

總 分
測驗時間：20分鐘

選修數學乙(下)小試身手卷 (中偏易)

請

尊重著作權
勿擅自翻印

第 11 回

範圍：單元 4 多項式方程式的根

____年____班____號

(主題：乙)

姓名_____

一、單選題(5 小題，每格 10 分，共 50 分)

1. () 已知 -1 為實係數方程式 $x^3 + x^2 - 2x + a = 0$ 的一個根，則 a 的值為何？
(A)1 (B)-1 (C)2 (D)-2 (E)4

解答

D

解析

設 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + a$ ，

因為 -1 為方程式 $f(x)=0$ 的根，所以 $f(-1) = 0$ ，

即 $-1 + 1 + 2 + a = 0$ ，解得 $a = -2$

2. () 已知 $1 + 2i$ 為實係數方程式 $x^3 + x^2 - x + a = 0$ 的一個根，則 a 的值為何？
(A)5 (B)-5 (C)10 (D)-10 (E)15

解答

E

解析

設 $f(x) = x^3 + x^2 - x + a$ ，

因為 $1 + 2i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 的一個根，由虛根成對定理可知，

$1 - 2i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根，

所以 $(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) = x^2 - 2x + 5$ 是 $f(x)$ 的二次因式。

利用長除法計算 $f(x)$ 除以 $x^2 - 2x + 5$ 如下，

$$\begin{array}{r}
 x + 3 \\
 x^2 - 2x + 5 \overline{) x^3 + x^2 - x + a} \\
 \underline{x^3 - 2x^2 + 5x} \\
 3x^2 - 6x + a \\
 \underline{3x^2 - 6x + 15} \\
 (a - 15)
 \end{array}$$

又 $x^2 - 2x + 5$ 是 $f(x)$ 的二次因式，所以 $a - 15 = 0$ ，得 $a = 15$

3. () 已知 $a - 2i$ 與 $-3 + bi$ 為實係數三次方程式 $x^3 + 5x^2 + cx + d = 0$ 的兩個根，其中 a 與 b 為實數，且 $b \neq 0$ ，則 $a + b$ 的值為何？
(A)1 (B)-1 (C)5 (D)-5 (E)4

解答

B

解析

設 $f(x) = x^3 + 5x^2 + cx + d$ ，

因為 a 與 b 為實數，且 $b \neq 0$ ，所以 $a - 2i$ 與 $-3 + bi$ 都是 $f(x)=0$ 的虛根。

又因為 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式且其虛根個數必為偶數，

所以 $f(x)=0$ 只能有一實根與兩共軛虛根。因此， $a - 2i$ 與 $-3 + bi$ 為共軛複數，

即 $a + 2i = -3 + bi$ ，可得 $a = -3$ 且 $b = 2$ ，所以 $a + b = -1$

4. () 設 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式，已知 $f(x)$ 的領導係數為 1，且 2 與 $1-2i$ 為方程式 $f(x)=0$ 的根，則 $f(x)$ 的常數項為下列何者？
(A) -4 (B) 4 (C) -10 (D) 10 (E) -20

解答

C

解析

因為 $1-2i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 的一個根，由虛根成對定理可知，
 $1+2i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根，又 2 亦為 $f(x)=0$ 的一個根，
所以 $f(x) = (x-2)(x-(1-2i))(x-(1+2i))$ ，
則常數項為 $(-2)(-(1-2i))(-(1+2i)) = -10$

5. () 設 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式，下列何者**錯誤**？
(A) 方程式 $f(x)=0$ 一定有虛根 (B) 方程式 $f(x)=0$ 一定有實根 (C) 方程式 $f(x)+x^3=0$ 不一定有實根 (D) 若 $f(4+3i)=0$ ，則 $f(3-4i) \neq 0$ (E) 方程式 $f(x)=0$ 最多有兩個虛根

解答

A

解析

說明：由虛根成對定理可知，
實係數三次方程式 $f(x)=0$ 根的情形可能為
(i) 三個實根；(ii) 一個實根、兩個虛根 (A) 由說明(i)可知不一定有虛根
(B) 由說明(i)(ii)可知一定有實根 (C) 設 $g(x) = f(x)+x^3$ 。當 $f(x) = -x^3+x^2+1$
時，可得 $g(x) = x^2+1$ ，此時，因為 $g(x)=0$ 無實根，即 $f(x)+x^3=0$ 無實根。
故 $f(x)+x^3=0$ 不一定有實根 (D) 因為 $f(4+3i)=0$ ，所以由虛根成對定理
可知， $4 \pm 3i$ 為實係數三次方程式 $f(x)=0$ 的兩虛根，且另一根必為實根。
因此 $3-4i$ 不可能是 $f(x)=0$ 的根，即 $f(3-4i) \neq 0$ (E) 由說明(i)(ii)可知
 $f(x)=0$ 最多有兩個虛根

二、 填充題(3 小題，每格 10 分，共 50 分)

1. 已知 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = (x+2)g(x)$ ，則方程式 $f(x)=0$ 的三個根為_____。

解答

-2 或 $2 \pm \sqrt{3}$

解析

利用除法，可得 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = (x+2)(x^2 - 4x + 1)$ ，則

$f(x)=0$ 的三個根為 $x = -2$ 或 $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ 。

2. 已知 $2+3i$ 為實係數方程式 $x^3-3x^2+9x+c=0$ 的一個根。

(1) 求 c 的值 = _____。

(2) 求另兩根為_____。

解答

(1) 13 (2) -1 或 $2-3i$

解析

設 $f(x)=x^3-3x^2+9x+c$ 。

(1) 因為 $2+3i$ 是實係數方程式 $f(x)=0$ 的一個根，

由虛根成對定理可知， $2-3i$ 也是 $f(x)=0$ 的一個根，

所以 $(x-(2-3i))(x-(2+3i))=x^2-4x+13$ 是 $f(x)$ 的二次因式。

利用長除法計算 $f(x)$ 除以 $x^2-4x+13$ 如下，

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-4x+13 \overline{) x^3-3x^2+9x+c} \\ \underline{x^3-4x^2+13x} \\ x^2-4x+c \\ \underline{x^2-4x+13} \\ (c-13) \end{array}$$

因為 $f(x)$ 被 $x^2-4x+13$ 整除，所以 $c-13=0$ ，得 $c=13$ 。

(2) 承上題，利用長除法可將方程式 $f(x)=0$ 改寫為

$(x+1)(x-(2-3i))(x-(2+3i))=0$ ，得其根為 -1 、 $2-3i$ 、 $2+3i$ ，

故另兩根為 -1 、 $2-3i$ 。

3. 已知 $3+ai$ 與 $b-4i$ 為實係數三次方程式 $x^3-4x^2+cx+d=0$ 的兩個根，其中 a 與 b 為實數，且 $a \neq 0$ 。

(1) 數對 $(a,b) =$ _____。

(2) 數對 $(c,d) =$ _____。

解答

(1) (4,3) (2) (13,50)

解析

設 $f(x)=x^3-4x^2+cx+d$ 。

(1) 因為 a 與 b 為實數，且 $a \neq 0$ ，所以 $3+ai$ 與 $b-4i$ 都是 $f(x)=0$ 的虛根。

又因為 $f(x)=0$ 為實係數三次方程式且其虛根個數必為偶數，

所以 $f(x)=0$ 只能有一實根與兩共軛虛根。

因此， $3+ai$ 與 $b-4i$ 為共軛複數，即 $3+ai=b+4i$ ，解得 $a=4$ 且 $b=3$ 。

(2) 由上題可得 $(x-(3-4i))(x-(3+4i))=x^2-6x+25$ 是 $f(x)$ 的二次因式。

利用長除法計算 $f(x)$ 除以 $x^2-6x+25$ 如下，

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2-6x+25 \overline{) x^3-4x^2+cx+d} \\ \underline{x^3-6x^2+25x} \\ 2x^2+(c-25)x+d \\ \underline{2x^2-12x+50} \\ (c-13)x+(d-50) \end{array}$$

因為 $f(x)$ 被 $x^2-6x+25$ 整除，所以 $c-13=0$ 且 $d-50=0$ ，

解得 $c=13$ ， $d=50$ 。