與 10 比較大小，考慮取對數後來比較

$\log(1.2)^{10}=10\text{x}\log\frac{6}{5}=10(0.7781-0.6990)=0.791<1=\log 10$

因為$y=\log x$為遞增函數，因此$1.2^{10}<10$，即$f(10)<10$

(3) ◯：在坐標平面上畫出$y=1.2^x$與$y=x$的圖形，如右圖，由圖形可知$y=1.2^x$與$y=x$交於兩點



(4) ╳：$y=1.2^x$與$y=\log(1.2)^x$不會對稱於直線$y=x$

$(1,1.2)$在$y=1.2^x$上，但是$x=1.2$代入

$y=\log(1.2)^x$，得$y=\log(1.2)^{1.2}\neq 1=\log 10$

(5) ╳：由(3)知，$y=1.2^x$與$y=x$交於兩點，而$y=1.2^x$與$y=\log_{1.2}x$對稱於直線$y=x$，因此$y=1.2^x$與$y=\log_{1.2}x$交於兩點，亦即存在正實數b，使得$\log_{1.2}b=1.2^b$

故選(1)(3)

7. 已知實係數多項式 $f(x)$ 的次數大於 5，且其最高次項係數為正。又 $f(x)$ 在 $x=1$、2、4 處有極小值，且在 $x=3$、5 處有極大值。根據上述，試選出正確的選項。
(1) $f(1)<f(3)$
(2)存在實數 a，b 滿足 $1<a<b<2$，使得 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)<0$
(3) $f''(3)>0$
(4)存在實數 $c>5$，使得 $f'(c)>0$
(5) $f(x)$ 的次數大於 7

答　　案：(2)(4)(5)

命題出處：選修數學甲(上)第二章　微分

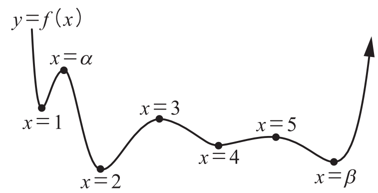
測驗目標：能根據極值與微分判斷圖形的特徵

難 易 度：中偏難

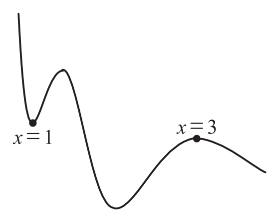
詳　　解：根據極值與首項係數為正，可整理 $f'(x)$ 的正負與 $f(x)$ 的遞增減如下表，並繪製 $y=f(x)$ 的簡圖如下

x		1		α		2		3		4		5		β	
$f'(x)$		0		0		0		0		0	+	0		0	
增減	↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗

極小值　極小值　極大值　極小值　極大值



(1) ╳：函數的極小值不一定小於極大值，如右圖



(2) ○：實係數多項式函數為定義在所有實數的連續函數，且 $x=1$，$x=2$ 為極值點，因此在 $x=1$ 左右切線斜率有變化，同時在 $x=2$ 左右切線斜率有變化，亦即在 $x=1$ 附近，存在實數 $a>1$ 且 $f'(a)>0$
在 $x=2$ 附近，存在實數 b，$1<a<b<2$ 且 $f'(b)<0$

(3) ╳：$f(x)$ 在 $x=3$ 有極大值，表示在 $x=3$ 附近凹口向下，故 $f''(3)<0$

(4) ○：因為 $f(x)$ 首項係數為正，圖形最右方上升，亦即當 x 越大時，函數值遞增，即 $f'(x)>0$，故存在實數 $c>5$，使得 $f'(c)>0$

(5) ○：根據函數極值，$f'(x)$ 至少有因式
$(x-1)(x-\alpha)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-\beta)$，其中 $1<\alpha<2$，$\beta>5$
因此可知 $f(x)$ 的次數大於 7 次

故選(2)(4)(5)

8. 設複數 z 的虛部不為 0 且 $|z|=2$。已知在複數平面上，1、z、z^3 共線。試選出正確的選項。

(1) $z\cdot\bar{z}=2$

(2) $\dfrac{z^3-z}{z-1}$ 的虛部為 0

(3) z 的實部為 $-\dfrac{1}{2}$

(4) z 滿足 $z^2-z+4=0$

(5)在複數平面上，-2、z、z^2 共線

答　　案：(2)(3)(5)

命題出處：選修數學甲(下)第二章　複數與多項式方程式

測驗目標：熟悉複數平面與複數極式的性質

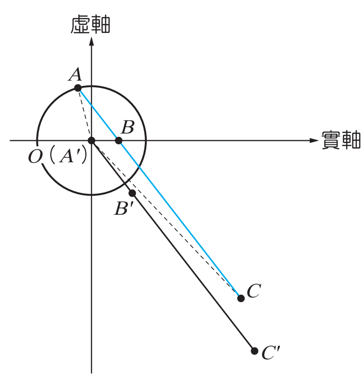
難 易 度：難

詳　　解：(1) ╳：$z\cdot\bar{z}=|z|^2=4$

(2) ○：在複數平面上，可將一個複數視為點或位置向量

設 A、B、C 點分別代表的複數為 z、1、z^3，

且 A，B，C 三點共線



設 $z=a+bi$，$\overrightarrow{OA}=(a\ ,\ b)$，因此可將 z 視為 $\overrightarrow{OA}$，同理 1 可視為 $\overrightarrow{OB}$，z^3 可視為 $\overrightarrow{OC}$

因此 $\overrightarrow{A'B'}=z-1$，$\overrightarrow{A'C'}=z^3-z$

且 A'，B'，C' 三點共線，

即 $\overrightarrow{A'C'}\,//\,\overrightarrow{A'B'}$，亦即 $z^3-z=r(z-1)$，

其中 r 為非零實數，亦即 $\dfrac{z^3-z}{z-1}=r\in\mathbb{R}$，因此其虛部為 0

(3) ○：由(2)得 $\dfrac{z^3-z}{z-1}=\dfrac{z(z+1)(z-1)}{z-1}=z(z+1)=z^2+z$ 虛部為 0

$z^2+z=(a+bi)^2+(a+bi)=(a^2-b^2+a)+(2ab+b)i$

得 $2ab+b=0$，

由於 $b\neq 0$，同除以 b，得 $2a+1=0$，故 $a=-\dfrac{1}{2}$

代回 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$，

得 $\dfrac{1}{4}+b^2=4\Rightarrow b^2=\dfrac{15}{4}\Rightarrow b=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

因此 $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$，其實部為 $-\dfrac{1}{2}$

【另解】

設 $z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，

由(2)得 $\dfrac{z^3-z}{z-1}=\dfrac{z(z+1)(z-1)}{z-1}=z(z+1)=z^2+z$ 虛部為 0

而 $z^2+z=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+2(\cos\theta+i\sin\theta)$，

其虛部為 $4\sin 2\theta+2\sin\theta=0$，即 $8\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta=0$，

因為 $\sin\theta\neq 0$，可得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$，$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

故 z 的實部為 $2\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

(4) ╳：$z^2-z+4=0$ 的根為 $\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}\neq-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$，因此 z 不滿足 $z^2-z+4=0$

(5) ○：由(2)知，若 -2，z，z^2 共線 $\Leftrightarrow \dfrac{z^2-z}{z+2}\in\mathbb{R}$

當 $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$ 時，

$$\frac{z^2-z}{z+2}=\frac{z(z-1)}{z+2}=\frac{\dfrac{1\pm\sqrt{15}i}{2}\times\dfrac{-3\pm\sqrt{15}i}{2}}{\dfrac{3+\sqrt{15}i}{2}}=\frac{-12-4\sqrt{15}i}{2(3+\sqrt{15}i)}=-2 \text{ 為實數，}$$

因此 -2，z，z^2 共線

同理，$z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$ 時，亦可得 -2，z，z^2 共線

【另解】

在複數平面上，設 A、D、E 為分別代表 z、-2、z^2 的點

①當 $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$z^2=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\dfrac{7}{8}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，$D(-2,0)$，$E\left(-\dfrac{7}{2},-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AD}=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=(-3,-\sqrt{15})$，$\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{AE}$

故 A、D、E 共線，即在複數平面上，-2、z、z^2 共線

②當 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$，$z^2=4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{7}{8}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$，$D(-2,0)$，$E\left(-\frac{7}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=(-3,\sqrt{15})$，$\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{AE}$

故 A、D、E 共線，即在複數平面上，-2、z、z^2 共線

故選(2)(3)(5)

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9. 題至第 11. 題，每題 6 分。

9. 令 A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，且令 B 為以 x 軸為鏡射軸 (對稱軸) 的鏡射矩陣。令 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$、$BA=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$。已知 $a_1+a_2+a_3+a_4=2(c_1+c_2+c_3+c_4)$，則 $\tan\theta=\dfrac{\text{9-1}\ \text{9-2}}{\text{9-3}}$。(化為最簡分數)

答　　案：$\frac{-1}{2}$

命題出處：第四冊 A 第四章　矩陣

測驗目標：了解線性變換所對應的矩陣與矩陣運算

難 易 度：易

詳　　解：A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，故 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

B 為以 x 軸為鏡射軸的鏡射矩陣，故 $B=\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

因此 $a_1+a_2+a_3+a_4=2\cos\theta$，$c_1+c_2+c_3+c_4=-2\sin\theta$

故 $2\cos\theta=-4\sin\theta$

則 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-1}{2}$

10. 坐標空間中一平面與平面 $x=0$、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1、L_2。已知 L_1、L_2 互相平行，且 L_1 通過點 $(0, 2, -11)$、L_2 通過點 $(8, 21, 0)$，則 L_1、L_2 的距離為 $\sqrt{\text{(10-1)(10-2)(10-3)}}$ ____。(化為最簡根式)

答　　案：$\sqrt{185}$

命題出處：第四冊 A 第一章　空間向量、第四冊 A 第二章　空間中的平面與直線

測驗目標：空間中平面與直線的性質、三垂線定理

難 易 度：中

詳　　解：一平面與平面 $x=0$、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1、L_2，

即 L_1 在 $yz(x=0)$ 平面，L_2 在 $xy(z=0)$ 平面，

又 $L_1 // L_2 \Rightarrow L_1$，$L_2$ 皆平行 y 軸

$A(0, 2, -11)$ 在 L_1 上，$B(8, 21, 0)$ 在 L_2 上

如右圖，A 在 y 軸上的投影點為 $A'(0, 2, 0)$，

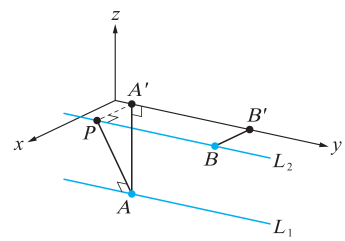
B 在 y 軸上的投影點為 $B'(0, 21, 0)$，

過 A' 作 L_2 的垂直線，垂足為 P 點，

由三垂線定理可知，$\overline{AP} \perp L_2 = d(L_1, L_2)$

又 $\overline{AA'} = 11$，$\overline{A'P} = \overline{BB'} = 8$，

故 L_1、L_2 的距離為 $d(L_1, L_2) = \overline{AP} = \sqrt{11^2+8^2} = \sqrt{185}$



11. 坐標平面上有一平行四邊形 Γ，其中兩邊所在的直線與 $5x-y=0$ 平行、另兩邊所在的直線與 $3x-2y=0$ 垂直。令 Γ 的兩對角線交點為 Q。已知 Γ 有一頂點 P，滿足 $\overrightarrow{PQ}=(10, -1)$，則 Γ 的面積為 (11-1)(11-2)(11-3) ____。

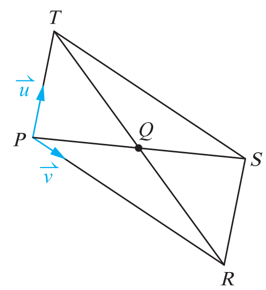
答　　案：204

命題出處：第三冊 A 第三章　平面向量

測驗目標：向量的線性組合

難 易 度：中

詳　　解：設平行四邊形 $PRST$ 兩邊 $\overline{PT}$ 、 $\overline{RS}$ 平行 $5x-y=0$，



$\vec{u}$ 為其方向向量，可知 $\vec{u}=(1,5)$

設平行四邊形兩邊 $\overline{PR}$ 、 $\overline{TS}$ 垂直 $3x-2y=0$，

亦即平行直線 $2x+3y=0$， $\vec{v}$ 為其方向向量，

可知 $\vec{v}=(3,-2)$

又設 $\overrightarrow{PT}=\alpha\vec{u}$ ， $\overrightarrow{PR}=\beta\vec{v}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PS}=2\overrightarrow{PQ}=(20,-2)=\alpha(1,5)+\beta(3,-2)$

可得 $\begin{cases}\alpha+3\beta=20\\5\alpha-2\beta=-2\end{cases}$，解聯立得 $\alpha=2$，$\beta=6$

即 $\overrightarrow{PT}=2(1,5)=(2,10)$， $\overrightarrow{PR}=6(3,-2)=(18,-12)$

故平行四邊形 $PRST$ 面積為 $\left|\begin{vmatrix}2&10\\18&-12\end{vmatrix}\right|=|-24-180|=204$

【另解】

設平行四邊形 $PRST$ 兩邊 $\overline{PT}$ 、 $\overline{RS}$ 平行 $5x-y=0$，

兩邊 $\overline{PR}$ 、 $\overline{TS}$ 垂直 $3x-2y=0$，亦即平行直線 $2x+3y=0$

將平行四邊形平移，讓頂點 P 平移至坐標平面的原點，對角線交點 $Q(10,-1)$

Q 為 P、S 的中點，故 $S(20,-2)$

設 $\overleftrightarrow{PT}$ ：$5x-y=0$、 $\overleftrightarrow{PR}$ ：$2x+3y=0$ (過 $P(0,0)$)

　$\overleftrightarrow{RS}$ ：$5x-y=k$、 $\overleftrightarrow{TS}$ ：$2x+3y=u$，過 $S(20,-2)$ 代入，得

　$\overleftrightarrow{RS}$ ：$5x-y=102$， $\overleftrightarrow{TS}$ ：$2x+3y=34$

可得頂點坐標 R：$\begin{cases}2x+3y=0\\5x-y=102\end{cases}$ 、T：$\begin{cases}5x-y=0\\2x+3y=34\end{cases}$

解聯立得 $R(18,-12)$，$T(2,10)$

故 $\overrightarrow{PT}=(2,10)$， $\overrightarrow{PR}=(18,-12)$

故平行四邊形 $PRST$ 面積為 $\left|\begin{vmatrix}2&10\\18&-12\end{vmatrix}\right|=|-24-180|=204$

第貳部分、混合題或非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶 (液)。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12－14 題為題組

某商店以抽獎方式販售一熱門公仔，每次抽獎都互相獨立且抽中的機率為 $\frac{2}{5}$ 。參加者可用以下兩種方式參加抽獎。

方式一：先付 225 元得到兩次抽獎機會，只要抽中即停止抽獎且得到一個公仔；若這兩次皆未抽中，則必須再多付 75 元得到一個公仔。

方式二：抽獎次數不限，每抽獎一次付 100 元。

根據上述，試回答下列問題。

12. 若以方式一抽獎，則共需付 300 元才能得到一個公仔的機率為何？(單選題，2 分)

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

(2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

(3) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

(4) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

(5) $\left(\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

答　　案：(3)

命題出處：第四冊 A 第三章　機率

測驗目標：獨立事件的機率

難 易 度：易

詳　　解：共需付 300 元才能得到一個公仔，表示付 225 元的兩次抽獎機會均沒有抽中，故機率為 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

13. 若以方式二抽獎直到抽中一個公仔為止，試依期望值定義，使用 Σ 符號表示所需抽獎次數的期望值，並求其值。(非選擇題，4 分)

答　　案：$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{5}\right)$；2.5 次

命題出處：選修數學甲(下)第三章　機率統計

測驗目標：能寫出隨機變數的期望值，並求出幾何分布的期望值

難 易 度：易

詳　　解：設隨機變數 X 直到抽中一個公仔為止所需的抽獎次數，抽中公仔表示成功，成功機率為 $\frac{2}{5}$

X 的機率分布表如下

X	1	2	3	……	k	……
$P(x=k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}$	……	$\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\times\frac{2}{5}$	……

抽中次數的期望值為

$$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}+\cdots\cdots+k\times\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\times\frac{2}{5}+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

且 $X\sim G\left(\frac{2}{5}\right)$，因此期望值 $E(X)=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$(次)

14. 假設花費金額不設限直到得到一個公仔為止，試分別求出這兩種抽獎方式得到一個公仔所需付金額的期望值，並說明這兩個期望值的大小關係。(非選擇題，6 分)

答　　案：E(方式一)$=252$，E(方式二)$=250$，E(方式一)$>E$(方式二)

命題出處：選修數學甲(下)第三章　機率統計

測驗目標：能求出隨機變數的期望值

難 易 度：中偏易

詳　　解：方式一的期望值 E(方式一)$=225\times\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\right)+300\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$$=225\times\frac{16}{25}+300\times\frac{9}{25}=252$$

設隨機變數 Y 表示方式二所需付的金額 $\Rightarrow Y=100X$

方式二的期望值 E(方式二)$=E(Y)=100E(X)=100\times\frac{5}{2}=250$

故 E(方式一)$>E$(方式二)

15－17 題為題組

設實係數多項式函數 $f(x)=3ax^2+(1-a)$，其中 $-\frac{1}{2}\le a\le 1$。在坐標平面上，令 Γ 為 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $-1\le x\le 1$ 所圍的區域。根據上述，試回答下列問題。

15. 證明當 $-1\le x\le 1$ 時，$f(x)\ge 0$ 皆成立。(非選擇題，4 分)

答　　案：略

命題出處：第一冊第三章　多項式函數

測驗目標：根據條件討論二次函數圖形的正負

難 易 度：中

詳　　解：$f(x)=3ax^2+(1-a)$ 為二次函數，其中 $-\frac{1}{2}\le a\le 1$

① $0<a\le 1$

此時 $y=f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，頂點為 $(0, 1-a)$

因此當 $x=0$ 時，$f(x)$ 有最小值為 $1-a\ge 0$

即當 $-1\le x\le 1$ 時 $f(x)\ge f(0)=1-a\ge 0$

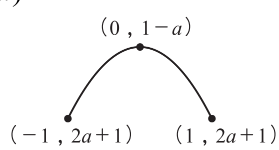
② $a=0$

對任意 x，$f(x)=1$，即當 $-1\le x\le 1$ 時 $f(x)\ge 0$ 成立

③ $-\frac{1}{2}\le a<0$

此時 $y=f(x)$ 的圖形為開口向下的拋物線，頂點為 $(0, 1-a)$

又因為 $-\frac{1}{2}\le a<0$，$-1\le 2a<0$，因此 $2a+1\ge 0$



當 $-1\le x\le 0$ 時，$f(x)\ge f(-1)=2a+1\ge 0$

當 $0<x\le 1$ 時，$f(x)\ge f(1)=2a+1\ge 0$

故當 $-1\le x\le 1$ 時 $f(x)\ge 0$

由①、②、③可知當 $-1\le x\le 1$ 時 $f(x)\ge 0$

16. 證明對於所有 $a\in\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$，$\Gamma$ 的面積皆為 2。(非選擇題，2 分)

答　　案：略

命題出處：選修數學甲(上)第三章　積分

測驗目標：能計算曲線下圖形的面積

難 易 度：中

詳　　解：Γ 為 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $-1\le x\le 1$ 所圍的區域

由 15 題知當 $-1\le x\le 1$ 時 $f(x)\ge 0$

因此 Γ 的面積為 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1}(3ax^2+(1-a))dx$

$$=2\left[ax^3+(1-a)x\right]\Big|_0^1$$

$$=2(a+(1-a)-0)=2$$

17. 令 V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積。試問對所有 $a\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$V$ 是否都相等？若相等，則求其值；若不相等，則當 a 為多少時，V 有最大值，並求此最大值。(非選擇題，6分)

答　　案：$a=1$ 時，有最大值 $\frac{18\pi}{5}$

命題出處：選修數學甲(上)第三章　積分

測驗目標：能求出旋轉體的體積

難 易 度：中偏難

詳　　解：V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積

$$V=\int_{-1}^{1}\pi[(3ax^2+(1-a))]^2dx$$
$$=2\times\pi\int_{0}^{1}[(3ax^2+(1-a))]^2dx$$
$$=2\pi(\int_{0}^{1}[9a^2x^4+6a(1-a)x^2+(1-a)^2]dx)$$
$$=2\pi\left[\frac{9}{5}a^2x^5+2a(1-a)x^3+(1-a)^2x\right]\Bigg|_0^1$$
$$=2\pi\left[\frac{9}{5}a^2+2a(1-a)+(1-a)^2\right]$$
$$=2\pi\left(\frac{4}{5}a^2+1\right)$$

因此對所有 $a\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$V$ 的值根據 a 而決定，並不相等

且當 $a=1$ 時，V 有最大值 $2\pi\times\left(\frac{4}{5}+1\right)=\frac{18\pi}{5}$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\mu_X^2\right)}$

6. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線 (迴歸直線) 方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。