

總 分
測驗時間：20分鐘

選修數學乙(下)小試身手卷 (中偏易)

請 尊重著作權
勿擅自翻印

第 12 回

範圍：單元 4 多項式方程式的根

____年____班____號

(主題：丙)

姓名_____

一、單選題(5 小題，每格 10 分，共 50 分)

1. () 已知方程式 $x^3 - 4x + 2 = 0$ 在連續整數 n 與 $n + 1$ 之間有實根，設 $f(x) = x^3 - 4x + 2$ ，得 $f(x)$ 的函數值如表，

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-13	2	5	2	-1	2	17

求 n 的所有可能值之總和 (A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

解答

B

解析

由附表與勘根定理可知， $f(x)=0$ 的實根分別在區間 $(-3, -2)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ ，

可得 n 的所有可能值為 -3 、 0 、 1 ，所以其總和為 $-3 + 0 + 1 = -2$

2. () 設 n 為整數，若方程式 $x^3 - 7x + 1 = 0$ 在區間 $(n, n + 1)$ 有實根，則 n 之值可能為下列何者？ (A) -3 (B) -2 (C) 1 (D) 3 (E) 4

解答

A

解析

設 $f(x) = x^3 - 7x + 1$ ，由觀察及簡易計算可以看出：當 $x \geq 3$ 時， $f(x) > 0$ ；而當 $x \leq -3$ 時， $f(x) < 0$ ，因此，只須考慮 -3 到 3 的整數即可，如附表所示。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	7	7	1	-5	-5	7

〔異號〕 〔異號〕 〔異號〕

由附表與勘根定理可知， $f(x)=0$ 在區間 $(-3, -2)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(2, 3)$

上都分別至少有一個實根。根據代數基本定理，三次方程式 $f(x)=0$ 恰有三個根，因此不會再有其他的根了，所以 $n = -3$ 或 0 或 2

3. () 已知方程式 $x^3 - x^2 - 6x - 1 = 0$ 在連續整數 n 與 $n + 1$ 之間有實根，設 $f(x) = x^3 - x^2 - 6x - 1$ ，得 $f(x)$ 的函數值如表：

x	...	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	...	3	-1	-7	-9	-1	...

求 n 的最大值為何？ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 3 (E) 4

解答

D

解析

$f(-2) = -1$ ， $f(4) = 23$ ，可得

$f(-2) \times f(-1) = -1 \times 3 < 0$ ，

$f(-1) \times f(0) = 3 \times (-1) < 0$ ，

$f(3) \times f(4) = -1 \times 23 < 0$ ，

可知， $f(x)=0$ 的實根分別在區間 $(-2, -1)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(3, 4)$ ，

可得 n 最大值為 3

4. () 已知實係數多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(-\sqrt{2}) < 0$, $f(0) > 0$, $f(\sqrt{3}) < 0$, $f(\sqrt{5}) > 0$ 。又方程式 $f(x) = 0$ 的三根均為整數，求 $a + b + c$ 的值。 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3

解答

A

解析

將已知函數值的正負整理如表。

x	$-\sqrt{2} \approx -1.4$	0	$\sqrt{3} \approx 1.7$	$\sqrt{5} \approx 2.2$
$f(x)$	-	+	-	+

└異號┐ └異號┐ └異號┐

因為由附表與勘根定理可知，方程式 $f(x) = 0$ 的三個整數根分別落在區間 $(-\sqrt{2}, 0)$ 、 $(0, \sqrt{3})$ 、 $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ 上，所以三個根分別為 -1 、 1 、 2 。

又因為 $f(x)$ 的 x^3 項係數為 1，所以，由因式定理可得

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2。$$

所以 $a = -2$ ， $b = -1$ ， $c = 2$ ，故 $a + b + c = -1$

5. () 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且 $f(x)$ 的一些取值如表所示。

x	0	1	2
$f(x)$	-2	3	-1

有關方程式 $f(x) = 0$ 的三個根，選出正確的選項。 (A) 三實根 (B) 兩實根一虛根 (C) 一實根兩虛根 (D) 三虛根 (E) 無法判定

解答

A

解析

由虛根成對定理可知，實係數三次方程式 $f(x) = 0$ 根的情形可能為

(i) 三個實根；(ii) 一個實根、兩個虛根。

$$\text{又 } f(0) \times f(1) = (-2) \times 3 < 0, f(1) \times f(2) = 3 \times (-1) < 0,$$

可知 $f(x) = 0$ 至少有兩個實根，故 $f(x) = 0$ 有三實根

二、填充題(4 小題，每格 10 分，共 50 分)

1. 已知實係數多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(-2) < 0$ ， $f(0) > 0$ ， $f(\frac{3}{2}) < 0$ ， $f(2.5) > 0$ 。又方程式 $f(x) = 0$ 的三根均為整數，求序對 $(a, b, c) =$ _____。

解答

$(-2, -1, 2)$

解析

將已知函數值的正負整理如表。

x	-2	0	$\frac{3}{2} = 1.5$	2.5
$f(x)$	-	+	-	+

└異號┐ └異號┐ └異號┐

由表與勘根定理可知，方程式 $f(x) = 0$ 的三個整數根分別落在區間 $(-2, 0)$ 、 $(0, 1.5)$ 、 $(1.5, 2.5)$ 上，所以三個根分別為 -1 、 1 、 2 。

又因為 $f(x)$ 的 x^3 項係數為 1，所以，由因式定理可得

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2。$$

故 $a = -2$ ， $b = -1$ ， $c = 2$ 。

2. 已知方程式 $x^3 - 2x^2 - 5x + 7 = 0$ ，設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 7$ ，則

(1) $f(x)$ 的函數值如表，求數對 $(a, b) =$ _____。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-23	1	a	7	1	b	1

(2) 若方程式 $f(x) = 0$ 的實根在連續整數 n 與 $n + 1$ 之間，由上題可得 n 的所有可能值為_____。

解答

(1) $(9, -3)$ (2) $-3, 1, 2$

解析

(1) $a = f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 7 = -1 - 2 + 5 + 7 = 9$

$b = f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 7 = 8 - 8 - 10 + 7 = -3$ 。

(2) 因為 $f(-3) \times f(-2) = -23 \times 1 < 0$ ，

$f(1) \times f(2) = 1 \times (-3) < 0$ ， $f(2) \times f(3) = (-3) \times 1 < 0$ ，

所以可知 n 的可能值為 -3 、 1 、 2 。

3. 已知三次方程式 $x^3 - 12x - 10 = 0$ 有三實根，其中有一根在區間 $(3, 4)$ ，若此方程式最小的根在區間 $(k, k + 1)$ ，求 k 的值為_____。

解答

-3

解析

依題意，嘗試從負根找起，令 $f(x) = x^3 - 12x - 10$ ，則依 x 值列出函數 $f(x)$ 的值如表：

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	-1	6	1	-10

由表與勘根定理可知， $f(x) = 0$ 之另二根在區間 $(-3, -2)$ 、 $(-1, 0)$ ，故 $k = -3$ 。

4. 試求三次方程式 $x^3 - 3x - 4 = 0$ 有_____個實根。

解答

1

解析

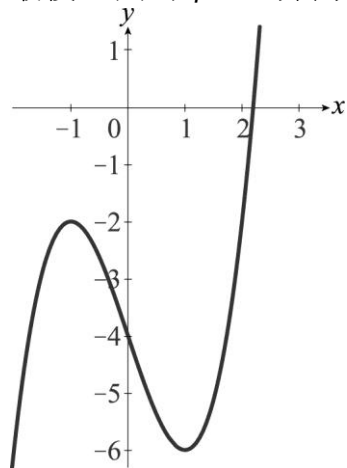
設 $f(x) = x^3 - 3x - 4$ 。

首先，求出 $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，並將其因式分解為 $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$ 。

接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下。

x	-1	1
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	-2	-6

最後，因為 $f(x)$ 的首項係數為正，所以函數 $y = f(x)$ 的示意圖如圖所示。



由圖可得三次方程式 $f(x) = x^3 - 3x - 4$ 有 1 個實根。