3 微分

4 函數性質的判定

數學名言 科學是心靈的微分，藝術是積分。它們分開時可能很漂亮，但只有結合起來才是最大的。

一羅納德・羅斯

3 微分

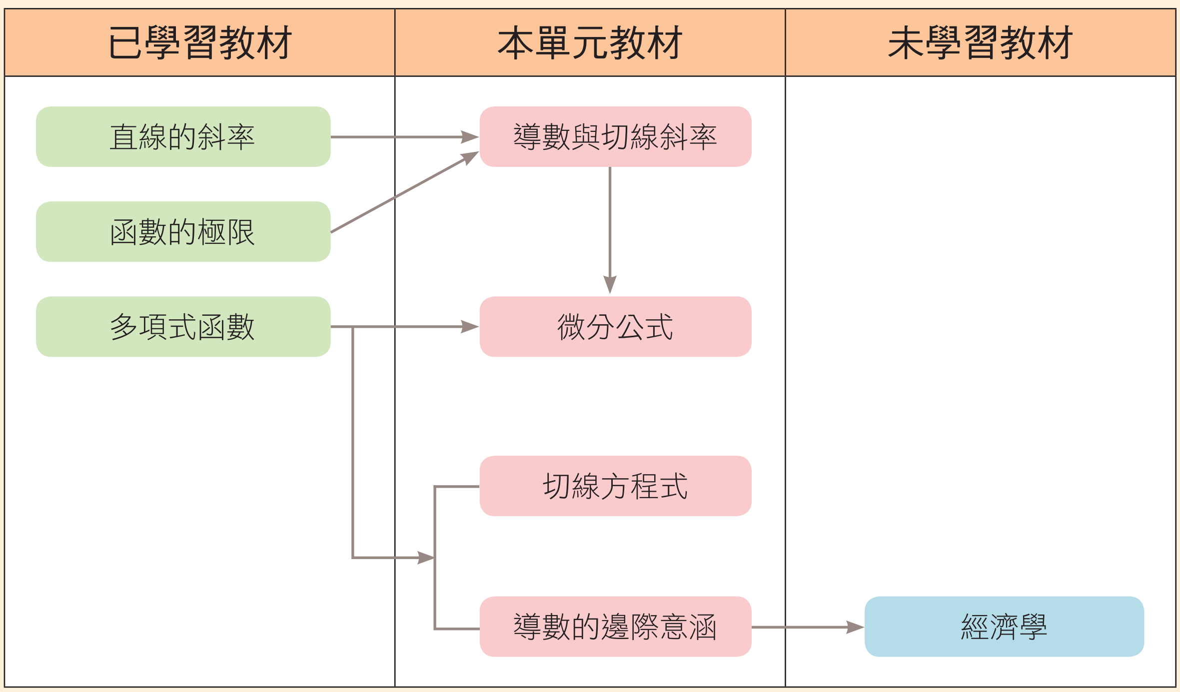
一 教材摘要

首先，利用切線的斜率介紹導數的定義，接著由各個點的導數引進導函數。接著，求導函數的公式並進而導出多項式函數的導函數公式。最後，再介紹導數的二個應用：求切線方程式與導數的邊際意涵。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 知道導數的定義及導數就是切線斜率。 2. 能使用 4 個微分公式。 3. 能求多項式函數的導函數。 4. 能求過圖形上一點與過圖形外一點的切線方程式。 5. 能知道曲線上的切線並不是都與該曲線恰交於一點。 6. 了解導數的邊際意涵。	12

三 教材地位分析


已學習教材
本單元教材
未學習教材
直線的斜率
函數的極限
多項式函數
導數與切線斜率
微分公式
切線方程式
導數的邊際意涵
經濟學

3 微分

假設你是產品經理，正在思考該不該增加產量。這時想做出好的決定，不單只是思考產品的總利潤，也要考量在現狀上每多生產一件產品，所增加的收入是否會大於要追加的成本。只要有利潤，通常就會要「多生產一件」，這種「多生產一件」就是邊際的概念。

介紹導數及導數的邊際意涵，是本節主要的內容。

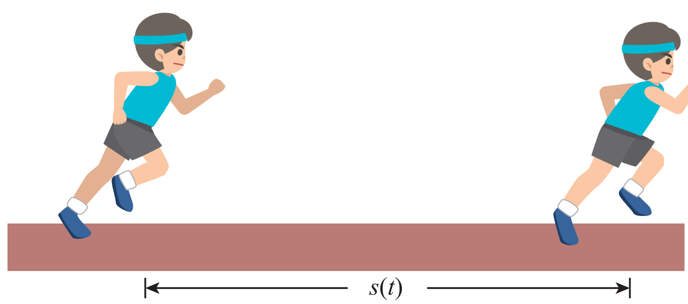
▲圖 1

教學要點

1 利用切線的斜率介紹導數的定義，並介紹可微分與不可微分。

甲 導數與切線

1 假設在筆直的跑道上，某跑者在時間 t（$0 \le t \le 6$）秒的位置函數為 $s(t)=0.2t^2+5t$（公尺），如圖 2 所示。



▲圖 2

那麼，要如何求出此人在 $t=5$ 的瞬時速度呢？在計算平均速度時，如果所取的時間間隔愈小，則平均速度就愈能描述某一時刻物體真正的運動情形；當時間間隔趨近於 0 時，這些平均速度的極限就是該時刻的瞬時速度（或簡稱速度）。

因此，要計算該跑者在 $t=5$ 的瞬時速度，我們先考慮 t（$t\neq 5$）秒與 5 秒間的平均速度

$$\frac{s(t)-s(5)}{t-5}\text{（公尺／秒），}$$

再求出當 t 趨近 5 時，平均速度 $\frac{s(t)-s(5)}{t-5}$ 的極限，即

$$\lim_{t\to 5}\frac{s(t)-s(5)}{t-5}=\lim_{t\to 5}\frac{0.2t^2+5t-30}{t-5}=\lim_{t\to 5}\frac{0.2(t-5)(t+30)}{t-5}=\lim_{t\to 5}(0.2t+6)=7\text{。}$$

故此人在 $t=5$ 的瞬時速度為 7（公尺／秒）。

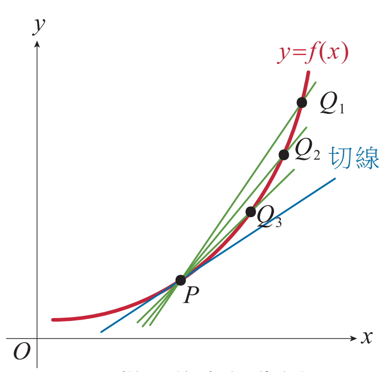
接下來，我們把「位置函數→平均速度→瞬時速度」這兩段計算過程應用到一般的函數，介紹導數與切線的斜率。

設 $P(a,f(a))$ 是函數 $f(x)$ 圖形上的一個定點，而 $Q(x,f(x))$ 是圖形上異於 P 的一點，連接 P 與 Q 可得一割線 PQ，如圖 3 所示。根據斜率的定義，得割線 PQ 的斜率為

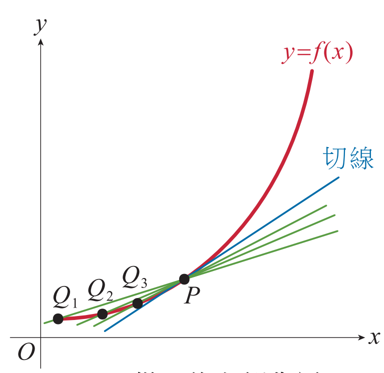
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{。}$$

若令 $\Delta x=x-a$ 為 x 的變化量，$\Delta y=f(x)-f(a)$ 為 y 的變化量，則割線 PQ 的斜率可表示為

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{。}$$



(a) Q 從 P 的右側靠近



(b) Q 從 P 的左側靠近

▲圖 3

71

現在讓 Q 點沿著函數圖形向 P 點靠近，使變化量 $|\Delta x|$ 逐漸減小（$\Delta x \neq 0$）。當 Δx 趨近於 0 時，如果這些割線的斜率趨近於定值 m，即

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

那麼稱通過 P 點且斜率為 m 的直線為 $f(x)$ 的圖形在 P 點的**切線**，而 P 點稱為**切點**。因此，當極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在時，此極限就是以點 $(a, f(a))$ 為切點的切線斜率，我們稱這個極限為函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的**導數**，並以符號 $f'(a)$ 表示。

1

導數與切線的斜率

(1) **導數的定義：**

當極限 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在時，稱此極限為函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的**導數**，記作 $f'(a)$，即

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}。$$

(2) **導數與切線的斜率：**

若導數 $f'(a)$ 存在，則稱通過點 $P(a, f(a))$ 且斜率為 $f'(a)$ 的直線為函數 $f(x)$ 的圖形在 P 點的**切線**，而 P 點稱為**切點**。

利用直線的點斜式，我們知道：以點 $P(a, f(a))$ 為切點的切線方程式為

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)。$$

教學小提醒

1 導數的另一個定義：

令 $x=a+h$，則

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}。$$

不補充也不會影響後面的課程，請教師自行斟酌。

72

練習求導數與切線方程式。

例題 1

設函數 $f(x)=x^2$。

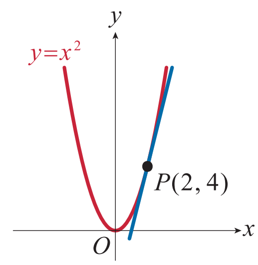
(1) 求導數 $f'(2)$。

(2) 在 $f(x)$ 的圖形上，求以點 $P(2,4)$ 為切點的切線方程式。

解

(1) 由導數的定義，得

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4。$$



(2) 因為所求切線的斜率等於 $f'(2)=4$，所以利用直線的點斜式，得切線方程式為

$$y-4=4(x-2)，$$

即 $y=4x-4$。

隨堂練習

設函數 $f(x)=x^2+x$。

(1) 求導數 $f'(1)$。

(2) 在 $f(x)$ 的圖形上，求以點 $P(1,2)$ 為切點的切線方程式。

(1) 3 (2) $y=3x-1$

教學小提醒

1 這裡先利用導數的定義求導數及切線方程式，稍後再借助微分公式來求。

隨堂練習解答

1 (1) 由導數的定義，得

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3。$$

(2) 因為所求切線的斜率等於 $f'(1)=3$，所以利用直線的點斜式，得切線方程式為

$$y-2=3(x-1)，$$

即 $y=3x-1$。

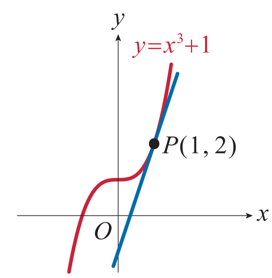
再練習一個三次函數的例題。

例題 2

在函數 $f(x)=x^3+1$ 的圖形上，求以點 $P(1, 2)$ 為切點的切線方程式。

解

由導數的定義，得



$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3+1\right)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3。$$

因為所求切線的斜率等於 $f'(1)=3$，所以利用直線的點斜式，得切線方程式為

$$y-2=3(x-1)，$$

即 $y=3x-1$。

隨堂練習

在函數 $f(x)=x^3$ 的圖形上，求以點 $P(2, 8)$ 為切點的切線方程式。

$y=12x-16$

補充例題

1 已知函數 $f(x)$ 的圖形上，以點 $P(4, 6)$ 為切點的切線通過點 $Q(2, 1)$，求導數 $f'(4)$ 的值。

解：依題意，得知直線 PQ 為切線，且其斜率為

$\frac{6-1}{4-2}=\frac{5}{2}$。

因此，導數 $f'(4)=\frac{5}{2}$。

隨堂練習解答

1 由導數的定義，得

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)$$

$$=12。$$

因為所求切線的斜率等於 $f'(2)=12$，所以利用直線的點斜式，得切線方程式為

$y-8=12(x-2)$，

即 $y=12x-16$。

了解導數的意義之後，讓我們來思考一個問題：每個函數在其定義域中的每一個數都有導數嗎？先看以下的實例。

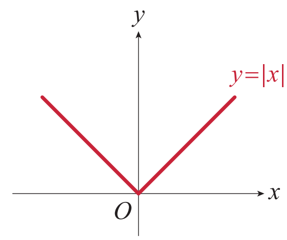
例題 3

函數 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 處的導數是否存在？

解

由導數的定義，得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}。$$



因為

右極限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，

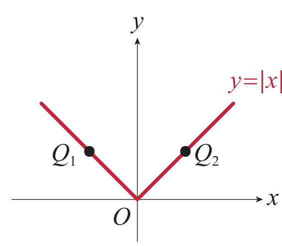
左極限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，

即右極限 ≠ 左極限，所以極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

故函數 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 處的導數不存在。

由例題 3 知道，並不是所有函數在其定義域中的每一個數都有導數。當函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數 $f'(a)$ 存在時，我們稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處**可微分**。反之，當 $f'(a)$ 不存在時，稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處**不可微分**。

我們也可利用 $f(x)=|x|$ 的圖形來解釋為何 $f(x)$ 在 $x=0$ 處導數不存在：設 $Q(x,f(x))$ 為函數 $f(x)$ 圖形上異於 O 的一點，連接 O 與 Q 可得一割線 OQ，如圖 4 所示。當 Q 點在 O 點左邊（即 $x<0$）時，割線 OQ 斜率恆為 -1；當 Q 點在 O 點右邊（即 $x>0$）時，割線 OQ 斜率恆為 1。



▲圖 4

因此，當 x 從左、右兩邊趨近於 0 時，割線的斜率不會趨近於一個定值，於是 $f(x)$ 在 $x=0$ 處無瞬間變化率。故 $f(x)$ 在 $x=0$ 處的導數不存在。

教學小提醒

❶ 導數不存在，舉這個例題即可，不須在導數不存在上著墨太多。

75

隨堂練習

1 函數 $f(x)=|x|$ 在 $x=-2$ 處是否可微分？

是，可微分

乙 導函數與微分公式

接下來，我們將導數作進一步的推廣。

(一) 導函數

1 萊布尼茲（G. W. Leibniz，德國，1646 ～ 1716）與牛頓先後獨立提出微積分的基本理論，並創造微積分中使用的符號。例如，採用微分的符號 $\dfrac{dy}{dx}$。

前面介紹了函數在某特定點的導數，現在進一步將其一般化，並以函數 $f(x)=x^2$ 為例說明如下：

設 a 為實數。由導數的定義，得

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x+a)=2a。$$

也就是說，函數 $f(x)=x^2$ 定義域內的每一個數 a 之導數 $f'(a)$ 均存在，且 $f'(a)=2a$。這個從 a 對應到 $f'(a)=2a$ 的對應關係構成了另一個函數，稱其為 $f(x)$ 的**導函數**，記作 $f'(x)$，即

$$f'(x)=2x。$$

一般而言，給定函數 $f(x)$，當 $f(x)$ 定義域中的每一個數 a 其導數 $f'(a)$ 均存在時，稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的導函數，並稱 $f(x)$ 為**可微分函數**。又當函數 $f(x)$ 在開區間 I 內的每一數之導數都存在時，稱 $f(x)$ 在區間 I 上可微分。

隨堂練習解答

1 由導數的定義，得

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{|x|-2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{-x-2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(-1)=-1。$$

因為 $f'(-2)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 處可微分。

教學要點

1 由各個點的導數引進導函數，及推導微分公式，再利用微分公式求導函數。

教學小提醒

1 此處可適時介紹牛頓與萊布尼茲的故事，以增進學生對數學史的素養。

補充例題

1 已知 $f(x)=x|x|$，求導數 $f'(2)$ 的值。

解：由導數的定義，得

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x|x|-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4。$$

函數 $y=f(x)$ 的導函數除可記作 $f'(x)$ 外，還可記為

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ (f(x))',$$

其中符號 $\frac{dy}{dx}$ 是由萊布尼茲首先引進。例如，函數 $f(x)=x^2$ 的導函數 $f'(x)=2x$，也可記為

$$\frac{d}{dx}x^2=2x \text{ 或 } \left(x^2\right)'=2x \text{。}$$

底下，我們練習利用導數的定義，求導函數。

例題 4

求函數 $f(x)=x^3+2x^2$ 的導函數。

解

設 a 為實數。計算 $f'(a)$ 如下：

$$\begin{aligned}
f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^3+2x^2\right)-\left(a^3+2a^2\right)}{x-a}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^3-a^3\right)+2\left(x^2-a^2\right)}{x-a}\\
&=\lim_{x\to a}\left(\left(x^2+ax+a^2\right)+2(x+a)\right)\\
&=3a^2+4a\text{。}
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+4x$。

隨堂練習

求函數 $f(x)=3x^2+4x$ 的導函數。 1

$f'(x)=6x+4$

隨堂練習解答

1 設 a 為任意實數，計算 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(3x^2+4x\right)-\left(3a^2+4a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{3\left(x^2-a^2\right)+4(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(3(x+a)+4)=6a+4\text{。}$$

故 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=6x+4$。

教學小提醒

1 介紹微分公式時，應依序逐一推導並舉例，進度不宜太快。

當 $f(x)$ 為可微分函數時，「求函數 $f(x)$ 的導函數」的過程，稱為**將函數 $f(x)$ 微分**。前面求導數及導函數的計算方法，都是根據導數的定義直接求得。但這種計算方法對一般的函數而言，有時會顯得繁雜。為克服這個問題，我們需要引進微分公式。

(二) 微分公式 1

介紹並推導一些常用的微分公式。

公式 1

若常數函數 $f(x)=c$，則 $f'(x)=0$，即

$$(c)'=0。$$

證明：設 a 為實數。計算 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=\lim_{x\to a}0=0。$$

故 $f'(x)=0$。

公式 2

若函數 $f(x)=x^n$（n 為正整數），則 $f'(x)=nx^{n-1}$，即

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}。$$

證明：設 a 為實數。

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}。$$

利用綜合除法，得

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)。$$

因此

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \cdots + a^{n-2} x + a^{n-1} \right)$$

$$= na^{n-1} \text{。}$$

故 $f'(x) = nx^{n-1}$。

公式 3

若函數 $f(x)$ 是可微分函數，c 為常數，則 $cf(x)$ 也是可微分函數，且

$$\left(cf(x) \right)' = cf'(x) \text{。}$$

證明：設 a 是 $f(x)$ 定義域中的實數，並令 $h(x) = cf(x)$。計算 $h'(a)$ 如下：

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a}$$

$$= c \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= cf'(a) \text{。}$$

故 $h(x) = cf(x)$ 也是可微分函數，且 $h'(x) = cf'(x)$。

公式 4

若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是可微分函數，則 $f(x) + g(x)$ 也是可微分函數，且

$$\left(f(x) + g(x) \right)' = f'(x) + g'(x) \text{。}$$

證明：設 a 是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 共同定義域中的實數，並令 $h(x) = f(x) + g(x)$。計算 $h'(a)$ 如下：

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\left(f(x) + g(x) \right) - \left(f(a) + g(a) \right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)$$

79

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

（因為 $f(x), g(x)$ 可微分）

$$=f'(a)+g'(a)\text{。}$$

故 $h(x)=f(x)+g(x)$ 是可微分函數，且 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$。

利用以上四個公式，求多項式函數 $f(x)=4x^3-3x^2+5$ 的導函數：

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(4x^3-3x^2+5\right)'\\&=\left(4x^3\right)'+\left(-3x^2\right)'+(5)'\\&=4\left(x^3\right)'+(-3)\left(x^2\right)'+(5)'\\&=4\cdot 3x^2+(-3)\cdot 2x+0\\&=12x^2-6x\text{。}\end{aligned}$$

一般而言，利用公式 1 ～ 4，可以推得多項式函數的導函數公式。

多項式函數的導函數公式

實係數多項式函數

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

為可微分函數，且其導函數為

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1\text{。}$$

有了這個公式後，求多項式函數的導函數就方便多了。

例題 5

求函數 $f(x)=2x^3-3x^2-5x+4$ 的導函數。

解

利用上述公式，得

$$f'(x)=3\cdot 2x^2-2\cdot 3x-5=6x^2-6x-5\text{。}$$

80

由以上的討論知道：多項式函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 仍是多項式函數，所以可繼續再求 $f'(x)$ 的導函數。我們將 $f'(x)$ 的導函數稱為 $f(x)$ 的**二階導函數**，並以符號 $f''(x)$ 表示。例如，在例題 5 中，

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 4,$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 5,$$
$$f''(x) = 12x - 6。$$

隨堂練習

設函數 $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 8$。

(1) 求導函數 $f'(x)$。

(2) 求二階導函數 $f''(x)$。

(1) $8x^3 + 3x^2 - 6x + 4$
(2) $24x^2 + 6x - 6$

1 **補充例題**

1 1 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$，求 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f'(x) - f'(3)}{x - 3}$ 的值。

解：因為

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$,

$f''(x) = 6x - 4$，

所以

$$\lim_{x \to 3} \frac{f'(x) - f'(3)}{x - 3} = f''(3) = 6 \times 3 - 4 = 14。$$

隨堂練習解答

1 利用微分公式，得

(1) $f'(x) = 4 \cdot 2x^3 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 3x + 4 = 8x^3 + 3x^2 - 6x + 4$。

(2) $f''(x) = 3 \cdot 8x^2 + 2 \cdot 3x - 6 = 24x^2 + 6x - 6$。

教學要點

1 介紹導數的二個應用：求切線方程式與導數的邊際意涵。

1

丙 導數的應用

我們來介紹導數的二個應用。

(一) 求切線方程式

本單元一開始提及，若導數 $f'(a)$ 存在，則稱通過點 $P(a, f(a))$ 且斜率為 $f'(a)$ 的直線為函數 $f(x)$ 的圖形在 P 點的切線，而 P 點稱為切點。現在有了微分公式後，求切線方程式就更方便了。

1

例題 6

在函數 $f(x)=x^8-x^3+x+2$ 的圖形上，求以點 $P(1, 3)$ 為切點的切線方程式。

解

利用微分公式，計算 $f'(x)$ 如下：

$$f'(x)=8x^7-3x^2+1 。$$

因為所求切線的斜率等於

$$f'(1)=8-3+1=6，$$

所以切線方程式為 $y-3=6(x-1)$，即 $y=6x-3$。

1

隨堂練習

在函數 $f(x)=x^5+x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ 的圖形上，求以點 $P(-1, 2)$ 為切點的切線方程式。

$y=5x+7$

補充例題

1 已知兩函數 $f(x)=x^2+ax+b$ 與 $g(x)=-x^3+c$ 的圖形有一交點 $A(1,-2)$，且在 A 點處有共同的切線 L，求實數 a,b,c 的值。

解：因為 $A(1,-2)$ 在兩函數的圖形上，

所以 $\begin{cases}-2=1+a+b\\-2=-1+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-3\\c=-1\end{cases}$。

又因為 $f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-3x^2$，所以共同切線 L 的斜率為

$$f'(1)=2+a \text{ 或 } g'(1)=-3，$$

得 $2+a=-3\Rightarrow a=-5$，解得 $a=-5$，$b=2$，$c=-1$。

隨堂練習解答

1 利用微分公式，計算 $f'(x)$ 如下：

$$f'(x)=5x^4+4x^3+6x^2+6x+4。$$

因為所求切線的斜率等於

$$f'(-1)=5-4+6-6+4=5，$$

所以切線方程式為 $y-2=5(x+1)$，即 $y=5x+7$。

補充例題

1 已知 $f(x)=x^3+2x+5$ 的切線與直線 $y=5x+4$ 平行者有二條，求此兩條切線的距離。

解：導函數 $f'(x)=3x^2+2$。令 $f'(x)=3x^2+2=5$，解得 $x=\pm 1$。

因為 $f(1)=8, f(-1)=2$，所以切點為 $(1,8),(-1,2)$。

因此，兩條切線為 $y-8=5(x-1)$ 與 $y-2=5(x+1)$，

即 $5x-y+3=0$ 與 $5x-y+7=0$。

它們的距離為 $\dfrac{|3-7|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{26}}=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$。

隨堂練習解答

1 函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+2ax+b$。

因為點 $(-2,2)$ 在 $f(x)$ 的圖形上，且以其為切點的切線斜率為 1，所以

$$\begin{cases} f(-2)=-8+4a-2b=2 \\ f'(-2)=12-4a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=5 \\ 4a-b=11 \end{cases}。$$

解得 $a=3, b=1$。

當切線斜率給定時，可以利用導函數求出切點坐標。

例題 7

在函數 $f(x)=2x^3+3x^2-9x+5$ 的圖形上，已知以 P 為切點的切線斜率為 3，求切點 P 的坐標。

解

設切點 P 的坐標為 $(a, f(a))$。因為 $f'(x)=6x^2+6x-9$，

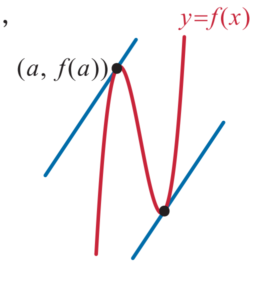
且切線斜率為 3，

所以

$$f'(a)=6a^2+6a-9=3，$$

整理得

$$a^2+a-2=0。$$



解得 $a=1$ 或 $a=-2$。

又因為 $f(1)=1$，$f(-2)=19$，所以 P 的坐標為 $(1, 1)$ 或 $(-2, 19)$。

隨堂練習

已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的圖形和直線 $x-y+4=0$ 相切於點 $(-2, 2)$，求實數 a, b 的值。

$a=3, b=1$

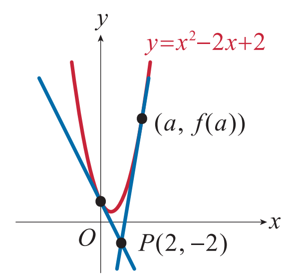
83

在例題 6 中，已經知道如何求以「圖形上一點」為切點的切線方程式。現在，再介紹如何求過「圖形外一點」的切線方程式。

例題 8

已知 $P(2,-2)$ 為二次函數 $f(x)=x^2-2x+2$ 圖形外一點，求過 P 點的切線方程式。

解



設切點的坐標為 $\left(a, f(a)\right)$。因為 $f'(x)=2x-2$，所以切線的斜率為

$$f'(a)=2a-2。$$

另一方面，因為切線通過切點 $\left(a, f(a)\right)$ 及 $P(2,-2)$，所以切線的斜率為

$$\frac{f(a)+2}{a-2}。$$

綜合上述兩個切線斜率，得

$$\frac{f(a)+2}{a-2}=2a-2，$$

即 $\left(a^2-2a+2\right)+2=(a-2)(2a-2)$。整理得

$$a^2-4a=0，$$

解得 $a=0$ 或 4。

① 當 $a=0$ 時，切線斜率為 $f'(0)=2\times0-2=-2$，方程式為

$$y+2=-2(x-2)，即 y=-2x+2。$$

② 當 $a=4$ 時，切線斜率為 $f'(4)=2\times4-2=6$，方程式為

$$y+2=6(x-2)，即 y=6x-14。$$

故過 P 點的切線有兩條，其方程式分別為

$$y=-2x+2 與 y=6x-14。$$

隨堂練習

❶ 已知 $P(1,1)$ 為二次函數 $f(x)=-x^2+1$ 圖形外一點，求過 P 點的切線方程式。

$y=1$ 與 $y=-4x+5$

(二) 導數的邊際意涵

「邊際」是經濟學中的重要術語，經濟學家把它做為理論分析的工具，應用於可以衡量的事物（例如成本）上。在介紹之前，我們先看底下的例題。

例題 9

已知生產 x 件產品的成本函數為

$$C(x)=2000+50x-0.05x^2 \text{（元）},$$

回答下列問題。

(1) 求產量從 20 件增加到 21 件所增加的成本。

(2) 求導數 $C'(20)$ 的值。

解

(1) 由成本函數 $C(x)$，得所增加的成本為

$$\begin{aligned} C(21)-C(20) &= \left(2000+50\times21-0.05\times21^2\right)-\left(2000+50\times20-0.05\times20^2\right) \\ &= 50\times(21-20)-0.05\times\left(21^2-20^2\right) \\ &= 47.95 \text{（元）}。\end{aligned}$$

(2) 利用微分公式，得導函數 $C'(x)=50-0.1x$。因此

$$C'(20)=50-0.1\times20=48。$$

隨堂練習解答

❶ 設切點的坐標為 $(a,f(a))$。

因為 $f'(x)=-2x$，所以切線的斜率為 $f'(a)=-2a$。

另一方面，由切線通過 $(a,f(a))$ 及 $(1,1)$ 兩點，也可得切線的斜率為 $\dfrac{f(a)-1}{a-1}$。

綜合上述兩個切線斜率，得 $\dfrac{f(a)-1}{a-1}=-2a$

$\Rightarrow \left(-a^2+1\right)-1=(-2a)(a-1)$

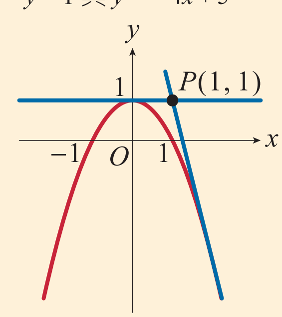
$\Rightarrow a^2-2a=0$，

解得 $a=0$ 或 2。

① 當 $a=0$ 時，切線斜率為 $f'(0)=-2\times0=0$，方程式為 $y-1=0(x-1)$，即 $y=1$。

② 當 $a=2$ 時，切線斜率為 $f'(2)=-2\times2=-4$，方程式為 $y-1=-4(x-1)$，即 $y=-4x+5$。

故通過 P 點的切線有兩條，其方程式分別為 $y=1$ 與 $y=-4x+5$。



85

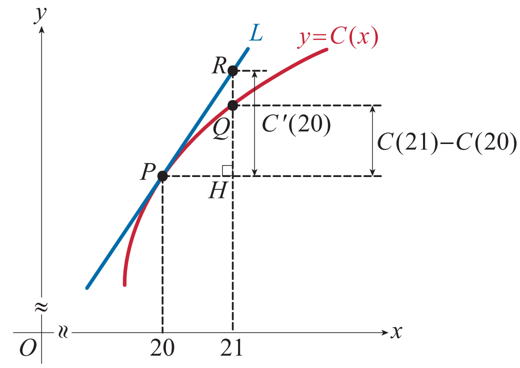
在例題 9 中，(1) 與 (2) 的值很接近，原因為何呢？理由如下：
如圖 5，點 $P(20, C(20))$ 為函數 $y = C(x)$ 圖形上一點，過 P 點的切線為

$$L：y - C(20) = C'(20)(x - 20)，$$

鉛直線 $x = 21$ 交函數圖形於點 $Q(21, C(21))$，交切線 L 於點

$$R(21, C(20) + C'(20))。$$

$H(21, C(20))$ 為鉛直線 $x = 21$ 上一點。



▲圖 5

由圖 5 知 $\overline{HQ} = C(21) - C(20)$，且其值近似於 $\overline{HR} = C'(20)$，即

$$C(21) - C(20) \approx C'(20)，$$

這就是「產量從 20 件增加到 21 件所增加的成本 $C(21) - C(20)$」近似於「導數 $C'(20)$」的原因。

一般而言，在產量 a 件時，多生產一件產品所增加的成本，即 $C(a+1) - C(a)$，稱為產量 a 件時的**邊際成本**。事實上，仿照以上的討論，產量 a 件時的邊際成本 $C(a+1) - C(a)$ 會近似於導數 $C'(a)$。

教學小提醒

1 此處可多舉一些生活實例說明邊際成本的意涵。例如，僅生產一台筆電的成本是很大的，而當產量為 100 台時，再多生產一台，即生產第 101 台筆電的成本就會降低；同樣地，生產第 10001 台筆電的成本就更低。

1

導數的邊際意涵

設 $C(x)$ 為生產 x 件產品的成本函數。若 $C(x)$ 為可微分函數，則產量 a 件時的邊際成本 $C(a+1) - C(a)$ 會近似於導數 $C'(a)$，即

$$C(a+1) - C(a) \approx C'(a)。$$

在例題 9 中，根據導數的邊際意涵得知：$C(21) - C(20)$ 近似於 $C'(20) = 48$，即產量 20 件時的邊際成本約為 48 元。也就是說，生產第 21 件所增加的成本約為 48 元。

練習導數的邊際意涵。

隨堂練習

已知生產 x 件產品的成本函數為

$$C(x)=7000+400x-0.2x^2\text{（元）},$$

回答下列問題。

(1) 求產量從 80 件增加到 81 件所增加的成本。

(2) 求產量 80 件時的邊際成本。

(3) 求導數 $C'(80)$ 的值。

(1) 367.8 元
(2) 367.8 元
(3) 368

同樣地，生產 x 件產品的利潤函數 $P(x)$ 也會有上述相同的邊際意涵。

例題 10

已知某款手機賣出 x 支的利潤函數為

$$P(x)=0.01x^3+800x\text{（元）},$$

回答下列問題。

(1) 求導函數 $P'(x)$。

(2) 求導數 $P'(50)$ 的值，並解釋其邊際意涵。

解

(1) 利用微分公式，得導函數

$$P'(x)=0.03x^2+800。$$

(2) 由 (1)，得

$$P'(50)=0.03\times50^2+800=875。$$

根據導數的邊際意涵得知：$P(51)-P(50)$ 近似於 $P'(50)=875$，即賣出 50 支時的邊際利潤約為 875 元。也就是說，賣出第 51 支所增加的利潤約為 875 元。

教學小提醒

1 欲凸顯邊際利潤的變化，例題 10 可補充比較 $P'(50)$ 與 $P'(80)$ 兩者的大小。

隨堂練習解答

1 (1) 由成本函數 $C(x)$，得所增加的成本為

$$C(81)-C(80)=\left(7000+400\times81-0.2\times81^2\right)-\left(7000+400\times80-0.2\times80^2\right)=400\times(81-80)-0.2\times\left(81^2-80^2\right)=367.8\text{（元）}。$$

(2) 產量 80 件時的邊際成本為 367.8 元。

(3) 利用微分公式，得 $C'(x)=400-0.4x$。因此，$C'(80)=400-0.4\times80=368$。

隨堂練習

已知某飲料賣出 x 箱的利潤函數為

$$P(x)=0.1x^2+20x\text{（元）},$$

回答下列問題。

(1) 求導函數 $P'(x)$。

(2) 求導數 $P'(100)$ 的值，並解釋其邊際意涵。

(1) $P'(x)=0.2x+20$

(2) $P'(100)=40$，邊際意涵為：賣出 100 箱時的邊際利潤約為 40 元

在例題 10 中，計算 $P'(60)=0.03\times 60^2+800=908$，其意涵是賣出第 61 支所增加的利潤約為 908 元，也就是說，比賣出第 51 支所增加的利潤高出 $908-875=33$ 元。為何賣出第 61 支比賣出第 51 支所增加的利潤高呢？原因可能是固定的支出（如店租、水電費）不會因多賣幾支就增加的緣故。

88

隨堂練習解答

1

(1) 利用微分公式，得導函數為 $P'(x)=0.2x+20$。

(2) 由 (1)，得 $P'(100)=0.2\times100+20=40$，

根據導數的邊際意涵得知：$P(101)-P(100)$ 近似於 $P'(100)=40$，即賣出 100 箱時的邊際利潤約為 40 元。也就是說，賣出第 101 箱所增加的利潤約為 40 元。

補充例題

1 設成本函數 $C(x)=2x^3-12x^2+40x+6$（元）。

(1) 求導函數 $C'(x)$。

(2) 當 x 為何值時，邊際成本最小？

解：(1) 利用微分公式，得導函數為 $C'(x)=6x^2-24x+40$。

(2) 利用配方法，得

$C'(x)=6(x^2-4x+4)-24+40=6(x-2)^2+16$。

故當 $x=2$ 時，邊際成本最小。

習題解答

觀念澄清

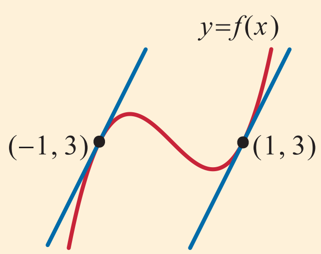
(1) ○：由導數的定義，得知正確。

(2) ○：切線的斜率等於導數 $f'(2)$。

(3) ○：由導數的邊際意涵，得知正確。

一、基礎題

1. 利用微分公式，得 $f'(x)=3x^2-4x+5$, $f''(x)=6x-4$。
2. 利用微分公式，計算 $f'(x)$ 如下：$f'(x)=5x^4+3x^2+1$。
   因為所求切線的斜率等於 $f'(1)=5+3+1=9$，
   所以切線方程式為 $y-4=9(x-1)$，即 $y=9x-5$。
3. 設切點的坐標為 $(a,f(a))$，函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2-1$。
   因為切線的斜率為 2，所以 $f'(a)=3a^2-1=2$，
   整理得 $a^2-1=0$，
   解得 $a=1$ 或 $a=-1$。
   又因為 $f(1)=3$, $f(-1)=3$，所以切點坐標為 $(1,3)$ 或 $(-1,3)$。
   故斜率為 2 的切線有兩條，其方程式分別為 $y-3=2(x-1)$ 及 $y-3=2(x+1)$，
   即 $y=2x+1$ 及 $y=2x+5$。



3 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「〇」，錯的打「×」。

☐ (1) 若 $f(x)$ 為多項式函數，則 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$。

☐ (2) 若 $f'(2)$ 存在，則以點 $(2, f(2))$ 為切點的切線斜率為 $f'(2)$。

☐ (3) 若 $C(x)$ 為成本函數，則生產第 11 件產品所增加的成本約為 $C'(10)$。

(1) 〇　(2) 〇　(3) 〇

一、基礎題

1 已知 $f(x)=x^3-2x^2+5x-4$，求 $f'(x)$ 與 $f''(x)$。

$f'(x)=3x^2-4x+5$，$f''(x)=6x-4$

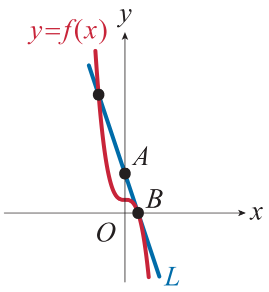
2 求函數 $f(x)=x^5+x^3+x+1$ 的圖形上，以點 $P(1, 4)$ 為切點的切線方程式。

$y=9x-5$

3 求函數 $f(x)=x^3-x+3$ 圖形上斜率為 2 的切線方程式。

$y=2x+1$ 及 $y=2x+5$

4 如右圖，已知 $A(0,3)$ 為函數 $f(x)=-x^3+1$ 圖形外一點，直線 L 是以 B 為切點的切線且過 A 點。



(1) 求直線 L 的方程式。

(2) 求切點 B 的坐標。

(3) 求函數 $f(x)$ 的圖形與 L 的所有交點坐標。

(1) $y=-3x+3$
(2) $(1,0)$
(3) $(1,0)$ 及 $(-2,9)$

5 已知生產 x 件產品的成本函數為

$$C(x)=5000+300x-0.1x^2\text{（元）},$$

回答下列問題。

(1) 求產量從 100 件增加到 101 件所增加的成本。

(2) 求產量 100 件時的邊際成本。

(3) 求導數 $C'(100)$ 的值。

(1) 279.9 元
(2) 279.9 元
(3) 280

6 設 $C(x)$、$R(x)$ 與 $P(x)$ 分別是生產 x 件產品的成本函數、收入函數與利潤函數。已知

$$C(x)=x^2-10x+20\text{（萬元）},$$

且每件產品的銷售價為 20 萬元，選出所有正確的選項。

(1) $R(x)=20x$（萬元）

(2) $P(x)=-x^2+30x-20$（萬元）

(3) 生產第 11 件所增加的利潤超過 12 萬元

(4) 產量 20 件比產量 18 件獲得的利潤多

(5) 增加產量必定增加利潤。

(1)(2)

4. (1) 設切點的坐標為 $B(a, f(a))$。

因為 $f'(x) = -3x^2$，所以切線的斜率為 $f'(a) = -3a^2$。

另一方面，由切線通過 $B(a, f(a))$ 及 $A(0, 3)$ 兩點，得切線的斜率為 $\dfrac{f(a)-3}{a-0}$。

綜合以上兩個切線斜率，得

$$\frac{f(a)-3}{a-0} = -3a^2 \Rightarrow \left(-a^3+1\right)-3 = -3a^3$$

$$\Rightarrow a^3-1=0 \Rightarrow (a-1)\left(a^2+a+1\right)=0，$$

又 a 為實數，解得 $a=1$。

故直線 L 的斜率為 $f'(1) = -3\times 1^2 = -3$，其方程式為 $y-3=-3(x-0)$，即 $y=-3x+3$。

(2) 由 (1) 知，切點 B 的坐標為 $(1, f(1)) = (1, 0)$。

(3) 解聯立方程式

$$\begin{cases} y = -x^3+1 \cdots\cdots ① \\ y = -3x+3 \cdots\cdots ② \end{cases},$$

由 ②−① 消去 y，得 $x^3-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2)=0$。

解得 $x=1$（重根）或 -2。

代回 ①，得 $y=0$ 或 9。

故所有交點坐標為 $(1, 0)$ 及 $(-2, 9)$。

5. (1) 由成本函數 $C(x)$，得所增加的成本為

$$\begin{aligned} C(101)-C(100) &= \left(5000+300\times 101-0.1\times 101^2\right)-\left(5000+300\times 100-0.1\times 100^2\right) \\ &= 300\times(101-100)-0.1\times\left(101^2-100^2\right) \\ &= 279.9\text{（元）}。\end{aligned}$$

(2) 產量 100 件時的邊際成本為 279.9 元。

(3) 利用微分公式，得 $C'(x) = 300-0.2x$。因此

$$C'(100) = 300-0.2\times 100 = 280。$$

6. (1) ○：因為每件產品的銷售價為 20 萬元，所以 $R(x)=20x$（萬元）。

(2) ○：利用利潤 ＝ 收入 − 成本，得

$$P(x) = R(x)-C(x) = 20x-\left(x^2-10x+20\right) = -x^2+30x-20\text{（萬元）}。$$

(3) ×：邊際利潤函數為 $P'(x) = -2x+30$。

因為 $P'(10)=10$，所以根據導數的邊際意涵得知，

生產第 11 件所增加的利潤約為 10 萬元，小於 12 萬元。

(4) ×：因為 $P'(19) = -8<0, P'(18) = -6<0$，

所以生產第 20 件與第 19 件的利潤均為負。

因此產量 20 件獲得的利潤比產量 18 件獲得的利潤少。

(5) ×：因為當 $x>15$ 時，$P'(x)<0$，

所以當產量超過 15 件時，增加產量反而減少利潤。

故選 (1)(2)。

二、進階題

7. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$。利用微分公式，得

$$f'(x)=2ax+b。$$

與 $f'(x)=2x+3$ 比較，及 $f(1)=2$，得

$$\begin{cases}2a=2\\b=3\\a+b+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\c=-2\end{cases}。$$

故 $f(x)=x^2+3x-2$。

8. 函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=-2x+4$，且 A, B, C 三點的坐標為

$$A(-1,-5), B\big(k, f(k)\big), C(3,3)。$$

因為以 B 點為切點的切線與直線 AC 平行，所以兩直線的斜率相等，即

$$-2k+4=\frac{-5-3}{-1-3}\Rightarrow -2k+4=2，$$

解得 $k=1$。

9. 切線斜率函數就是導函數 $f'(x)=3x^2+2ax-5$。

利用配方法將 $f'(x)$ 改寫成

$$f'(x)=3\left(x^2+\frac{2a}{3}x+\left(\frac{a}{3}\right)^2\right)-\frac{a^2}{3}-5$$

$$=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}-5。$$

因為在 $x=-1$ 處切線的斜率最小，所以

$$-\frac{a}{3}=-1\Rightarrow a=3。$$

又由 $P(-1,5)$ 在 $f(x)$ 的圖形上，得知 $f(-1)=5$，即

$$-1+a+5+b=5\Rightarrow a+b=1。$$

故 $a=3, b=-2$。

10. (1) 因為 $C'(x)=0.0003x^2-0.16x+50$，所以

$$C'(100)=0.0003\times(100)^2-0.16\times100+50=37,$$

$$C'(200)=0.0003\times(200)^2-0.16\times200+50=30。$$

(2) 根據導數的邊際意涵得知：生產第 101 件所增加的成本大約

$$C'(100)=37\text{ 元，}$$

而第 201 件大約 $C'(200)=30$ 元。

故第 101 件所增加的成本較高。

二、進階題

7 已知二次函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=2x+3$，且 $f(1)=2$，求 $f(x)$。 x^2+3x-2

8 設函數 $f(x)=-x^2+4x$ 的圖形在 $x=-1, k, 3$ 處的點分別為 A, B, C。已知以 B 點為切點的切線與直線 AC 平行，求實數 k 的值。 1

9 已知在函數 $f(x)=x^3+ax^2-5x+b$ 圖形上所有切線的斜率中，以 $P(-1,5)$ 為切點的切線斜率最小，求實數 a, b 的值。 $a=3, b=-2$

10 設生產 x 件產品的成本函數為

$$C(x)=0.0001x^3-0.08x^2+50x+750\text{（元）}。$$

(1) 求導數 $C'(100)$ 與 $C'(200)$ 的值。

(2) 利用 (1)，估計生產第 101 件所增加的成本與第 201 件何者較高？

(1) $C'(100)=37, C'(200)=30$

(2) 第 101 件所增加的成本較高

補充教材

● 可微必連續（補充微分）

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

證明： 因為 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，所以 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在。

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\right)\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a}f(a)\\&=f'(a)\cdot 0+f(a)\\&=f(a),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。