4 多項式方程式的根

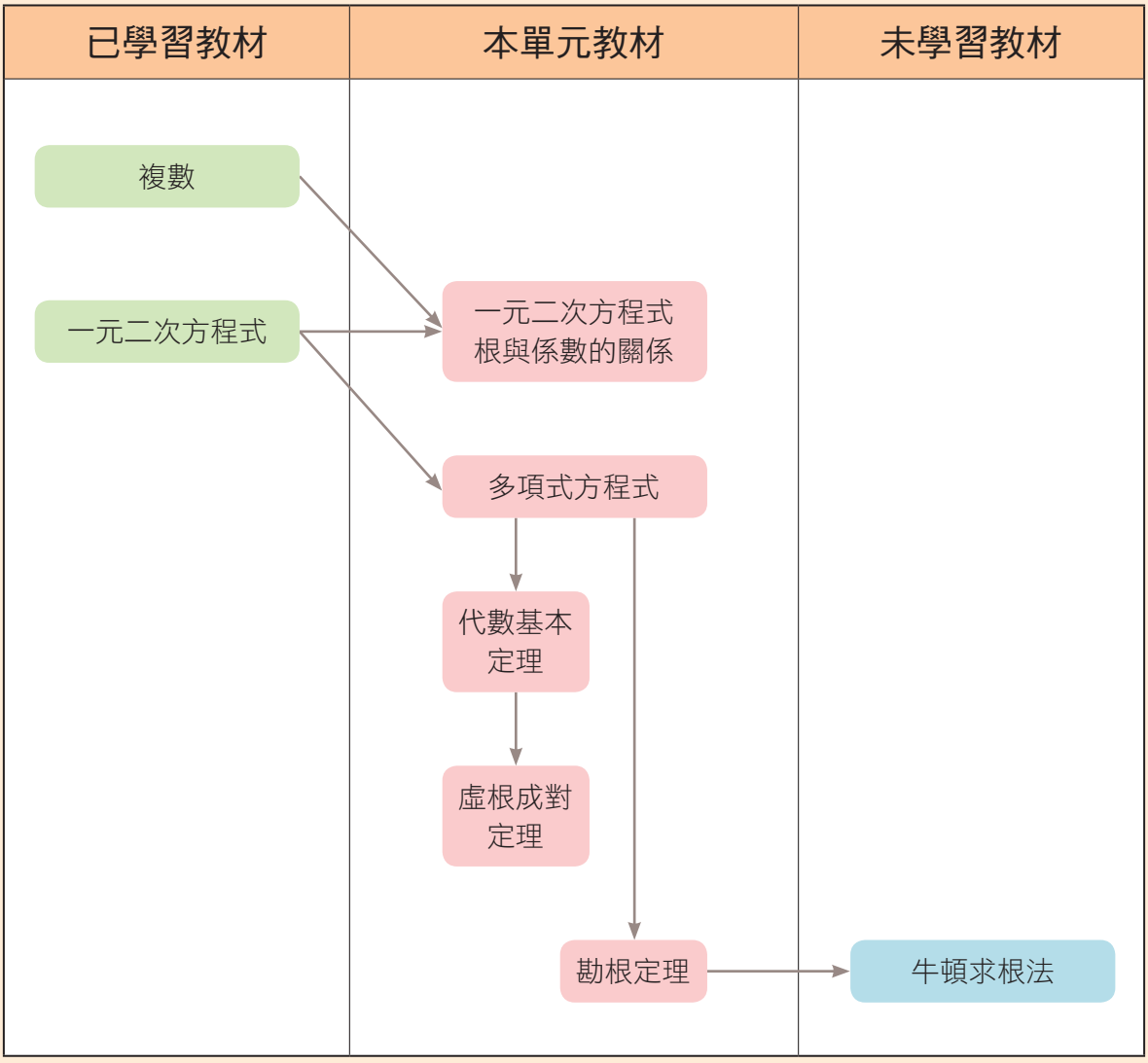
一 教材摘要

延續前一個單元複數的概念，先討論一元二次方程式的公式解，並介紹根與係數的關係及兩根的性質。接著介紹一元三次多項式方程式及根的意義，並說明虛根成對定理。最後介紹如何利用勘根定理求實根的近似值。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 能利用一元二次方程式的公式解求根。 2. 了解一元二次方程式根與係數的關係。 3. 了解多項式 n 次方程式及其相關名詞的意義。 4. 了解代數基本定理。 5. 了解虛根成對定理及其應用。 6. 了解勘根定理及其應用。	12

三 教材地位分析

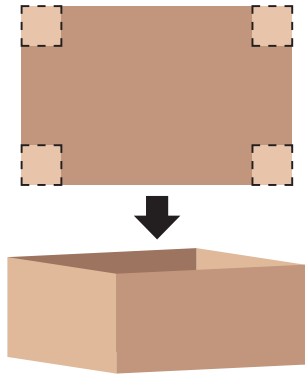

已學習教材
本單元教材
未學習教材
複數
一元二次方程式
一元二次方程式
根與係數的關係
多項式方程式
代數基本
定理
虛根成對
定理
勘根定理
牛頓求根法

4 多項式方程式的根

將長 6 公寸、寬 4 公寸的矩形紙板之四個角各截去一個面積相等的正方形後，各邊摺起來做成一個無蓋的長方體容器，如圖 1 所示。如果我們希望這個容器的容積為 8 立方公寸（不考慮紙板厚度），那麼截去的正方形邊長為多少呢？

設截去的正方形邊長為 x 公寸，可得容器的容積 $x(6-2x)(4-2x)=8$，整理得 $x^3-5x^2+6x-2=0$，這是一個三次的方程式。

本單元先複習國中學過的二次方程式，進而介紹高次的多項式方程式，並探討這些方程式的根。



▲圖 1

教學要點

1 利用一元二次方程式的公式解求根，並介紹一元二次方程式根與係數的關係。

甲 二次方程式的根

形如 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的方程式稱為二次方程式，當 a, b, c 皆為實數時，稱其為實係數二次方程式。接下來，先複習國中學過的實係數二次方程式公式解，再進一步探討實係數二次方程式之根與係數的關係。

(一) 公式解與判別式

數學知識家

1 多項式方程式的公式解請見補充教材。

國中學過，利用配方法可以得到實係數二次方程式的解，例如二次方程式 $x^2-2x+5=0$ 可配成 $(x-1)^2=-4$，解得 $x=1\pm\sqrt{-4}=1\pm 2i$。一般而言，可將 $ax^2+bx+c=0$ 移項得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\,,$$

再配方得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}\,,$$

當 $b^2-4ac \geq 0$ 時，方程式有實數解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

在複數系中，無論 b^2-4ac 是正數、負數或是零，$\sqrt{b^2-4ac}$ 都有意義，此時，實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 都可使用公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 來求解，其中 b^2-4ac 稱為判別式，常記作 D。

例題 1

解方程式 $x^2-2x+5=0$。

解

利用公式解，得

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i,$$

即 $x=1+2i$ 或 $1-2i$。

隨堂練習

解下列各方程式。

(1) $x^2+x+1=0$。　(2) $2x^2+2x+1=0$。

(1) $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　(2) $\dfrac{-1\pm i}{2}$

觀察實係數二次方程式的公式解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 發現：由判別式 $D=b^2-4ac$ 的值可以直接看出兩根是實數還是虛數。特別地，當 $D<0$ 時，方程式的兩根互為共軛複數，稱此方程式有兩**共軛虛根**。

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$	有兩相異實根	有兩相等實根（重根）	有兩共軛虛根

隨堂練習解答

1 利用公式解，得

(1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。

(2) $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2\times2}=\dfrac{-2\pm2i}{4}=\dfrac{-1\pm i}{2}$。

利用判別式來練習一道例題。

例題 2

已知方程式 $x^2+kx+9=0$ 有兩實根，求實數 k 的範圍。

解

因為方程式有兩實根（可能相等或相異），所以判別式

$$D=k^2-4\cdot 1\cdot 9=k^2-36=(k-6)(k+6)\geq 0,$$

解得 $k\geq 6$ 或 $k\leq -6$。

隨堂練習 1

已知方程式 $x^2+3x-k=0$ 有兩共軛虛根，求實數 k 的範圍。 $k<-\frac{9}{4}$

(二) 根與係數的關係

由公式解可知實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為

$$\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ （其中\ D=b^2-4ac）。$$

若令此兩根為 $\alpha=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$，則

(1) $\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$。

(2) $\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$。

這兩個關係式稱為二次方程式之**根與係數的關係**。

根與係數的關係

若 α, β 為實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，則下列等式成立。

(1) 兩根的和 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$。　　(2) 兩根的積 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$。

教學小提醒

1 根與係數的關係，老師也可用因式分解的方法切入，因為

ax^2+bx+c

$=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$=a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)$，

又

ax^2+bx+c

$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$，

所以比較係數可得

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。

隨堂練習解答

1 因為方程式有兩共軛虛根，所以判別式 $D=3^2-4\times 1\times(-k)<0$，

即 $9+4k<0$，解得 $k<-\frac{9}{4}$。

由根與係數的關係可知，對於一個已知的二次方程式，可以不用求出兩根的正確值，就可以由係數知道兩根的和與兩根的積。

例題 3

已知 α, β 為方程式 $2x^2+4x+5=0$ 的兩根，求下列各式的值。

(1) $\alpha^2+\beta^2$。　　(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$。

解

由根與係數的關係，得

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{2}=-2 \text{ 且 } \alpha\beta=\frac{5}{2}。$$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times\frac{5}{2}=-1$。

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-2}{\frac{5}{2}}=-\frac{4}{5}$。

隨堂練習

已知 α, β 為方程式 $x^2-4x+7=0$ 的兩根，求下列各式的值。

(1) $\alpha^2+\beta^2$。　　(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$。

(1) 2　(2) $\frac{2}{7}$

例題 3 及其隨堂練習當然也可以將兩根求出後再代入求值，但是顯然地利用根與係數的關係是較為簡便的。

補充例題

1 已知二次方程式 $ax^2+5x+b=0$ 的兩根之和為 5，兩根之積為 10，求數對 (a, b)。

解：

設方程式的兩根為 α, β

由根與係數關係可得

$\alpha+\beta=-\frac{5}{a}=5$　①

$\alpha\cdot\beta=\frac{b}{a}=10$　②

由①知 $a=-1$，

代入②得 $b=-10$。

故 $(a, b)=(-1, -10)$。

隨堂練習解答

1 由根與係數的關係，得 $\alpha+\beta=-(-4)=4$，　$\alpha\beta=7$。

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-14=2$。

(2) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{2}{7}$。

教學要點

1 介紹 n 次多項式方程式及其相關名詞的意義、代數基本定理與虛根成對定理及其應用。

乙 n 次方程式的根

當 $f(x)$ 為 n 次多項式時，稱 $f(x)=0$ 為 n 次多項式方程式，簡稱為 **n 次方程式**；當多項式的係數都為實數時，稱其為實係數 n 次方程式。如果有一個數 α 滿足 $f(\alpha)=0$，就稱 α 是 $f(x)=0$ 的**根**或**解**，有時候為了強調這個根 α 所在的數系，會將 α 稱為**整數根**、**有理根**、**實根**或**複數根**。

高一學過的多項式為實係數多項式，本單元引進複數之後，高一學過的多項式四則運算、除法原理、餘式定理與因式定理對複係數多項式仍然適用。

之前我們探討了二次方程式根的情形，接著，來探討 n 次方程式根的情形。

(一) 代數基本定理

當我們考慮複數根時，二次方程式都恰好有兩個複數根，例如：

① $x^2+1=0$ 有兩共軛虛根 i 與 $-i$；

② $(x-1)^2=0$ 有兩相等實根 $x=1$（重根）。

那麼，三次方程式是否恰有三個複數根（可能有重根）呢？先來看一個三次方程式的例題。

教學小提醒

1 數乙例題的方程式在三次（含）以內即可。

例題 4

已知 1 為實係數方程式 $x^3-x^2-2x+a=0$ 的一個根。

(1) 求 a 的值。　　(2) 求所有的根。

解

設 $f(x)=x^3-x^2-2x+a$。

(1) 因為 1 為方程式 $f(x)=0$ 的根，所以 $f(1)=0$，即

$$1-1-2+a=0,$$

解得 $a=2$。

(2) 因為 $f(1)=0$，所以由因式定理知 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式，利用除法可得

$$f(x)=x^3-x^2-2x+2=(x-1)\left(x^2-2\right)=0,$$

解得 $f(x)=0$ 有三個根，分別為 $1,\sqrt{2},-\sqrt{2}$。

70

隨堂練習

已知 -1 為實係數方程式 $x^3+x^2+3x+a=0$ 的一個根。

(1) 求 a 的值。　　(2) 求所有的根。

(1) 3　(2) -1，$\pm\sqrt{3}i$

例題 4 與其隨堂練習的三次方程式都有三個複數根，再來看幾個例子。

(1) $(x-1)^2(x-2)=0$ 有三個根，分別為 1, 1, 2；其中 1 為此方程式的**二重根**。

(2) $(x+4)^3=0$ 有三個根，分別為 -4, -4, -4；其中 -4 為此方程式的**三重根**。

以上的三次方程式都恰有三個根，其實這並非巧合。事實上，任何複係數 n 次方程式都恰有 n 個根。說明這一點之前，先來介紹**代數基本定理**。

高斯（C.F.Gauss，德國，1777 ～ 1855），古今三大數學家之一，被譽為數學王子。高斯的座右銘：「稀少，但成熟」，他的著作內容簡潔但豐富。

代數基本定理

設 n 為正整數，任一複係數 n 次方程式至少有一個複數根。

設 $f(x)$ 複係數 n 次多項式，其中 n 為正整數。上述的代數基本定理保證了方程式 $f(x)=0$ 至少會有一個複數根。事實上，藉由重複地使用代數基本定理與多項式的除法，可以證得 $f(x)=0$ 恰有 n 個根，推導如下。由代數基本定理，可設 α_1 為 $f(x)=0$ 的一個複數根。因此 $x-\alpha_1$ 為 $f(x)$ 的一次因式，利用除法可得

$$f(x)=(x-\alpha_1)q_1(x)。$$

若 $q_1(x)$ 的次數大於或等於 1，則 $q_1(x)=0$ 也至少會有一個複數根 α_2，因此 $x-\alpha_2$ 為 $q_1(x)$ 的一次因式，再利用除法可得

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)q_2(x)。$$

教學小提醒

1 1 n 次方程式恰有 n 個根可多舉例解釋說明。

數學知識家

1 1 補充整係數一次因式檢驗法（牛頓定理），內容請見補充教材。

隨堂練習解答

1 設 $f(x)=x^3+x^2+3x+a$。

(1) 因為 -1 為方程式 $f(x)=0$ 的根，所以 $f(-1)=0$，即 $-1+1-3+a=0$，解得 $a=3$。

(2) 因為 -1 為方程式 $f(x)=0$ 的根，所以 $x+1$ 為 $f(x)$ 的因式，即 $f(x)=x^3+x^2+3x+3=(x+1)(x^2+3)=0$，解得 $f(x)=0$ 有三個根，分別為 -1，$\pm\sqrt{3}i$。

重複以上步驟逐次提出一次因式，最後可將 $f(x)$ 分解成 n 個一次式的乘積，即

$$f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)，$$

其中 a 為 $f(x)$ 的首項係數，複數 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 為 $f(x)=0$ 的所有根。

上述的複數根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 可能有些會相等，即發生重根的情形，若將重根重複計算其個數（如三重根計為 3 個根），則 $f(x)=0$ 會恰有 n 個根。因此，我們證明了以下的結果，它是代數基本定理的另一種表現形式。

代數基本定理（另一形式）

設 n 為正整數，任一複係數 n 次方程式恰有 n 個複數根。（重根須重複計算其個數）

特別注意的是：以上的結果對實係數多項式方程式也會成立，也就是說，當設 n 為正整數時，任一實係數 n 次方程式恰有 n 個複數根。例如實係數六次方程式 $(x-\sqrt{5})(x^2+1)(x-1)^3=0$ 恰有六個根，分別為 $\sqrt{5}, i, -i, 1, 1, 1$，其中三重根 1 計為 3 個根。

隨堂練習

❶ 解方程式 $(x-1)(x+1)^2(x^2+x-3)=0$。

$1, -1, -1, \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

隨堂練習解答

❶ 設 $f(x)=(x-1)(x+1)^2(x^2+x-3)$。

$f(x)=0$ 有五個根，分別為 $1, -1, -1, \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$。

(二) 虛根成對定理

前面提過，當實係數二次方程式的判別式 $D<0$ 時，方程式的兩虛根共軛成對，例如 $x^2+2x+3=0$ 的兩根為 $-1\pm\sqrt{2}i$。那麼，實係數 n 次方程式的虛根是否也有這樣的性質呢？事實上，若 n 次方程式的係數「皆為實數」，則其虛根必「共軛成對」地出現。

虛根成對定理

設 $f(x)$ 為實係數 n 次多項式（n 為大於 1 的正整數）。若 $a+bi$（其中 a, b 為實數且 $b\neq 0$）是方程式 $f(x)=0$ 的一個虛根，則它的共軛複數 $a-bi$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一個虛根。

例如將 $x^3-x^2+3x+5=0$ 分解成 $(x+1)(x^2-2x+5)=0$，可得其三根為 -1, $1\pm 2i$，其中的兩虛根 $1+2i$ 與 $1-2i$ 互為共軛複數。

如果若多項式方程式 $f(x)=0$ 的虛根不成對出現，那麼原方程式必不為實係數方程式，例如某二次方程式的根為 $2i$ 與 $3i$，則此二次方程式為 $(x-2i)(x-3i)=0$，展開得 $x^2-5ix-6=0$，其中的 $-5i$ 不為實數。

本定理的證明詳見附錄三。利用虛根成對定理來做一道例題。

例題 5

已知 $1-3i$ 為實係數方程式 $x^3-5x^2+16x+a=0$ 的一個根。

(1) 求 a 的值。　　(2) 求所有的根。

解

設 $f(x)=x^3-5x^2+16x+a$。

(1) 因為 $1-3i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 的一個根，由虛根成對定理可知，$1+3i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根，所以

$$(x-(1-3i))(x-(1+3i))=x^2-2x+10$$

是 $f(x)$ 的二次因式（參考附錄三的證明）。利用長除法將 $f(x)$ 除以 $x^2-2x+10$：

數學知識家

1 有理係數方程式的無理根成對定理請見補充教材。

教學小提醒

1 方程式的係數必須是實數，虛根成對定理才會成立。

補充例題

1 已知 $1-\sqrt{3}i$ 為實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的一根，且此方程式與方程式 $x^2+ax+2=0$ 恰有一共同的實根，求 a，b，c 的值。

解：

設共同的實根為 r，

由虛根成對定理知，

$$\begin{aligned}&x^3+ax^2+bx+c\\&=\left(x-\left(1-\sqrt{3}i\right)\right)\\&\quad\left(x-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right)(x-r)\\&=\left(x^2-2x+4\right)(x-r)\end{aligned}$$

比較 x^2 的係數，

得 $a=-r-2$，

即 $r=-a-2$

代入 $x^2+ax+2=0$，得

$(-a-2)^2+a(-a-2)+2=0$

解得 $a=-3$，$r=1$。

由 $\left(x^2-2x+4\right)(x-1)$

$=x^3-3x^2+6x-4$，

得

$a=-3$，$b=6$，$c=-4$。

73

$$
\begin{array}{r}
x\ \ -3 \\
x^2-2x+10\overline{)\ x^3-5x^2+16x+a} \\
\underline{x^3-2x^2+10x\ \ \ \ \ \ } \\
-3x^2+6x+a \\
\underline{-3x^2+6x-30} \\
(a+30)
\end{array}
$$

因為 $f(x)$ 被 $x^2-2x+10$ 整除，所以

$$a+30=0,$$

解得 $a=-30$。

(2) 利用 (1) 中的長除法可將方程式 $f(x)=0$ 改寫為

$$(x^2-2x+10)(x-3)=0,$$

解得 $x=1\pm 3i$ 或 3。

隨堂練習

1 已知 $2+i$ 為方程式 $x^3-3x^2+x+5=0$ 的一個根，求所有的根。

$2\pm i$ 或 -1

因為虛根成對定理告訴我們虛根必「共軛成對」地兩兩出現，所以實係數三次方程式根的情形只有

「三實根」或「一實根兩虛根」

這兩種情形；也就是說，

實係數三次方程式至少有一實根。

隨堂練習解答

1 設 $f(x)=x^3-3x^2+x+5$。因為 $2+i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 的一個根，由虛根成對定理可知，$2-i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根，所以 $(x-(2+i))(x-(2-i))=x^2-4x+5$ 是 $f(x)$ 的二次因式。
將原方程式化為 $(x^2-4x+5)(x+1)=0$，解得 $x=2\pm i$ 或 -1。

例題 6

已知 $a-i$ 與 $1+bi$（其中 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$）為實係數三次方程式

$$x^3+x^2+cx+d=0$$

的兩個根。

(1) 求 a 與 b 的值。　(2) 求 c 與 d 的值。　(3) 求所有的根。

解

設 $f(x)=x^3+x^2+cx+d$。

(1) 因為 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$，所以 $a-i$ 與 $1+bi$ 都是 $f(x)=0$ 的虛根。

又因為 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式且其虛根個數必為偶數，所以 $f(x)=0$ 只能有一實根與兩共軛虛根。因此，$a-i$ 與 $1+bi$ 為共軛複數，即

$$a+i=1+bi,$$

解得

$$a=1 \text{ 且 } b=1。$$

(2) 由 (1) 可得

$$\big(x-(1-i)\big)\big(x-(1+i)\big)=x^2-2x+2$$

是 $f(x)$ 的二次因式。利用長除法將 $f(x)$ 除以 x^2-2x+2：

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x+2 & x+3 \\ \hline & x^3+x^2+cx+d \\ & x^3-2x^2+2x \\ \hline & 3x^2+(c-2)x+d \\ & 3x^2-6x+6 \\ \hline & (c+4)x+(d-6) \end{array}$$

因為 $f(x)$ 被 x^2-2x+2 整除，所以

$$c+4=0 \text{ 且 } d-6=0,$$

解得 $c=-4, d=6$。

(3) 利用 (2) 中的長除法可將方程式 $f(x)=0$ 改寫為

$$\big(x^2-2x+2\big)(x+3)=0,$$

解得 $x=1\pm i$ 或 -3。

75

隨堂練習

已知 $a-i$ 與 $2-bi$（其中 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$）為實係數三次方程式

$$x^3-5x^2+9x+k=0$$

的兩個根，求所有的根。 $2\pm i$ 或 1

再來看一道例題。

例題 7

設 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式，選出所有正確的選項。

(1) 方程式 $f(x)=0$ 一定有實根　(2) 方程式 $f(x)=0$ 一定有虛根

(3) 方程式 $f(x)=x^3$ 一定有實根　(4) 若 $f(1+i)=0$，則 $f(2+2i)\neq 0$。

解

(1) 因為由虛根成對定理可知，實係數三次方程式 $f(x)=0$ 根的情形可能為

① 三個實根；② 一個實根、兩個虛根。

所以 $f(x)=0$ 一定有實根。

(2) 由 (1) 可知，$f(x)=0$ 不一定有虛根。例如當 $f(x)=x(x-1)(x+1)$ 時，方程式 $f(x)=0$ 的根為 $0, 1, -1$，並無虛根。

(3) 設 $g(x)=f(x)-x^3$。當

$$f(x)=x^3+x^2+1$$

時，可得

$$g(x)=x^2+1,$$

此時，因為 $g(x)=0$ 無實根，所以 $f(x)=x^3$ 無實根。

故 $f(x)=x^3$ 不一定有實根。

(4) 因為 $f(1+i)=0$，所以由虛根成對定理可知，$1\pm i$ 為實係數三次方程式 $f(x)=0$ 的兩虛根，且另一根必為實根。因此 $2+2i$ 不可能是 $f(x)=0$ 的根，即 $f(2+2i)\neq 0$。

故選 (1)(4)。

補充例題

1 已知實係數多項式 $f(x)$ 的次數為三次，且 $f(i)=0$，求 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點數。

解：

因為 $f(x)$ 為實係數多項式，所以虛根共軛成對，可得 $f(-i)=0$。

又因為 $f(x)$ 為三次多項式，$f(x)=0$ 有一個實根、兩個虛根。

故 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點數為 1。

隨堂練習解答

1 設 $f(x)=x^3-5x^2+9x+k$。

因為 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$，所以 $a-i$ 與 $2-bi$ 都是 $f(x)=0$ 的虛根。又因為 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式且其虛根個數必為偶數，所以 $f(x)=0$ 只能有一實根與兩共軛虛根。因此，$a-i$ 與 $2-bi$ 為共軛複數，即 $a+i=2-bi$，解得 $a=2$ 且 $b=-1$。

由上述可得 $(x-(2-i))(x-(2+i))=x^2-4x+5$ 是 $f(x)$ 的二次因式。

利用長除法將 $f(x)$ 除以 x^2-4x+5，且因為 $f(x)$ 被 x^2-4x+5 整除，所以餘式 $k+5=0$，解得 $k=-5$。

將方程式 $f(x)=0$ 改寫為 $(x^2-4x+5)(x-1)=0$，解得 $x=2\pm i$ 或 1。

隨堂練習

❶ 設 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式，選出所有正確的選項。

(1) 若 $f(x)=0$ 有虛根，則虛根必共軛成對

(2) $f(x)=0$ 可能有一個實根

(3) $f(x)=x$ 一定有實根

(4) $f(x)=-2x^3$ 一定有實根。

(1)(2)(3)

丙 勘根定理

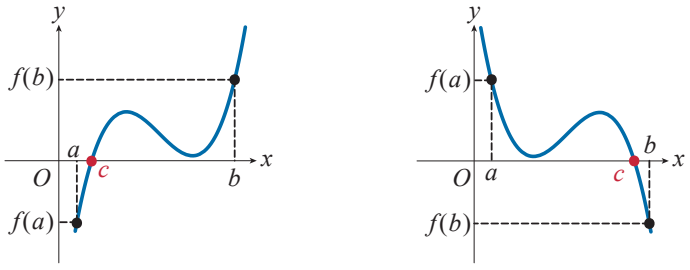
教學要點

❶ ❶從第五冊的介值定理引導介紹勘根定理及其應用。

從前面可知實係數三次方程式至少有一個實根，但是，一般來說，求方程式實根的精確值並不容易，此時，可以退而求其次地求實根的範圍。接下來，介紹一個求實根範圍的方法，稱為**勘根定理**。

第五冊曾經學過「介值定理」：設函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，且 $f(a)\neq f(b)$。若 k 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間（不含 $f(a),f(b)$）的實數，則在 a 與 b 之間（不含 a,b）至少有一實數 c，使得 $f(c)=k$。

接下來，設函數 $f(x)$ 為實係數多項式（此時 $f(x)$ 為連續函數）。若 $f(a)f(b)<0$，即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號，因此 0 介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，則利用介值定理，可得在區間 (a,b) 內至少有一實數 c，使得 $f(c)=0$，如圖 2 所示。



▲圖 2

隨堂練習解答

❶ 由虛根成對定理可知，實係數三次方程式 $f(x)=0$ 的三個根可能為

①三個實根②一個實根、兩個虛根（共軛成對）。

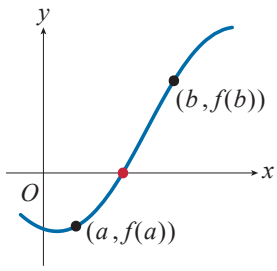
因此 $f(x)=0$ 一定有實根、不一定有虛根，實係數三次方程式 $f(x)=x$ 也一定有實根。

但是 $f(x)=-2x^3$ 不一定為實係數三次方程式，可能為二次方程式，所以不一定有實根（可能為共軛虛根）。故選(1)(2)(3)。

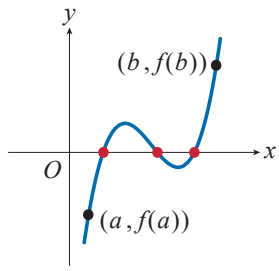
勘根定理

設 $f(x)$ 為實係數多項式，且 $a<b$。若 $f(a)f(b)<0$（即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號），則方程式 $f(x)=0$ 在區間 (a,b) 內至少有一個實根。

特別注意的是，當 $f(x)$ 為實係數多項式且 $f(a)f(b)<0$ 時，勘根定理保證方程式 $f(x)=0$ 在區間 (a,b) 內「至少」有一個實根，但並非「恰有」一實根，如圖 3 所示。



(a)一實根



(b)三實根

▲圖 3

利用勘根定理來判斷多項式方程式根的範圍。

教學小提醒

1 學生常誤認勘根定理保證方程式恰有一實根，此處可多做說明。

例題 8

試問方程式 $x^3-8x+1=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

解

設 $f(x)=x^3-8x+1$，由觀察及簡易計算可以看出：當 $x\geq 3$ 時，$f(x)>0$；而當 $x\leq -3$ 時，$f(x)<0$，因此，只須考慮 -3 到 3 的整數即可，如下表所示。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	9	8	1	-6	-7	4
		異號		異號		異號	

由上表與勘根定理可知，$f(x)=0$ 在區間

$$(-3,-2),(0,1),(2,3)$$

上都分別至少有一個實根。根據代數基本定理，三次方程式 $f(x)=0$ 恰有三個根，因此不會再有其他的根了。

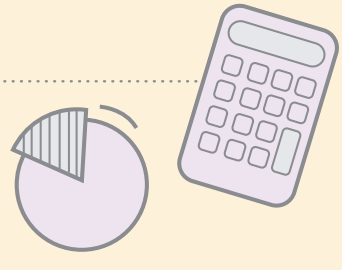
補充例題

1 已知方程式 $f(x)=x^3-3x^2-2x+5=0$ 在兩連續整數 n 與 $n+1$ 之間有實根，求 n 所有的值。

解：將 0 附近的整數代入 $f(x)$，如下表。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-$	$-$	+	+	+	$-$	$-$	+

因為 $f(-2)f(-1)<0$，$f(1)f(2)<0$，$f(3)f(4)<0$，且三次方程式恰有三個根，所以 n 為 -2，1，3。



隨堂練習解答

❶ 設 $f(x)=x^3+x^2-2x-1$，將 0 附近的整數代入 $f(x)$，如下表。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-13	-1	1	-1	-1	7	29

由上表與勘根定理可知，$f(x)=0$ 在區間

$$(-2,-1)\ ,\ (-1,0)\ ,\ (1,2)$$

上都分別至少有一個實根。又因為三次方程式 $f(x)=0$ 恰有三個根，所以 $f(x)=0$ 只有在 $(-2,-1)$，$(-1,0)$，$(1,2)$ 上各恰有一實根。

❷ 因為 $f(-1)=0$，所以

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-6=(x+1)\left(x^2+(a-1)x-6\right)。$$

又方程式 $f(x)=0$ 的三根均為整數，且 $f\left(\sqrt{2}\right)f\left(\sqrt{5}\right)<0$，其中 $\sqrt{2}\approx1.4$，$\sqrt{5}\approx2.2$，推得此整數根為 2。因此可得

$$x^2+(a-1)x-6=(x-2)(x+3)\ ,$$

所以 $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)=x^3+2x^2-5x-6$

解得 $a=2$，$b=-5$。

隨堂練習 1

試問方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

$(-2,-1)$，$(-1,0)$，$(1,2)$ 上各恰有一實根

再來練習一道勘根定理的題目。

例題 9

已知實係數多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 滿足

$$f(0)<0,\ f(\sqrt{2})>0,\ f(\sqrt{5})<0,\ f(\sqrt{10})>0。$$

又方程式 $f(x)=0$ 的三根均為整數，求整數 a,b,c 的值。

解

將已知函數值的正負整理如下表。

x	0	$\sqrt{2}\approx 1.4$	$\sqrt{5}\approx 2.2$	$\sqrt{10}\approx 3.2$
$f(x)$	−	+	−	+
		異號	異號	異號

因為由上表與勘根定理可知，方程式 $f(x)=0$ 的三個整數根分別落在區間

$$(0,\sqrt{2}),(\sqrt{2},\sqrt{5}),(\sqrt{5},\sqrt{10})$$

上，所以三個根分別為 $1,2,3$。又因為 $f(x)$ 的 x^3 項係數為 1，所以，由因式定理可得

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6。$$

故 $a=-6,b=11,c=-6$。

隨堂練習 2

已知整係數多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$ 滿足

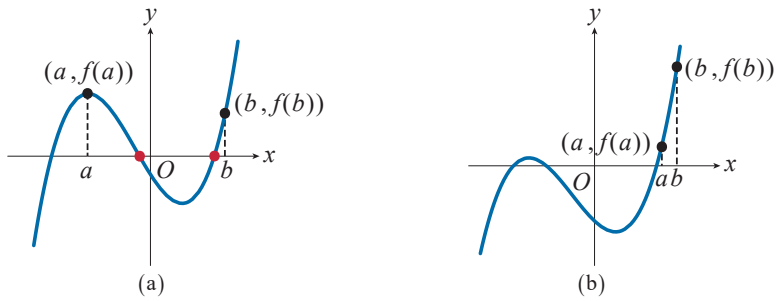
$$f(-1)=0 \text{ 與 } f(\sqrt{2})f(\sqrt{5})<0，$$

且方程式 $f(x)=0$ 的三根均為整數，求 a,b 的值。

$a=2$，$b=-5$

79

勘根定理只說明了實係數多項式 $f(x)$ 當 $f(a)f(b)<0$ 時，方程式 $f(x)=0$ 在區間 (a,b) 內至少有一個實根。至於當 $f(a)f(b)>0$（即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 同號）時，方程式 $f(x)=0$ 在區間 (a,b) 內可能有實根（如圖 4 (a) 所示），也可能沒有實根（如圖 4 (b) 所示）。



▲圖 4

最後，來看一道結合三次函數圖形與三次方程式實根個數的問題，這裡我們將藉助第五冊學過的微分來畫出三次函數的圖形。

例題 10

求三次方程式 $x^3-3x^2-9x+1=0$ 的相異實根個數。

解

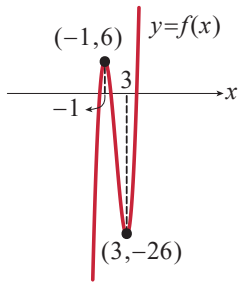
設 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$。

首先，求出 $f'(x)$，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)。$$

接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下。

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗



最後，因為 $f(x)$ 的首項係數為正，所以函數 $y=f(x)$ 的示意圖如上圖所示。

由上圖可得三次方程式 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1=0$ 有 3 個相異實根。

隨堂練習

求三次方程式 $x^3-6x^2+9x-4=0$ 的實根個數。

3 個

教學小提醒

1 此處搭配多項式的函數圖形，進而讓學生更理解函數圖形和 x 軸的交點個數與多項式方程式實根之間的關係。

2 ① 此隨堂練習的方程式為三實根，其中兩根為重根，因此，雖然實根個數有 3 個，但是相異的實根個數只有 2 個。

② 若利用勘根定理找此隨堂練習方程式的根，便無法找到二重根，此時需搭配函數的圖形，才能確認其中一根是二重根。

隨堂練習解答

❶ 設 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$。

首先，求出 $f'(x)$，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)。$$

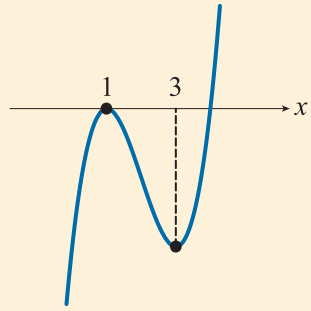
接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下。

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	−4	↗

最後，因為 $f(x)$ 的首項係數為正，所以函數 $y=f(x)$ 的示意圖如圖所示。

故由圖可得三次方程式 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4=0$ 有 3 個實根，

其中 1 為方程式 $f(x)=0$ 的二重根。



習題解答

觀念澄清

(1) ×：$\alpha+\beta=-2\neq\alpha\beta=2$ 。

(2) ○：根據虛根成對定理，有一根為 $2+i$ ，則必有另一根為 $2-i$ 。

(3) ×：根據勘根定理，當 $f(1)f(2)<0$ 時，方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間至少有一個實根，並非恰有一實根。

一、基礎題

1. (1)由 $x^2=-3$ 可得 $x=\pm\sqrt{3}i$ 。

   (2) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times4}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{3}i}{2}=1\pm\sqrt{3}i$ 。

2. 因為方程式有兩實根（可能相等），所以判別式

   $D=(k-1)^2-4\times1\times k^2=-3k^2-2k+1\geq0$ ，

   即 $3k^2+2k-1=(3k-1)(k+1)\leq0$ ，解得 $-1\leq k\leq\dfrac{1}{3}$ 。

3. 由根與係數的關係，得 $\alpha+\beta=-8$ ， $\alpha\beta=1$ 。

   故 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-8)^2-2\times1=62$ 。

4 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) 若 α, β 為 $x^2+2x+2=0$ 之兩根，則 $\alpha+\beta=\alpha\beta$。

☐ (2) 若實係數多項式方程式有一根為 $2+i$，則必有另一根為 $2-i$。

☐ (3) 若實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)f(2)<0$，則 $f(x)=0$ 在區間 $(1,2)$ 內恰有一實根。

(1) × (2) ○ (3) ×

一、基礎題

1 解下列各方程式。

(1) $x^2+3=0$。 (2) $x^2-2x+4=0$。

(1) $\pm\sqrt{3}i$ (2) $1\pm\sqrt{3}i$

2 已知方程式 $x^2-(k-1)x+k^2=0$ 有兩實根，求實數 k 的範圍。

$-1\le k\le\frac{1}{3}$

3 已知 α, β 為方程式 $x^2+8x+1=0$ 的兩根，求 $\alpha^2+\beta^2$ 的值。

62

4 下列哪些選項是三次方程式 $x^3+3x^2+x+3=0$ 的根？

(1) 1　(2) -1　(3) i　(4) $-i$。

(3)(4)

5 已知 $1+3i$ 為方程式 $x^3+6x+20=0$ 的一個根，求所有的根。

$1\pm3i$, -2

6 試問方程式 $-x^3+4x+2=0$ 在哪些連續整數之間有實根？

$(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(2,3)$

7 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且 $f(x)$ 的一些取值如下表所示。

x	0	1	2
$f(x)$	2	-1	1

有關方程式 $f(x)=0$ 的三個根，選出正確的選項。

(1) 三實根　(2) 兩實根一虛根　(3) 一實根兩虛根　(4) 三虛根。

(1)

4. 令 $f(x)=x^3+3x^2+x+3$

(1) 因為 $f(1)\neq 0$ ，所以 1 不是 $f(x)=0$ 的根。

(2) 因為 $f(-1)\neq 0$ ，所以 -1 不是 $f(x)=0$ 的根。

(3) 因為 $f(i)=0$ ，所以 i 是 $f(x)=0$ 的根。

(4) 因為 $f(-i)=0$ ，所以 $-i$ 是 $f(x)=0$ 的根。

故選(3)(4)。

5. 令 $f(x)=x^3+6x+20$ 。

因為 $1+3i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 的一根，所以 $1-3i$ 也是 $f(x)=0$ 的一根。

因此， $\big(x-(1+3i)\big)\big(x-(1-3i)\big)=x^2-2x+10$ 是 $f(x)$ 的二次因式。

將 $f(x)=0$ 化為 $\big(x^2-2x+10\big)(x+2)=0$ ，

故解得 $x=1\pm 3i$ ， -2 。

6. 設 $f(x)=-x^3+4x+2$ 。

將 0 附近的整數代入 $f(x)$ ，如下表。

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	2	5	2	-13

由上表與勘根定理可知， $f(x)=0$ 在區間

$$(-2,-1)\ ,\ (-1,0)\ ,\ (2,3)$$

上都分別至少有一個實根。又因為三次方程式 $f(x)=0$ 恰有三個根，

所以 $f(x)=0$ 在 $(-2,-1)$ ， $(-1,0)$ ， $(2,3)$ 上各恰有一實根。

7. 由題意與勘根定理可知， $f(x)=0$ 在區間

$$(0,1)\ ,\ (1,2)$$

上都分別至少有一個實根。又因為三次方程式 $f(x)=0$ 恰有三個根且虛根會共軛成對，所以 $f(x)=0$ 有三實根。

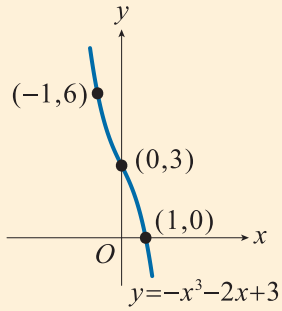
故選(1)。

8. 設 $f(x)=-x^3-2x+3$ 。

首先，求出 $f'(x)=-3x^2-2$ 與 $f''(x)=-6x$ 。

接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下。

x		0	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	3	↘



最後，因為 $f(x)$ 的首項係數為負，所以函數 $y=f(x)$ 的示意圖如右圖所示。

故由圖可得三次方程式 $f(x)=-x^3-2x+3=0$ 有 1 個實根。

二、進階題

9. 令 $f(x)=x^3-8x^2+cx+d$

因為 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$ ，所以 $a+i$ 與 $1+bi$ 都是 $f(x)=0$ 的虛根。

又因為 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式且其虛根個數必為偶數，

所以 $f(x)=0$ 只能有一實根與兩共軛虛根。因此可得

$$\overline{a+i}=a-i=1+bi \text{ ，}$$

解得 $a=1$ 且 $b=-1$ 。

因此， $\big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-i)\big)=x^2-2x+2$ 是 $f(x)$ 的二次因式。利用長除法將 $f(x)$ 除以 x^2-2x+2

$$\begin{array}{r} x\ -6 \\ x^2-2x+2\overline{)\ x^3-8x^2+\ cx\ \ \ \ +d} \\ \underline{\ x^3-2x^2+\ 2x\ \ \ \ \ \ \ \ } \\ -6x^2+(c-2)x\ +d \\ \underline{-6x^2+\ \ \ 12\ x\ -12} \\ (c-14)x+(d+12) \end{array}$$

因為 $f(x)$ 被 x^2-2x+2 整除，所以 $c=14$ 且 $d=-12$ ，

將方程式 $f(x)=0$ 改寫為 $\big(x^2-2x+2\big)(x-6)=0$ ，

解得 $x=1\pm i$, 6。

10. 因為 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且 $1+i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，所以 $1-i$ 也是 $f(x)=0$ 的一根，

因此， $\big(x-(1+i)\big)\big(x-(1-i)\big)=x^2-2x+2$ 是 $f(x)$ 的二次因式。

又三次實係數多項式 $f(x)=0$ 恰有三個根且虛根會共軛成對，所以 $f(x)=0$ 有一實根、兩虛根，

即函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點。

故選(1)(2)(3)(4)。

11. 設截去的正方形邊長為 x 公尺，且 $0<x<2$ 。依題意可得

$$x(4-2x)(6-2x)=8 \text{ ，}$$

展開整理得

$$x^3-5x^2+6x-2=0 \text{ ，}$$

因式分解得

$$(x-1)\big(x^2-4x+2\big)=0 \text{ ，}$$

解得 $x=1$, $2\pm\sqrt{2}$ 。

因為 $0<x<2$ ，所以 $x=1$ 或 $2-\sqrt{2}$ （公尺）。

8 求三次方程式 $-x^3-2x+3=0$ 的實根個數。

1 個

二、進階題

9 已知 $a+i$ 與 $1+bi$（其中 a 與 b 為實數，且 $b\neq 0$）為實係數三次方程式 $x^3-8x^2+cx+d=0$ 的兩個根，求所有的根。

$1\pm i$, 6

10 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且 $1+i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，選出所有正確的選項。

(1) $f(1-i)=0$

(2) $f(3+2i)\neq 0$

(3) 函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點

(4) 多項式 $f(x)$ 可被 x^2-2x+2 整除。

(1)(2)(3)(4)

11 將長 6 公尺、寬 4 公尺的矩形紙板，四個角各截去一個面積相等的正方形，然後將各邊摺起來，做成一個無蓋的長方體容器，如果此容器的容積為 8 立方公尺（紙板厚度不計），求截去的正方形邊長。

1 或 $2-\sqrt{2}$（公尺）

補充教材

● 牛頓定理

解高次方程式通常不是一件容易的事，若能找到高次方程式 $f(x)=0$ 的整係數一次因式 $ax-b$ ，就可得到 $f(x)=0$ 的一個有理根 $\frac{b}{a}$ 。底下介紹一個可以找出多項式之整係數一次因式的方法。

牛頓定理（或稱整係數一次因式檢查法）

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一個整係數 n 次多項式。若一次式 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式（其中 a 是正整數， b 是整數且 a , b 互質），則

(1) a 是 $f(x)$ 的最高次項係數 a_n 之因數。

(2) b 是 $f(x)$ 的常數項 a_0 之因數。

證明 (1) 因為 $ax-b$ 是 $f(x)$ 的因式，所以由因式定理知 $f\left(\frac{b}{a}\right)=0$，即

$$a_n\left(\frac{b}{a}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{b}{a}\right)+a_0=0 \text{ 。}$$

將等號兩邊同乘 a^n 得

$$a_nb^n+a_{n-1}ab^{n-1}+\cdots+a_1a^{n-1}b+a_0a^n=0 \text{ 。}$$

在這等式中，除了最左邊的 a_nb^n 項之外，其餘的每一項都是 a 的倍數。將這些 a 之倍數的項移到右邊，並提出公因數 a，可得

$$a_nb^n=-a\left(a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1a^{n-2}b+a_0a^{n-1}\right) \text{ ，}$$

推得

$$\frac{a_nb^n}{a}=-\left(a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1a^{n-2}b+a_0a^{n-1}\right)$$

是一個整數，即 a_nb^n 是 a 的倍數。

又因為 a 與 b 互質，所以 a 與 b^n 也互質。故 a 是 a_n 的因數。

(2) 同(1)的方法，保留 a_0a^n 項在左邊，其餘的項移到右邊，考慮 $\frac{a_0a^n}{b}$ 是整數，且 b 與 a^n 互質，可以證得 b 是 a_0 的因數。

● 無理根成對定理

無理根成對定理

設 $f(x)$ 為有理係數 n 次多項式（n 為大於 1 的整數）。若 $a+b\sqrt{c}$（a，b，c 是有理數，$b\neq 0$ 且 $\sqrt{c}$ 為無理數）是方程式 $f(x)=0$ 的一個根，則 $a-b\sqrt{c}$ 也是方程式 $f(x)=0$ 的一個根。

證明 首先，令二次多項式 $g(x)$ 為

$$g(x)=\left(x-\left(a+b\sqrt{c}\right)\right)\left(x-\left(a-b\sqrt{c}\right)\right)=x^2-2ax+a^2-b^2c\ ,$$

可得 $g(x)$ 為有理係數二次多項式且 $g\left(a+b\sqrt{c}\right)=g\left(a-b\sqrt{c}\right)=0$。

接著，將有理係數多項式 $f(x)$ 除以 $g(x)$，由除法定理可得

$$f(x)=g(x)\times q(x)+(mx+n)\ ,\qquad ①$$

被除式 = 除式 × 商式 + 餘式

其中 $q(x)$ 為有理係數多項式，且 m, n 皆為有理數。

最後，分別將 x 以 $a+b\sqrt{c}$ 與 $a-b\sqrt{c}$ 代入①式，得

$$f\left(a+b\sqrt{c}\right)=0\times q\left(a+b\sqrt{c}\right)+m\left(a+b\sqrt{c}\right)+n=(am+n)+bm\sqrt{c}\ ,$$

$$f\left(a-b\sqrt{c}\right)=0\times q\left(a-b\sqrt{c}\right)+m\left(a-b\sqrt{c}\right)+n=(am+n)-bm\sqrt{c}\ .$$

因為 $a+b\sqrt{c}$ 是 $f(x)=0$ 的一個根，即

$$f\left(a+b\sqrt{c}\right)=(am+n)+bm\sqrt{c}=0\ ,$$

又因為 $am+n$ 與 bm 皆為有理數，所以

$$am+n=0 \text{ 且 } bm=0\ .$$

因此可得 $f\left(a-b\sqrt{c}\right)=(am+n)-bm\sqrt{c}=0$，即 $a-b\sqrt{c}$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根。

多項式方程式的公式解

解多項式方程式具有很悠久的歷史，遠在西元前 1600 年，巴比倫人就提出了解二次方程式的問題。他們雖然提供了求解的方法，但並未發現代數公式來表示其根。而古希臘人雖以幾何作圖的方法解二次方程式，但至少到西元 100 年才發現了代數公式來表示其根。

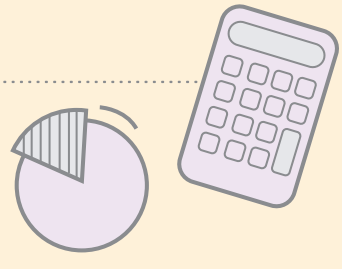
所謂方程式的代數公式解就是由方程式的係數經過四則運算與開方等有理運算所得的解，通常稱為根式解（solution by radicals）。例如：一元一次方程式 $ax+b=0$ 的根式解為 $x=-\frac{b}{a}$。又一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根式解為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

至於三次和四次方程式的根式解比較困難，直到西元 1535 年才分別由義大利的數學家卡當諾（G. Cardano, 1501～1576）和他的學生所發現。現在看來很簡單之多項式方程式的根式解在當時卻耗費了數學家們很多的光陰。當四次方程式的根式解發現後，當時的數學家們接著就想要求得五次方程式的根式解，發現有些五次方程式無法求得根式解。最後，數學家們有了一個共同的猜測，即一般的五次方程式不能以公式求解，但沒有人提出證明。到了西元 1813 年始由魯菲尼（P. Ruffini, 1765～1822）提出證明。可是後來發現，魯菲尼所提出的證明有誤，最後才由挪威的一個農家子弟阿貝爾（N. H. Abel, 1802～1829）證明出來。事實上，阿貝爾剛開始也曾經犯了錯誤，誤證五次方程式有根式解。但很快地他就發現自己的錯誤，終於在 1824～1826 年間，證明了五次方程式不可能有根式解。阿貝爾解決了這個大問題之後，下一步即尋求形如

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的有理係數 n 次方程式是否可用公式求解。當阿貝爾正為此努力工作時，卻不幸因肺病於 1829 年逝世。在 1832 年，法國有一位青年數學家伽羅瓦（É. Galois, 1811～1832），他證明了五次以上的有理係數方程式皆不可用根式求解，並發展出永垂不朽的伽羅瓦理論。

資料來源：

本文節錄自國立編譯館高級中學基礎數學教師手冊第一冊第 95 頁（國立臺灣師範大學科學教育中心主編）