5 線性規劃

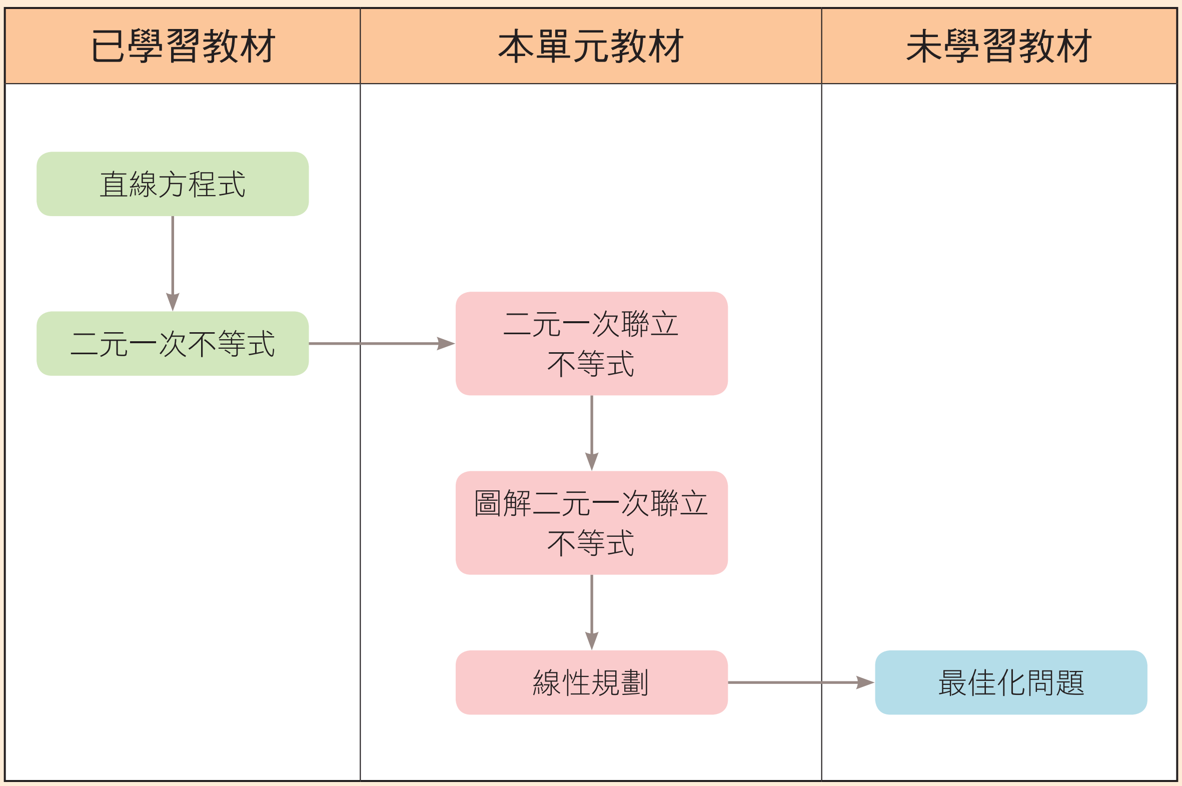
一 教材摘要

先複習高一學過的二元一次不等式與其解區域，接著介紹以平行線法與頂點法求極值的概念，最後將其運用到線性規劃上，並用以解決實際的問題。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 複習二元一次不等式，並繪製其解區域。 2. 能繪製二元一次聯立不等式的解區域。 3. 認識平行線法，並且能用平行線法求出最佳解。 4. 認識頂點法，並且能用頂點法求出最佳解。 5. 能了解應用問題的內容，並將問題轉為線性規劃的數學模型。	8

三 教材地位分析



已學習教材
本單元教材
未學習教材
直線方程式
二元一次不等式
二元一次聯立不等式
圖解二元一次聯立不等式
線性規劃
最佳化問題

5 線性規劃

某公司生產的產品分別存放在甲、乙兩間倉庫，而由兩間倉庫運到 A、B 兩市場的運費並不相同。在滿足市場的需求下，該如何分配從倉庫到市場的運量，才能使公司最省運費呢？

如何使用數學方法解決上述的問題是本單元的學習重點。

▲圖 1

教學小提醒

❶第一次接觸線性規劃，宜由有情境的例子，介紹線性規劃的意義與目標函數，並由實際的例子假設未知數，列出二元一次聯立不等式。

教學要點

❶複習二元一次不等式，並繪製其解區域。

甲 二元一次不等式

當係數 a, b 不全為 0 時，不等式 $ax+by>c$, $ax+by<c$, $ax+by\geq c$, $ax+by\leq c$ 稱為二元一次不等式。第一冊學過如何在坐標平面上圖示二元一次不等式的解，底下以例子來複習圖示的解法。

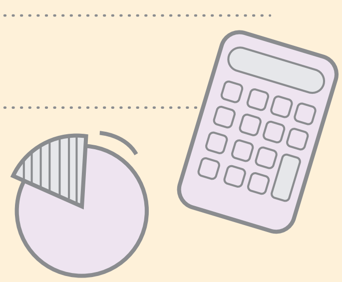
例題 1

圖示二元一次不等式 $x-2y\leq 2$ 的解。

解

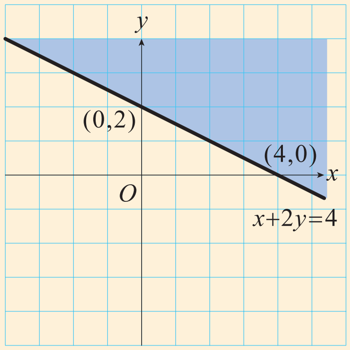
因為不等式 $x-2y\leq 2$ 有等號，所以將直線 L：$x-2y=2$ 以實線表示。此時 L 將坐標平面上 L 以外的區域分成兩個半平面，其中一個半平面包含原點 $(0, 0)$。

❷因為二元一次不等式的圖解就是一個半平面，所以可以使用檢查某一點是否滿足二元一次不等式的方法，判別其圖解是哪一個半平面。

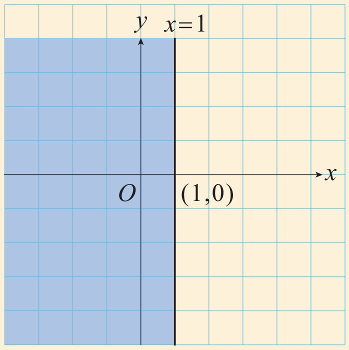


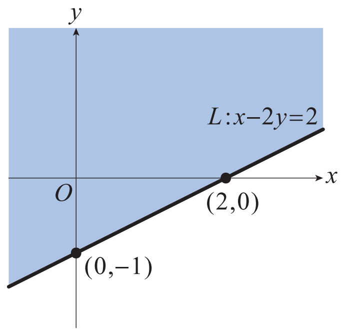
隨堂練習解答

1 (1) 因為不等式 $x+2y\geq 4$ 有等號，所以將直線 $x+2y=4$ 以實線表示。
此時直線將坐標平面上直線以外的區域分成兩個半平面，
其中一個半平面包含原點 $(0,0)$。
因為 $(0,0)$ 代入 $x+2y$ 得 $0+2\times 0=0<4$，
所以不等式的解就是直線 $x+2y=4$ 與不包含 $(0,0)$ 所在的半平面，如圖所示。



(2) 因為不等式 $x\leq 1$ 有等號，所以將直線 $x=1$ 以實線表示。
此時直線將坐標平面上直線以外的區域分成兩個半平面，
其中一個半平面包含原點 $(0,0)$。
因為 $(0,0)$ 代入 x 得 $0<1$，
所以不等式的解就是直線 $x=1$ 與包含 $(0,0)$ 所在的半平面，如圖所示。





因為 $(0,0)$ 代入 $x-2y$ 得

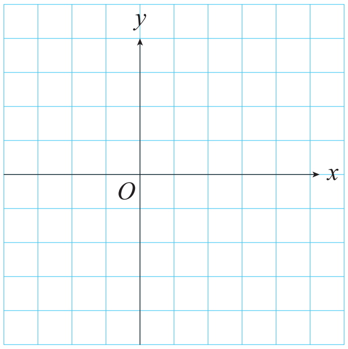
$$0-2\times0=0\leq2，$$

所以不等式的解就是包含 $(0,0)$ 所在的半平面及直線 L，如上圖所示。

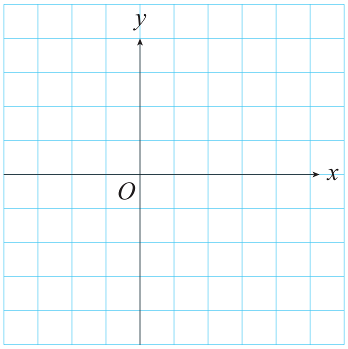
隨堂練習

圖示下列各二元一次不等式的解。

(1) $x+2y\geq4$。



(2) $x\leq1$。



見解析

如果將幾個二元一次不等式聯立起來，那麼其解所形成的圖形就是指這些二元一次不等式解區域的共同部分。接著練習圖示二元一次聯立不等式的解。

87

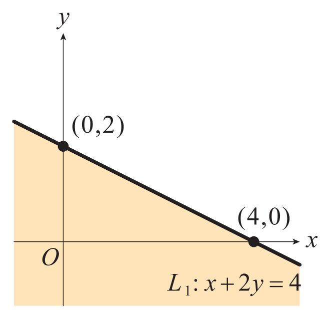
例題 2

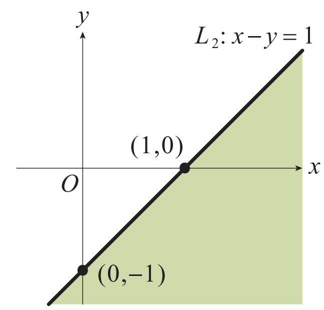
圖示二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+2y \le 4 \\ x-y \ge 1 \end{cases}$ 的解。

解

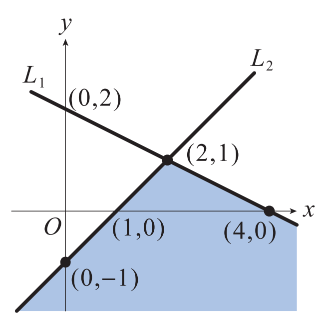
① 作直線 L_1：$x+2y=4$，不等式 $x+2y \le 4$ 的圖形是由直線 L_1 與包含原點的半平面所組成。

② 作直線 L_2：$x-y=1$，不等式 $x-y \ge 1$ 的圖形是由直線 L_2 與不包含原點的半平面所組成。





③ 上述兩個解區域的共同部分，即為聯立不等式 $\begin{cases} x+2y \le 4 \\ x-y \ge 1 \end{cases}$ 的解，如右圖中的鋪色區域（包含邊界），其中兩直線的交點亦為此聯立不等式的解。

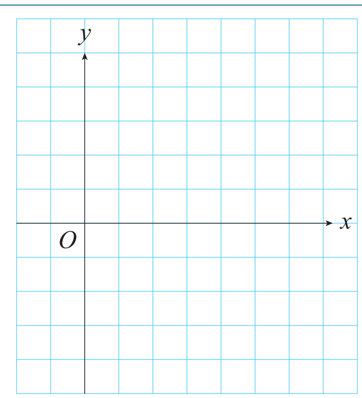


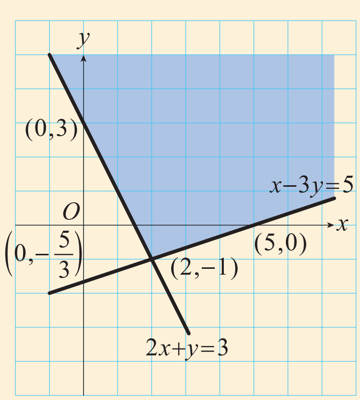
❶

隨堂練習

圖示二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \le 5 \\ 2x+y \ge 3 \end{cases}$ 的解。

見解析





隨堂練習解答

❶ ① 作直線 $L_1: x-3y=5$，不等式 $x-3y \le 5$ 的圖形是由直線 L_1 與包含原點的半平面所組成。

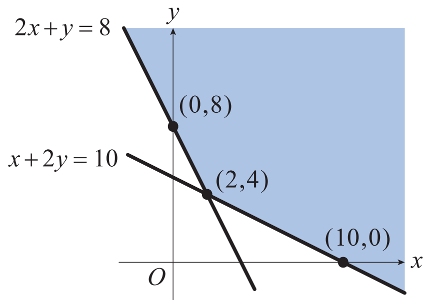
② 作直線 $L_2: 2x+y=3$，不等式 $2x+y \ge 3$ 的圖形是由直線 L_2 與不包含原點的半平面所組成。

③ 上述兩個解區域的共同部分，即為聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \le 5 \\ 2x+y \ge 3 \end{cases}$ 的解，如圖所示。

乙 平行線法與頂點法

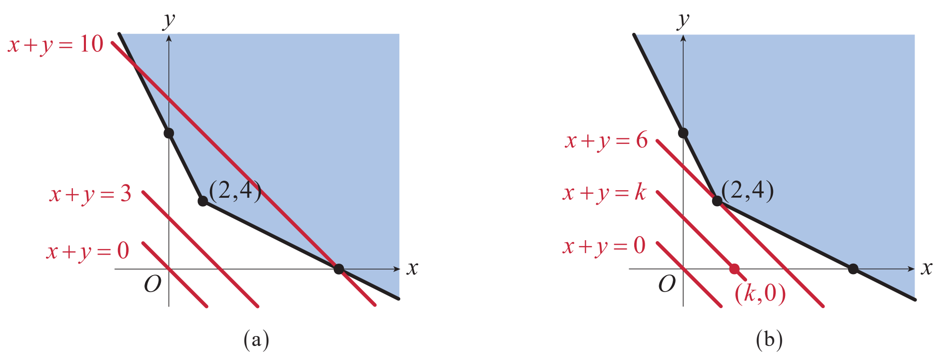
在前面的討論中，我們圖示了二元一次聯立不等式的解。那麼，在二元一次聯立不等式的所有解 (x, y) 中，$x+y$ 是否有最小值或最大值呢？如果有，其值為何呢？以下我們以 $\begin{cases} 2x+y \geq 8 \\ x+2y \geq 10 \end{cases}$ 為例並用圖解的方法，在其所有解 (x, y) 中，找出 $x+y$ 的最小值或最大值與其所對應的點。

首先，將聯立不等式 $\begin{cases} 2x+y \geq 8 \\ x+2y \geq 10 \end{cases}$ 的解圖示在坐標平面上，如圖 2 所示。



▲圖 2

接著，設 $x+y=k$ 並考慮常數 k 改變時，此直線的變動情形。舉例來說，當 $k=0, 3, 10$ 時，直線 $x+y=k$ 都是斜率為 -1 且互相平行的直線，如圖 3 (a) 所示，其中直線 $x+y=10$ 落在解區域內的點 (x, y) 都會滿足聯立不等式，且 $x+y$ 的值都是 10。



▲圖 3

當常數 k 從 0 開始逐漸增加時，直線 $x+y=k$ 會往右上方平行移動，第一次與解區域相交會發生在點 $(2, 4)$，此時的直線為 $x+y=6$，如圖 3(b) 所示，即 $x+y$ 有最小值 6。

然而，因為解區域是開放區域，直線 $x+y=k$ 不管往右上方平行移動多遠，都會跟此解區間有交點，所以 k 的最大值並不存在。

GGB 平行線法
（請見享備課/教學光碟）

教學要點

1 認識平行線法與頂點法，並且能用以上兩種方法求出最佳解。

教學小提醒

1 本單元不涉及求下列目標函數的極值問題：$\dfrac{y}{x}$、x^2+y^2 等非一次式的極值問題。

2 先讓同學熟悉平行移動直線時，常數項的值會有遞增或遞減的變化，進而說明平行線法。

由上面的討論知道：當 x, y 滿足某個二元一次聯立不等式且欲求 $ax+by$ 的最小（大）值時，可以先畫出此聯立不等式的解區域，然後藉著改變常數 k 使得直線 $ax+by=k$ 平行移動並與解區域相交，如此即可找出 $ax+by$ 的最小（大）值。我們稱此方法為**平行線法**。

例題 3

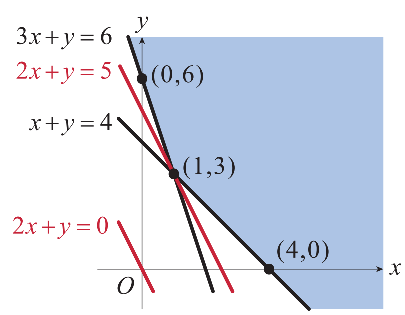
已知 x, y 滿足聯立不等式

$$\begin{cases} x+y \geq 4 \\ 3x+y \geq 6 \end{cases},$$

求 $2x+y$ 的最小值。

解

首先，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上。接著，畫出通過原點的直線 $2x+y=0$，將其平行移動至與解區域相交，如下圖所示。



最後，考慮直線 $2x+y=k$，當 k 從 0 開始逐漸增加時，直線 $2x+y=k$ 會往右上方平行移動，且第一次與解區域相交於點 $(1, 3)$，此時

$$2x+y=2\times1+3=5。$$

故根據平行線法可知：當 $(x, y)=(1, 3)$ 時，$2x+y$ 有最小值 5。

隨堂練習

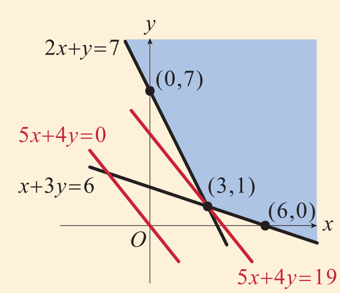
1 已知 x, y 滿足聯立不等式

$$\begin{cases} 2x+y \geq 7 \\ x+3y \geq 6 \end{cases},$$

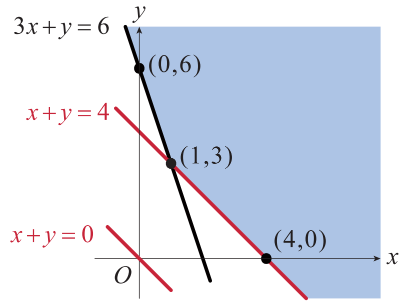
求 $5x+4y$ 的最小值。 19

隨堂練習解答

1 首先，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上。接著，畫出通過原點的直線 $5x+4y=0$，將其平行移動至與解區域相交，如右圖所示。
最後，當直線 $5x+4y=0$ 往右上方平行移動時，最先通過解區域中的點 $(3,1)$，此時 $5x+4y=5\times3+4=19$。
故根據平行線法可知：當 $(x, y)=(3,1)$ 時，$5x+4y$ 有最小值 19。



當 $ax+by=k$ 與解區域的其中一邊平行時，要如何判斷 $ax+by$ 的最小值或最大值呢？以例題 3 的解區域（圖 4 鋪色區域含邊界）為例，其一邊為直線 $x+y=4$（的一部分）。若此時要求 $x+y$ 的最小值，我們設 $x+y=k$ 且讓 k 從 0 開始逐漸增加，直線 $x+y=k$ 會往右上方平行移動，第一次與解區域相交時剛好會與 $x+y=4$（解區域的一邊）重合，此時 $x+y$ 有最小值 4。



▲圖 4

在例題 3 中，因為其聯立不等式的解圖示為開放區域，所以僅能求得最小值。接著，來看一道聯立不等式的解圖示為封閉區域之例題。

例題 4

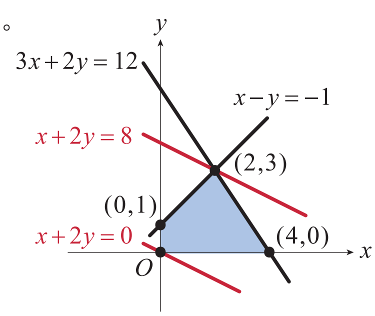
已知 x, y 滿足聯立不等式

$$\begin{cases} x-y \geq -1 \\ 3x+2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases},$$

求 $x+2y$ 的最大值與最小值。

解

首先，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上。接著，畫出通過原點的直線 $x+2y=0$，將其平行移動至與解區域相交，如右圖所示。



最後，與解區域相交的所有平行線中，位在最左邊的直線通過點 $(0,0)$，此時

$$x+2y=0+2\times 0=0；$$

位在最右邊的直線通過點 $(2,3)$，此時

$$x+2y=2+2\times 3=8。$$

故根據平行線法可知：$x+2y$ 的最大值為 8，最小值為 0。

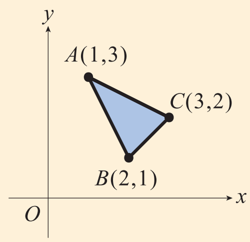
91

教學小提醒

❶ 熟悉平行線法的練習後，再引進封閉區域求極值的方法：頂點法。

補充例題

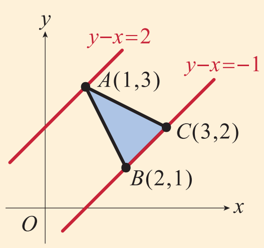
❶ 設點 $P(x,y)$ 是圖中三角形區域及其內部的點，求 $y-x$ 的最大值與最小值。



解：

觀察直線 $y-x=k$ 和三角形區域的相交情形，如圖所示。

由平行線法可知：因為直線 $y-x=k$ 與三角形區域相交時，k 滿足 $-1\le k\le 2$，所以 $y-x$ 的最大值為 2，最小值為 -1。



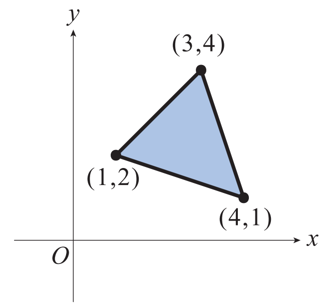
另由頂點法列表：

(x,y)	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,2)$
$y-x$	2	-1	-1

可得到相同的結論。

隨堂練習

已知 (x,y) 為右圖中三角形邊界及其內部的點，求 $y-3x$ 的最大值與最小值。



最大值為 -1；最小值為 -11

由例題 4 平行線法的操作可以發現 $x+2y$ 的最大值與最小值都發生在四邊形的頂點上，事實上，這並非偶然。一般而言，當二元一次聯立不等式的解區域為一個封閉的多邊形（含邊界）時，$ax+by$ 在其解區域內的最大值或最小值會發生在此多邊形的頂點上。因此將多邊形所有頂點坐標的 x,y 值代入 $ax+by$ 分別求出其值後，其中的最大值或最小值即為 $ax+by$ 在解區間裡的最大值或最小值，我們稱此方法為**頂點法**。

例如在例題 4 中，多邊形的頂點分別為 $(0,0),(4,0),(2,3)$ 與 $(0,1)$，它們所對應 $x+2y$ 的值如下表所示。

(x,y)	$(0,0)$	$(4,0)$	$(2,3)$	$(0,1)$
$x+2y$	0	4	8	2

故根據頂點法可知：

① 當 $(x,y)=(2,3)$ 時，$x+2y$ 有最大值 8；

② 當 $(x,y)=(0,0)$ 時，$x+2y$ 有最小值 0。

這與例題 4 利用平行線法求得的結果相符。

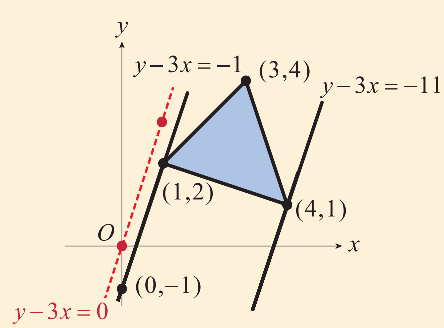
隨堂練習解答

❶ 首先，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上。

接著，畫出通過原點的直線 $y-3x=0$，將其平行移動至與解區域相交，如圖所示。

最後，與解區域相交的所有平行線中，位在最左邊的直線通過點 $(1,2)$，此時 $y-3x=-1$；位在最右邊的直線通過點 $(4,1)$，此時 $y-3x=-11$。

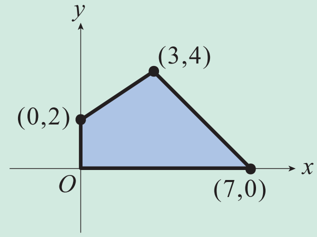
故根據平行線法可知：$y-3x$ 的最大值為 -1；最小值為 -11。



利用頂點法來做一道例題。

例題 5

已知 (x, y) 為右圖四邊形邊界及其內部的點，求 $3x+4y-10$ 的最大值與最小值。



解

因為聯立不等式的解為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $3x+4y-10$，求出其值如下表所示。

(x, y)	$(0,0)$	$(7,0)$	$(3,4)$	$(0,2)$
$3x+4y-10$	-10	11	15	-2

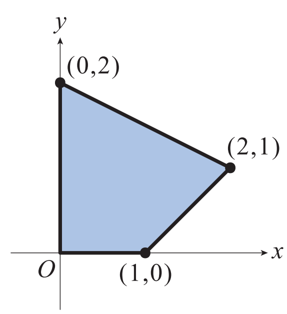
故根據頂點法可知：

① 當 $(x, y)=(3, 4)$ 時，$3x+4y-10$ 有最大值 15；

② 當 $(x, y)=(0, 0)$ 時，$3x+4y-10$ 有最小值 -10。

隨堂練習

已知 (x, y) 為右圖四邊形邊界及其內部的點，求 $2x+3y$ 的最大值與最小值。 ❶



最大值 7；最小值 0

生活中常常需要在有限的資源下考量其最大效益或最小開銷，例如在資金、人力、運費等限制條件下，如何配置才能有最大收益或是最小開銷。若可將以上的問題轉成數個二元一次不等式，在此範圍內解決此類問題的方法稱為**線性規劃**。

隨堂練習解答

❶ 因為聯立不等式的解為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $2x+3y$，求出其值如下表所示。

(x, y)	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$	$(0, 2)$
$2x+3y$	0	2	7	6

故根據頂點法可知：① 當 $(x, y)=(2, 1)$ 時，$2x+3y$ 有最大值 7。② 當 $(x, y)=(0, 0)$ 時，$2x+3y$ 有最小值 0。

本單元所討論的線性規劃問題通常有兩個變量 x 與 y，它們會受到數個二元一次不等式的限制，而這聯立不等式所形成的範圍稱為**可行解區域**，在可行解區域中的任一點 (x, y)，就是滿足聯立不等式的一組解。線性規劃就是要在可行解區域內找出點 (x, y)，使 $ax+by$ 的值最大或最小，這樣的點 (x, y) 稱為**最佳解**，而 $ax+by$ 稱為該問題的**目標函數**。

運用本單元學過的平行線法或頂點法可以解決線性規劃的問題。來看兩道應用問題，先看利用平行線法的線性規劃應用問題。

教學小提醒

❶應用問題轉換成二元一次聯立不等式是本單元的重點，可列表協助同學完成轉換。

例題 6

某公司有 A, B 兩工廠生產大小兩型的鐵櫃。

①A 廠每小時可完成 1 個大鐵櫃與 2 個小鐵櫃。

②B 廠每小時可完成 3 個大鐵櫃與 1 個小鐵櫃。

今公司接到訂單，需供應 40 個大鐵櫃與 20 個小鐵櫃。試問這兩家工廠須各工作幾小時，才能完成訂單並使兩工廠的總工作時數最少？

解

❶ 首先，設 A 工廠工作 x 小時，B 工廠工作 y 小時，總工作時數為 $x+y$（小時），即目標函數為

$$P=x+y\text{（小時）}。$$

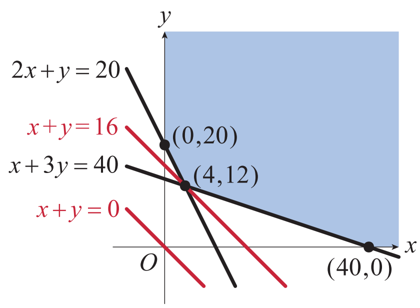
因為需供應 40 個大鐵櫃與 20 個小鐵櫃，所以 $x+3y\ge 40$ 且 $2x+y\ge 20$，又 x, y 皆為正數，可得

$$\begin{cases} x+3y\ge 40 \\ 2x+y\ge 20 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}。$$

工廠 / 鐵櫃	A	B	需求
大	1	3	40
小	2	1	20

94

接著，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上，並畫出通過原點的直線 $x+y=0$，將其平行移動至與解區域相交，如下圖所示。



最後，當直線 $x+y=0$ 往右上方平行移動時，最先通過解區域中的點 $(4,12)$，此時

$$P=x+y=4+12=16\text{（小時）。}$$

故 A 廠工作 4 小時，B 廠工作 12 小時，可使兩工廠的總工作時數最少。

隨堂練習

某工廠以 A, B 兩種材料來生產甲、乙兩型公仔。

① A 材料每公斤可做甲公仔 3 個和乙公仔 5 個。

② B 材料每公斤可做甲公仔 6 個和乙公仔 3 個。

今工廠接到訂單，需供應甲公仔 45 個，乙公仔 40 個。試問這兩種材料各需幾公斤，才能完成訂單並使材料的總重量最少？

A 材料 5 公斤與 B 材料 5 公斤

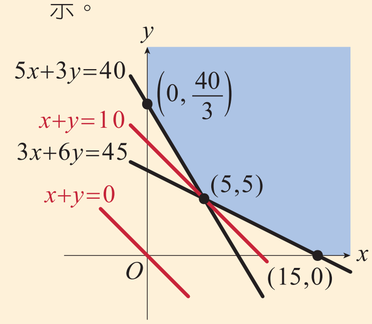
隨堂練習解答

❶ 首先，設工廠使用 A 材料 x 公斤與 B 材料 y 公斤，可得材料的總重量為 $P=x+y$（公斤）。

依題意列式，得

$$\begin{cases}3x+6y\ge 45\\5x+3y\ge 40\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}\text{。}$$

接著，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上，並畫出通過原點的直線 $x+y=0$，將其平行移動至與解區域相交，如圖所示。



最後，當直線 $x+y=0$ 往右上方平行移動時，最先通過解區域中的點 $(5,5)$，此時 $P=x+y=5+5=10$（公斤）。

故使用 A 材料 5 公斤與 B 材料 5 公斤，可使材料的總重量最少。

數學知識家

1 有關線性規劃的歷史請見補充教材。

教學小提醒

1 能從資料圖表的數據轉換成二元一次聯立不等式也是常見的問題。

1 最後，利用頂點法來解決引言的問題。

例題 7

1 某公司所生產的產品，分別存放在甲、乙兩倉庫各有 40 單位與 50 單位，且下表是由各倉庫運到 A、B 兩市場每單位的運費。

倉庫＼市場	A 市場	B 市場
甲倉庫	100 元	140 元
乙倉庫	120 元	150 元

今 A 市場需要產品 30 單位，B 市場需要產品 40 單位，假設由甲倉庫運送 x 單位到 A 市場，y 單位到 B 市場，且其餘所需由乙倉庫運送，在滿足兩市場的需求下，依據以上資料試回答下列問題。

(1) 下表為各倉庫運送到兩倉庫的單位數，完成以下的列聯表。（以 x、y 表示）

倉庫＼市場	A 市場	B 市場	庫存
甲倉庫			40
乙倉庫			50
需求	30	40	

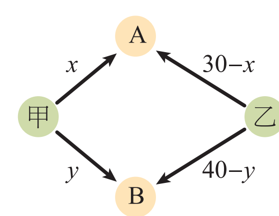
(2) 以 x、y 表示公司花費的運費為________元。

(3) 試問應如何分配從倉庫到市場的運送數量才能最省運費？運費最少為多少元？

解

1 (1) 因為由甲倉庫運送 x 單位到 A 市場，y 單位到 B 市場，所以需由乙倉庫運送 $30-x$ 單位到 A 市場，$40-y$ 單位到 B 市場，整理如下表。

倉庫＼市場	A 市場	B 市場	庫存
甲倉庫	x	y	40
乙倉庫	$30-x$	$40-y$	50
需求	30	40	



96

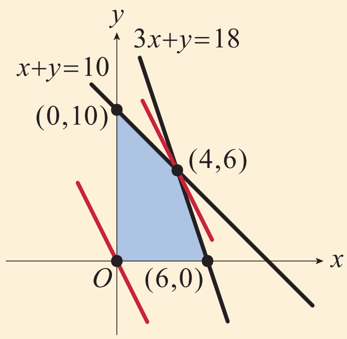
補充例題

1 某投資人打算投資 A，B 兩項目。根據預測，A，B 兩項目可能的獲利率分別為100% 和 50%，可能的虧損率分別為 30% 和 10%。投資人計劃的投資金額不超過10 萬元，要求確保虧損金額不超過1.8 萬元。試問應投資 A，B 兩項目各多少萬元，才能獲得最大利潤？

解：首先，設投資人分別用 x 萬元投資 A 項目，y 萬元投資 B 項目，獲利為 $P=x+0.5y$。

依題意列式，得

$$\begin{cases} x+y\le 10 \\ 0.3x+0.1y\le 1.8 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}。$$



接著，作可行解區域如圖。

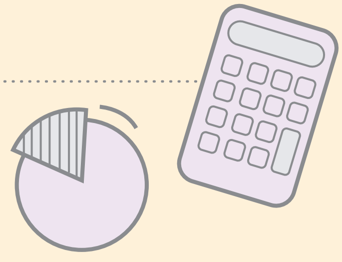
其頂點坐標為 $(0,0)$，$(6,0)$，$(4,6)$，$(0,10)$，

將此四點代入 $P=x+0.5y$，得對應的值如下表所示。

(x,y)	$(0,0)$	$(6,0)$	$(4,6)$	$(0,10)$
$P=x+0.5y$	0	6	7	5

最後，根據頂點法得當 $x=4$，$y=6$ 時，$P=x+0.5y$ 有最大值 7。

故用 4 萬元投資 A 項目，6 萬元投資 B 項目時，可得最大利潤 7 萬元。



(2) 由 (1) 與題意可得運費為

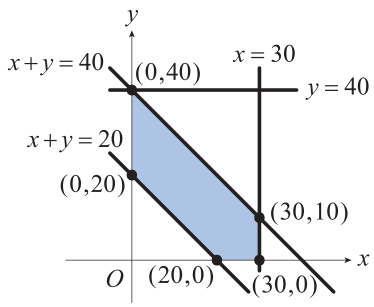
$$100x+140y+120(30-x)+150(40-y)=-20x-10y+9600\text{（元）。}$$

(3) 由 (2) 可得目標函數為

$$P=-20x-10y+9600\text{。}$$

依題意列式，得 $\begin{cases} x+y\le 40 \\ (30-x)+(40-y)\le 50 \\ 30-x\ge 0 \\ 40-y\ge 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} x+y\le 40 \\ x+y\ge 20 \\ 0\le x\le 30 \\ 0\le y\le 40 \end{cases}$。 ①

接著，將聯立不等式 ① 的解圖示在坐標平面上，如下圖所示。

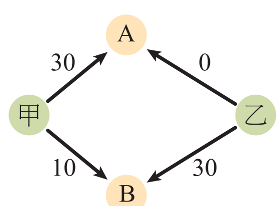


因為聯立不等式的解為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $P=-20x-10y+9600$，求出其值如下表所示。

(x,y)	$(20,0)$	$(30,0)$	$(30,10)$	$(0,40)$	$(0,20)$
P	9200	9000	8900	9200	9400

最後，根據頂點法得知：當 $(x,y)=(30,10)$ 時，$P=-20x-10y+9600$ 有最小值 8900。

故由甲倉庫運送 30 單位到 A 市場、10 單位到 B 市場，且由乙倉庫運送 0 單位到 A 市場、30 單位到 B 市場可得運費最少為 8900 元。



97

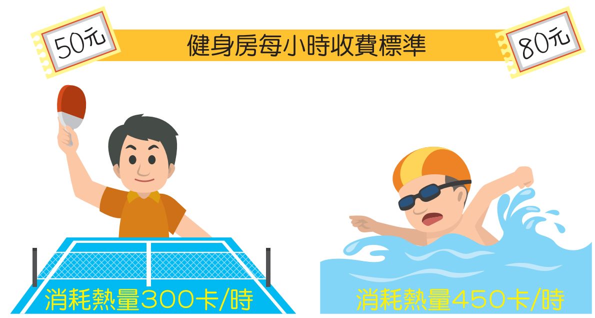
隨堂練習

某人參與某健身房的運動規劃如下。

①打桌球一小時須付費 50 元、游泳一小時須付費 80 元。

②此人每週最多能抽出 8 小時運動，又希望總花費不超過 550 元。

今此人打桌球一小時可消耗熱量 300 卡路里，游泳一小時可消耗熱量 450 卡路里，試問該如何分配兩種運動的時數才可消耗最多熱量？



每週打桌球 3 小時，游泳 5 小時

數學超展開

在 1980 年代的時候，線性規劃就已被廣泛的使用。根據當時的一項調查，美國《財星》雜誌（*Fortune*）名列前五百大的公司中，85% 均曾應用線性規劃的方法來協助公司的營運，例如在有限的資金下找出最高利潤的資金配置，或是在有限的資源下找出最大的生產量，因而使得資金與資源可以有效的被利用。

如今在電腦的發展之下，已經可以使用電腦軟體（如 Excel）或程式語言（如 Python）來解決更複雜的線性規劃問題，只要妥善的輸入對應的線性規劃數學模型，便可快速地找到最佳解。

98

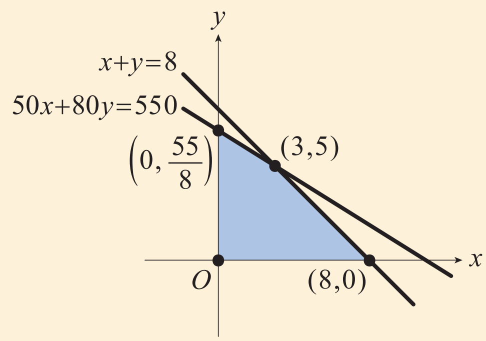
隨堂練習解答

1 首先，設每週打桌球 x 小時，游泳 y 小時，消耗的熱量為 $300x+450y$（卡路里），即目標函數為 $P=300x+450y$。

依題意列式，得

$$\begin{cases} x+y\le 8 \\ 50x+80y\le 550 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}。$$

接著，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上，如下圖所示。



因為聯立不等式的解為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $P=300x+450y$，求出其值如下表所示。

(x,y)	$(0,0)$	$\left(0,\frac{55}{8}\right)$	$(3,5)$	$(8,0)$
P	0	3093.75	3150	2400

最後，根據頂點法可知：當 $(x,y)=(3,5)$ 時，$P=300x+450y$ 有最大值 3150。

故每週打桌球 3 小時，游泳 5 小時，可消耗最多熱量 3150 卡路里。

習題解答

觀念澄清

(1) ○：當直線 $L: x+y=0$ 往右上方平行移動時，最先通過 A 點，所以將 A 點坐標代入 $x+y$，得 $x+y$ 的值最小。

(2) ×：當直線 $L: x+y=0$ 往右上方平行移動時，最後才通過 C 點，所以將 C 點坐標代入 $x+y$，得 $x+y$ 的值最大。

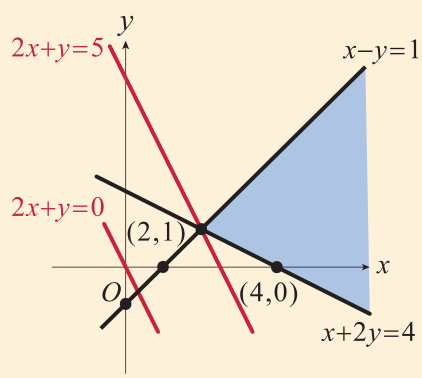
一、基礎題

1. 將 $(0,0)$ 代入 $3x+2y$ 得到 $3\times0+2\times0=0<6$，即 $(0,0)$ 位在 $3x+2y<6$ 的半平面上。
   將選項中的各點分別代入 $3x+2y$，列表如下。

(x,y)	$(1,1)$	$(2,3)$	$(4,0)$	$(1,-2)$
$3x+2y$	5	12	12	-1

   由上表可知，點 $(1,1)$ 與 $(1,-2)$ 亦在 $3x+2y<6$ 的半平面上。
   故選(1)(4)。

2. 首先，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上。接著，畫出通過原點的直線 $2x+y=0$，將其平行移動至與解區域相交，如下圖所示。



   最後，當直線 $2x+y=0$ 往右上方平行移動時，最先通過解區域中的點 $(2,1)$，此時 $2x+y=2\times2+1=5$。
   故根據平行線法可知：當 $(x,y)=(2,1)$ 時，$2x+y$ 有最小值 5。

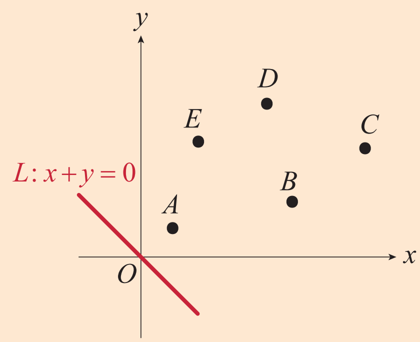
5 習題

觀念澄清

在右圖中，A, B, C, D, E 為坐標平面上的五個點，且直線 $L：x+y=0$。下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) 將 A 點坐標代入 $x+y$，得 $x+y$ 的值最小。

☐ (2) 將 D 點坐標代入 $x+y$，得 $x+y$ 的值最大。



一、基礎題

(1) ○　(2) ×

1 已知直線 $L：3x+2y=6$ 將坐標平面上 L 以外的部分分成兩個半平面，選出所有與原點 $(0, 0)$ 位在同一個半平面的選項。

(1) $(1, 1)$　(2) $(2, 3)$　(3) $(4, 0)$　(4) $(1, -2)$。

(1)(4)

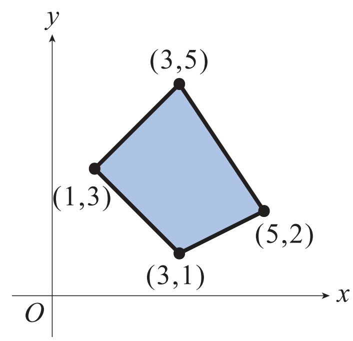
2 已知 x, y 滿足聯立不等式

$$\begin{cases} x+2y \geq 4 \\ x-y \geq 1 \end{cases},$$

求 $2x+y$ 的最小值。

5

3 已知 (x, y) 為右圖中多邊形及其內部的點，求 $3x-2y$ 的最大值與最小值。



最大值 11；最小值 –3

4 已知 x, y 滿足聯立不等式

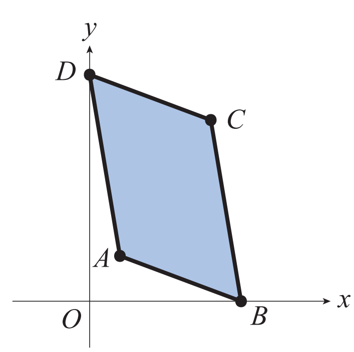
$$\begin{cases} x \le 2 \\ x+y \ge -1 \\ x-2y \ge -4 \end{cases}，$$

求 $5x-3y+8$ 的最大值與最小值。

最大值 27；最小值 –5

二、進階題

5 某線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上由點 $A(2, 3)$, $B(10, 0)$, $C(8, 12)$ 與 $D(0, 15)$ 所圍成的平行四邊形及其內部的點，如右圖所示。已知目標函數 $ax+by$（其中 a, b 為常數）在 C 點有最大值 28，求此目標函數在同個可行解區域內的最小值。



7

3. 因為此多邊形區域為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $3x-2y$ ，求出其值如下表所示。

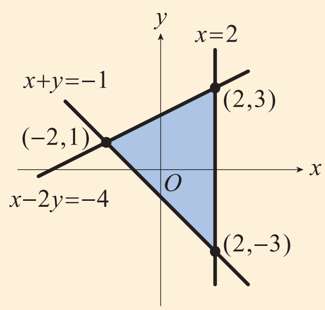
(x,y)	$(1,3)$	$(3,5)$	$(5,2)$	$(3,1)$
$3x-2y$	-3	-1	11	7

故根據頂點法可知：

① 當 $(x,y)=(5,2)$ 時， $3x-2y$ 有最大值 11。

② 當 $(x,y)=(1,3)$ 時， $3x-2y$ 有最小值 -3 。

4. 首先，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上。



接著，因為聯立不等式的解為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $5x-3y+8$ ，求出其值如下表所示。

(x,y)	$(2,3)$	$(2,-3)$	$(-2,1)$
$5x-3y+8$	9	27	-5

最後，根據頂點法可知：

① 當 $(x,y)=(2,-3)$ 時， $5x-3y+8$ 有最大值 27。

② 當 $(x,y)=(-2,1)$ 時， $5x-3y+8$ 有最小值 -5 。

二、進階題

5. 由 $ax+by$ 在 C 點有最大值 28，可得

① $8a+12b=28$ ，即 $2a+3b=7$ 。

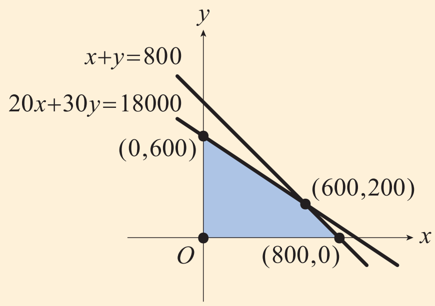
② 根據平行線法可知，當直線 $ax+by=0$ 往右上方平行移動時，最後才通過 C 點，
也就是說，最先通過 A 點，所以將 A 點坐標代入 $ax+by$ ，得 $2a+3b$ 的值為最小。

綜合①②，可得此目標函數在同個可行解區域內的最小值為 $2a+3b=7$ 。

6. 首先，設批發西瓜 x 公斤，椰子 y 公斤，獲利為 $12x+16y$（元），即目標函數為 $P=12x+16y$ 。依題意列式，得

$$\begin{cases} x+y\le 800 \\ 20x+30y\le 18000 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}。$$

接著，將聯立不等式的解圖示在坐標平面上，如下圖所示。



因為聯立不等式的解為一封閉的多邊形區域，所以將其頂點坐標分別代入 $P=12x+16y$ ，求出其值如下表所示。

(x,y)	$(0,0)$	$(0,600)$	$(600,200)$	$(800,0)$
P	0	9600	10400	9600

最後，根據頂點法可知：當 $(x,y)=(600,200)$ 時， $P=12x+16y$ 有最大值 10400。
故應批發西瓜 600 公斤，椰子 200 公斤，可得最大利潤 10400 元。

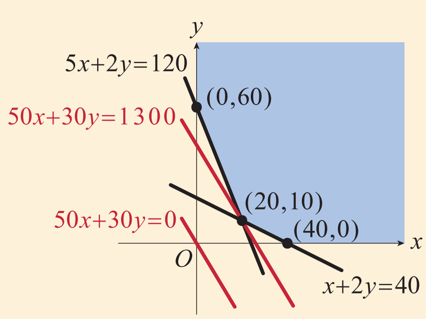
7. 首先，設該素人在平面媒體打廣告 x 次，在網路直播 y 次，花費為 $50x+30y$（萬元），
即目標函數為 $P=50x+30y$ 。依題意列式，得

$$\begin{cases} 0.01x+0.02y\ge 0.4 \\ 0.02x+0.008y\ge 0.48 \\ x\in\mathbb{N} \\ y\in\mathbb{N} \end{cases}。$$

整理得

$$\begin{cases} x+2y\ge 40 \\ 5x+2y\ge 120 \\ x\in\mathbb{N} \\ y\in\mathbb{N} \end{cases}。$$

接著，畫出通過原點的直線 $50x+30y=0$ ，將其平行移動至與解區域相交，如下圖所示。



最後，當直線 $50x+30y=0$ 往右上方平行移動時，最先通過解區域中的點 $(20,10)$ ，
此時 $P=50\times 20+30\times 10=1300$（萬元）。
故根據平行線法可知：在平面媒體打廣告 20 次，網路直播 10 次，可得最少花費 1300 萬元。

6 某商人有輛可載重 800 公斤的小貨車，想批發西瓜與椰子來販售。

① 西瓜的成本每公斤 20 元、椰子的成本每公斤 30 元。

② 批發的成本不超過 18000 元。

今西瓜的利潤每公斤 12 元，椰子的利潤每公斤 16 元，試問應批發西瓜與椰子各多少公斤，才能獲得最大利潤？

西瓜 600 公斤，椰子 200 公斤

7 某素人（曝光率與民調支持度皆為 0）參與市長選舉，經競選團隊研究顯示下列資訊。

① 平面媒體打廣告一次，參選人的曝光率提升 1%，民調支持度上升 2%。

② 網路直播一次，參選人的曝光率提升 2%，民調支持度上升 0.8%。

③ 曝光率至少 40% 且民調支持度至少 48% 才有機會當選。

今在平面媒體打廣告一次需花費 50 萬元，網路直播一次需花費 30 萬元，試問該素人要如何分配在平面媒體打廣告與網路直播的次數，才有機會當選並花費最少？最少花費為多少元？

平面媒體打廣告 20 次；網路直播 10 次；花費為 1300 萬元

補充教材

線性規劃的歷史

與其他傳統數學學門相比較，線性規劃算是非常「年輕」卻非常「實用」的一門應用數學。根據八十年代的一項調查，在美國「財星」雜誌 (Fortune) 名列前五百名的大公司中，百分之八十五均曾應用線性規劃的方法來協助公司的營運。由此可見線性規劃應用面的寬廣與普及。

關於線性規劃的發展，根據一般的說法，線性規劃問題是由美國的丹齊格教授（G. B. Dantzig, 1914-2005）在 1947 年前後孕育出來的。那個時候他擔任美國空軍統計控制的戰鬥分析處主任，處理供應鏈的補給和管理成千上百的人員和物資。由於這類問題牽涉很廣也很複雜，所以丹齊格教授先考慮最簡單的線性結構，將有關的函數一律簡化成線性形式來處理。其結果便在 1948 年以「線性結構的規劃」(Programming in Linear Structure) 的標題發表。至於「線性規劃」這個名稱，則是另一位經濟學家科普曼斯（T. C. Koopmans, 1910-1985）和丹齊格教授兩人於 1948 年夏天在美國加州聖塔摩尼加(Santa Monica)海灘散步時擬定的。在 1947 到 1949 兩年間，線性規劃裡的一些重要觀念，包括最有名的「單形法」(Simplex method)，都陸續見諸於世。而且從 1947 年開始，科普曼斯便明確指出線性規劃可以做為傳統經濟分析的利器。

這兒特別要注意的是線性規劃的理論基礎絕不是一夕生成。早在 1826 年左右法國的大數學家傅立葉（J. B. J. Fourier, 1768-1830）便研究過如何解決一組聯立線性不等式的問題。這以後還有不少的數學家做過相關的研究工作。到了 1939 年，數學家卡魯什（W. Karush, 1917-1997）在芝加哥大學的碩士論文更提出在有限維空間裡滿足不等式約束的函數其最優化的條件 (optimality conditions)。在同一年裡，蘇聯的經濟學家康托羅維奇（L. V. Kantorovich, 1912-1986）更提出一些很特殊的線性規劃模式來做簡單的生產計劃。他甚至還有一套簡化的方法來求解呢！不幸的是康托羅維奇的工作始終未為蘇聯之外的世界所知，一直到了丹齊格教授建立起完整的線性規劃理論之後數十年方為世人所知。

在 1950 和 1960 年代，線性規劃的內容愈變愈豐富，更有許多成功的實用案例，所以愈來愈受世人矚目。到了 1975 年，瑞典皇家科學院決定將當年的諾貝爾經濟獎頒發給前面提到的經濟學家康托羅維奇和經濟學家科普曼斯以表彰他們在「資源最佳分配理論」的貢獻。由於這項最佳分配是藉由線性規劃模式來達成，所以線性規劃便成了萬眾矚目的焦點。

四年之後（亦即 1979 年），線性規劃再次成了報章雜誌的頭條新聞。這次是因為一位蘇聯數學家卡其揚（L. G. Khachiyan, 1952-2005），他利用「橢球法」 (ellipsoid method)的概念印證出線性規劃問題可在多項式時間內求得解答。從純理論的觀點而言，卡其揚的「橢球法」在最惡劣的情況下所需要的計算量要比 「單形法」增長的緩慢。所以有希望用之解決超大型的線性規劃問題，包括全球資源的最佳分配在內。 這也就是華爾街日報（Wall Street Journal）將「橢球法」的發現列為頭條新聞的重要原因。

不幸的是理論歸於理論，在實際計算上，「橢球法」的一般表現反倒不如傳統的「單形法」來得有效。於是這方面的學者專家重新構想是否能設計出一套解法無論在理論上和實際計算上均能超越「單形法」？這個問題的答案到了 1984 年由一位美國電話電報公司貝爾實驗室的印度裔科學家卡馬卡（N. Karmarkar, 1956）揭曉。他設計出一項「內點法」來解線性規劃問題，不但理論上較「單形法」為優，而且經由實際驗證適合解決超大型的問題。從此之後，「內點法」的研究蔚為一時風潮，不斷有推陳出新的結果。

摘自
數學傳播，十七卷一期《線性規劃(Linear Programming)》－方述誠
https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d171/17104.pdf