2 函數與函數的極限

一 教材摘要

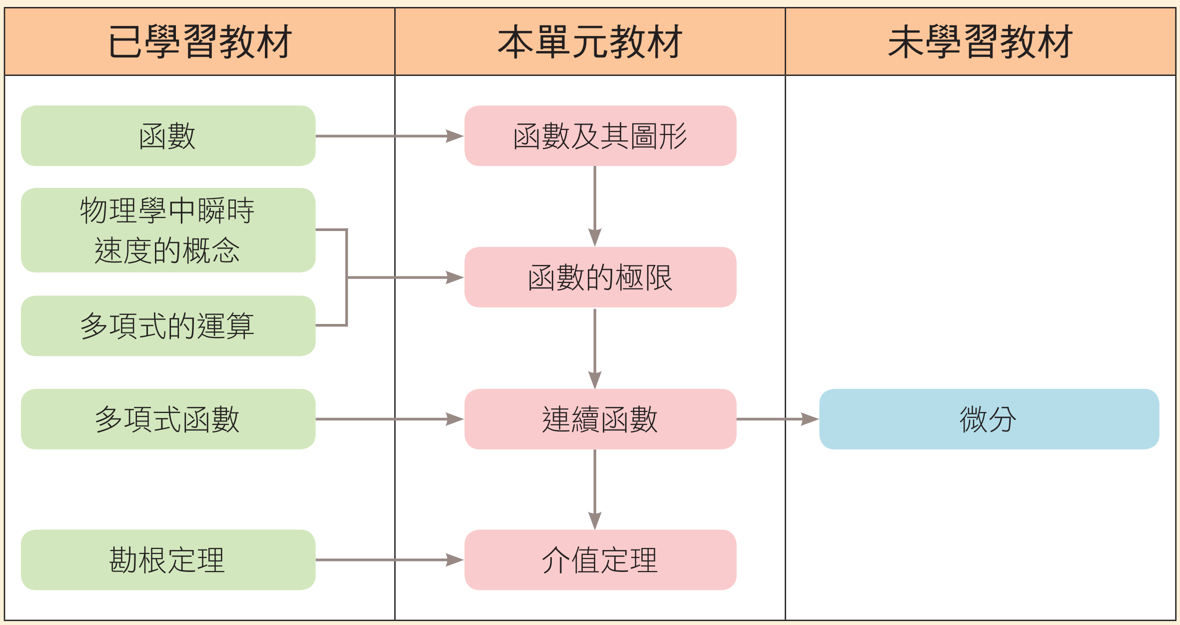
首先以實例引進函數及說明函數的概念，接著介紹一些特殊函數的圖形，及函數的運算。

對於函數的極限，利用數據法與圖形法來說明。接著介紹函數極限的求法及極限的運算性質，進而推導出多項式函數在 $x = a$ 的極限就是它在 $x = a$ 的函數值，最後引進連續函數的概念及介紹介值定理。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 了解函數的意義，並能判別兩變量間的關係是否為函數關係。 2. 了解函數圖形的意義，並能判別坐標平面上的圖形是否為函數圖形。 3. 能作函數的四則運算。 4. 了解函數極限的意義。 5. 了解函數極限的四則運算性質，並能利用此性質求函數的極限。 6. 知道多項式函數在 $x = a$ 的極限就是它在 $x = a$ 的函數值。 7. 了解連續函數的意義，並知道多項式函數都是連續函數。 8. 了解介值定理的意義。	12

三 教材地位分析


已學習教材
本單元教材
未學習教材
函數
物理學中瞬時
速度的概念
多項式的運算
多項式函數
勘根定理
函數及其圖形
函數的極限
連續函數
介值定理
微分

2 函數與函數的極限

某城市的計程車車資計費方式為：前 1250 公尺，基本收費 90 元，超過 1250 公尺的部分，每 200 公尺加收 5 元，不足 200 公尺以 200 公尺計算。我們該如何利用函數來描述計程車搭乘距離與車資的對應關係呢？

函數與函數的極限是微積分學的基礎，也是本單元的內容。

▲圖 1

甲 函數的概念

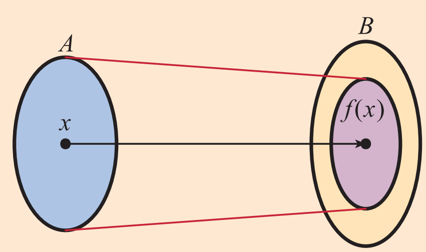
1 在第一冊中，我們以兩變數的對應關係介紹函數的概念，事實上，函數的對應關係也可以用集合來描述，敘述如下。

1 **函數的定義**

設 A 與 B 為兩集合。當 A 中的每一個元素，在 B 中都恰有一個元素與它對應時，稱這種對應關係為由 A 到 B 的函數，記作 $f：A \to B$，或寫成

$$y=f(x),\ x \in A，$$

其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數，$f(x)$ 表示 x 在 B 中的對應元素，稱為函數 f 在 x 的函數值。集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，集合 B 稱為函數 f 的**對應域**，所有函數值所成的集合稱為函數 f 的**值域**。



教學要點

1 首先將函數的對應關係用集合來描述，接著複習二次函數、對數函數的圖形及介紹一些特殊函數的圖形，最後介紹奇函數與偶函數。

教學小提醒

1 教學時要清楚地介紹函數的對應關係，尤其要強調「都恰有一個」的重要性。

本書所討論的函數，其定義域都是實數的部分集合，對應域都是所有實數；如果在描述一個函數時，只寫出式子，但未說出定義域的話，那麼其定義域就是使式子有意義的最大可能集合。

在坐標平面上，對於定義域中的每一個 x，所有點 $(x, f(x))$ 構成的圖形，稱為**函數 $y=f(x)$ 的圖形**，舉例如下。

(1) 二次函數

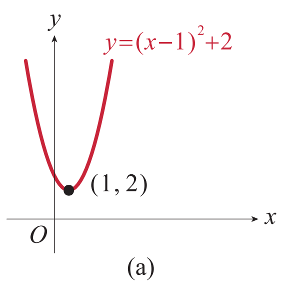
$$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

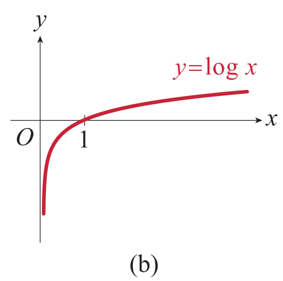
的定義域為所有實數 $\mathbb{R}$。我們知道其圖形是以 $(1, 2)$ 為頂點，開口向上的拋物線，如圖 2 (a) 所示。由圖形得知，其值域為 $\{y\in\mathbb{R} \mid y\geq 2\}$。

(2) 常用對數函數

$$y=\log x$$

的定義域為所有正實數，即 $\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$。我們知道其圖形是一條在 y 軸右方且一直升高的曲線，如圖 2 (b) 所示。由圖形得知，其值域為所有實數 $\mathbb{R}$。





▲圖 2

函數圖形的特徵：根據函數的定義，「定義域中的每一個 x 都只有一個對應的函數值 y」，這個規定反映在函數圖形上，就是

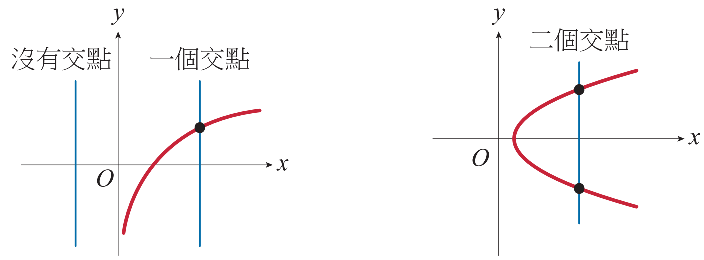
「每一條鉛直線和函數圖形至多有一個交點」。

教學小提醒

❶ ❶判別坐標平面上的圖形是否為函數圖形的方法要解說清楚，此處可舉圓：$x^2+y^2=1$ 當反例。

35

例如圖 3 (a) 中，任一條鉛直線與圖形至多有一個交點，此圖形為函數圖形；圖 3 (b) 中，有一條鉛直線與圖形不只有一個交點，此圖形不是函數圖形。



(a) 函數圖形　　(b) 非函數圖形

▲圖 3

我們來做一道例題。

例題 1

判斷函數 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 的定義域、描繪其圖形並求其值域。

解

① 定義域：

為使函數值有意義，分式的分母不可為 0，所以函數的定義域為所有不為 0 的實數，即 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$。

② 圖形：

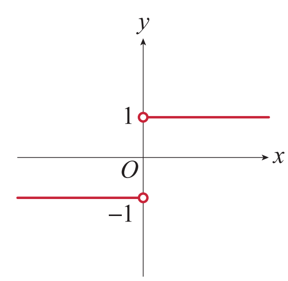
當 $x>0$ 時，$y=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$；

當 $x<0$ 時，$y=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$，

即

$$y=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1，當\ x>0\\-1，當\ x<0\end{cases}。$$

分段描繪函數 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 的圖形如右。

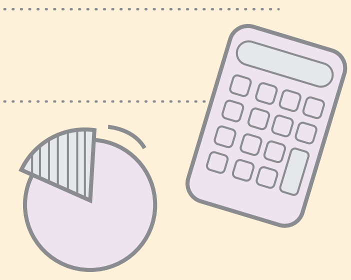


③ 值域：

由函數的圖形得知，函數值恆為 1 或 −1，其值域為

$\{1,-1\}$。

36



隨堂練習解答

1 ① 定義域：

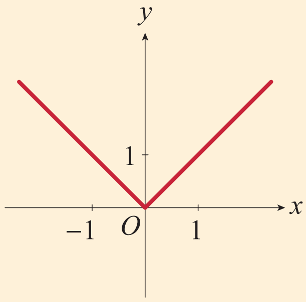
因為對所有實數 x，$|x|$ 都有意義，所以定義域為所有實數。

② 圖形：

當 $x\geq 0$ 時，$y=|x|=x$； 當 $x<0$ 時，$y=|x|=-x$，

即 $y=|x|=\begin{cases} x，若 x\geq 0 \\ -x，若 x<0 \end{cases}$。

分段描繪函數 $y=|x|$ 的圖形如右。



③ 值域：

由函數的圖形得知，函數值恆大於或等於 0，其值域為

$\{y\in\mathbb{R}|y\geq 0\}$。

補充例題

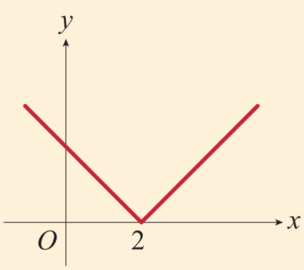
1 判斷絕對值函數 $y=|x-2|$ 的定義域、描繪其圖形並求其值域。

解：① 定義域：

因為 x 為任意實數函數值都有意義，所以定義域為所有實數。

② 圖形：

$y=|x-2|=\begin{cases} x-2，當 x\geq 2 \\ -x+2，當 x<2 \end{cases}$，分段描繪函數的圖形如下。



③ 值域：

由函數的圖形得知，值域為 $\{y\in\mathbb{R}|y\geq 0\}$。

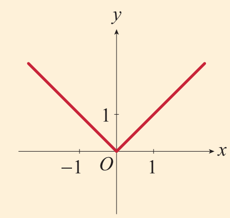
在解 ② 中，我們將函數分段寫成 $y=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1\text{，當 } x>0\\-1\text{，當 } x<0\end{cases}$ 的形式，稱此種函數為**分段定義函數**。例如，絕對值函數 $y=|x|$ 可以分段寫成

$$y=|x|=\begin{cases}x\text{，當 } x\ge 0\\-x\text{，當 } x<0\end{cases}，$$

因此，它也是分段定義函數。

隨堂練習

判斷絕對值函數 $y=|x|$ 的定義域、描繪其圖形並求其值域。



定義域為 $\mathbb{R}$，
值域為 $\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\ge 0\}$

對於任意實數 x， 我們以 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。例如，

$$[2]=2,\ [1.5]=1,\ [-2.5]=-3。$$

我們稱符號 [ ] 為高斯符號。在本單元一開始的引言中，計程車搭乘距離與車資的對應關係可以用含有高斯符號的分段函數來描述。

例題 2

某城市的計程車車資計費方式為：前 1250 公尺，基本收費 90 元，超過 1250 公尺的部分，每 200 公尺加收 5 元，不足 200 公尺以 200 公尺計算。已知搭乘 x 公尺所需支付的車資為

$$f(x)=\begin{cases}a\text{，當 } 0<x\le 1250\\ 90+5\times\left(-\left[\dfrac{b-x}{200}\right]\right)\text{，當 } x>1250\end{cases}$$

元，其中 a,b 為實數，符號 [ ] 為高斯符號，回答下列問題。

(1) 實數 a 的值為何？（單選）

① 5　② 90　③ 200　④ 1250。

(2) 實數 $b=$ ________。

(3) 車資 500 元最多可搭乘多少公尺？

37

解

(1) 因為基本收費 90 元，所以 $a=90$。故選 ②。

(2) 當 $1250<x\leq 1450$ 時，$f(x)=90+5\times\left(-\left[\dfrac{b-x}{200}\right]\right)=95$，得 $\left[\dfrac{b-x}{200}\right]=-1$，即

$$-1\leq\frac{b-x}{200}<0,$$

解得 $b<x\leq b+200$。故 $b=1250$。

(3) 令 $90+5\times\left(-\left[\dfrac{b-x}{200}\right]\right)=500$，則 $\left[\dfrac{1250-x}{200}\right]=-82$，得

$$-82\leq\frac{1250-x}{200}<-81,$$

解得 $17450<x\leq 17650$。故最多可搭乘 17650 公尺。

1 **隨堂練習**

已知租借某共乘機車 x 分鐘所需支付的租金為

$$f(x)=\begin{cases}15，當\ 0<x\leq 6\\ 15+2.5\times\left(-[6-x]\right)，當\ x>6\end{cases}$$

元，其中符號 [ ] 為高斯符號，回答下列問題。

(1) 租借 19 分 30 秒的租金為多少元？

(2) 租金 100 元最多可使用多少時間？

(1) 50 元
(2) 40 分鐘

隨堂練習解答

1 (1) 因為 $f(19.5)=15+2.5\times 14=50$，所以租金為 50 元。

(2) 令 $15+2.5\times\left(-[6-x]\right)=100$，則 $[6-x]=-34$，得 $-34\leq 6-x<-33$，
解得 $39<x\leq 40$。故最多可使用 40 分鐘。

至此，我們描繪了幾個函數的圖形，並借助函數的圖形求得值域。事實上，有些函數的圖形並不容易畫出（例如，高次多項式函數），此時可以借助電腦來幫助我們畫出函數圖形。

此外，有些函數具有對稱的性質，了解函數的對稱性有助於分析較複雜的函數，介紹如下。

(1) 對稱於原點：三次函數 $f(x)=x^3$，對於實數 x，恆有

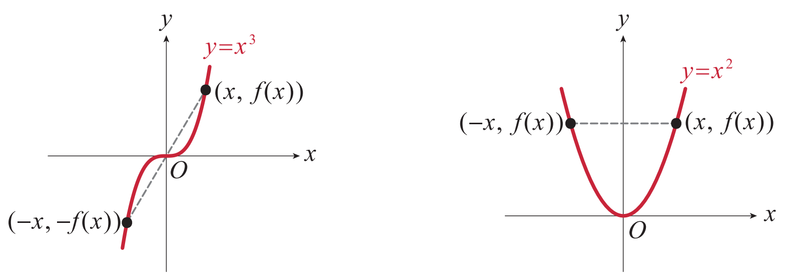
$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)。$$

這表示其函數圖形對稱於原點，如圖 4 (a) 所示，我們稱具有這樣特性的函數為**奇函數**。

(2) 對稱於 y 軸：二次函數 $f(x)=x^2$，對於實數 x，恆有

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)。$$

這表示其函數圖形對稱於 y 軸，如圖 4 (b) 所示，我們稱具有這樣特性的函數為**偶函數**。



(a) (b)

▲圖 4

奇函數與偶函數

(1) 當函數 $f(x)$ 對所有 x 均滿足 $f(-x)=-f(x)$ 時，稱 $f(x)$ 為奇函數，其圖形對稱於原點。

(2) 當函數 $f(x)$ 對所有 x 均滿足 $f(-x)=f(x)$ 時，稱 $f(x)$ 為偶函數，其圖形對稱於 y 軸。

由上述定義可知，函數 $y=\sin x$ 與五次單項函數 $f(x)=ax^5$ 都是奇函數；函數 $y=|x|$ 與四次單項函數 $f(x)=ax^4$ 都是偶函數。1

教學小提醒

1 各項均為奇數次的多項式函數為奇函數；各項均為偶數次的多項式函數為偶函數。

39

1

隨堂練習

已知函數 $f(x)=5x^4+3$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=x^3+2$，選出所有正確的選項。

(1) $f(x)$ 為偶函數

(2) $f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸

(3) $g(x)$ 的圖形對稱於原點

(4) $h(x)$ 為偶函數

(5) $h(x)$ 為奇函數。

(1)(2)(3)

教學要點

1 介紹函數的四則運算及合成函數。

1

乙 函數的運算

第三冊中，我們將函數 $f(x)=\sin x$ 與 $g(x)=\cos x$ 相加後產生了新的函數 $h(x)=\sin x+\cos x$。事實上，使用函數間的四則運算或合成運算來產生新函數是常見的兩個方式，介紹如下。

(一) 函數的四則運算

相較於實數的四則運算，我們定義函數的四則運算。

函數的四則運算

設集合 A 為函數 f 與 g 定義域的交集。對於 A 中的每一個數 x，定義四個函數 $f+g, f-g, fg$ 與 $\dfrac{f}{g}$ 如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\text{，其中 } g(x)\neq 0\text{。}$$

由上述的定義可知函數 $f+g, f-g$ 與 fg 的定義域為 f 與 g 定義域的交集 A；而函數 $\dfrac{f}{g}$ 的定義域為集合 A 扣除「使得 $g(x)=0$ 的部分」。

隨堂練習解答

1 (1) 因為 $f(-x)=5(-x)^4+3=5x^4+3=f(x)$，所以 $f(x)$ 為偶函數。

(2) 因為 $f(x)$ 為偶函數，所以 $f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸。

(3) 因為 $g(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 為奇函數，因此 $g(x)$ 的圖形對稱於原點。

(4) 因為 $h(-x)=(-x)^3+2=-x^3+2\neq h(x)$，所以 $h(x)$ 不是偶函數。

(5) 因為 $h(-x)=-x^3+2\neq -h(x)$，所以 $h(x)$ 不是奇函數。

故選 (1)(2)(3)。

我們來做一道例題。

例題 3

已知函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=\sqrt{1-x}$，求下列各函數及其定義域。

(1) $(f+g)(x)$。　(2) $(f-g)(x)$。　(3) $(fg)(x)$。　(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$。

解

函數 $f(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$, $g(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 1\}$，它們的交集為 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$，其中使得 $g(x)=0$ 的部分為 $\{1\}$。根據函數四則運算的定義，得下列函數及其定義域。

(1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$。

(2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$。

(3) $(fg)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}=\sqrt{x(1-x)}$，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$。

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x<1\}$。

隨堂練習

1

已知函數 $f(x)=x^2-4$ 與 $g(x)=x-2$，求下列各函數及其定義域。

(1) $(f+g)(x)$。　(2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$。

(1) $(f+g)(x)=x^2+x-6$，定義域為 $\mathbb{R}$

(2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=x+2$，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2\}$

隨堂練習解答

1 函數 $f(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$，$g(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$，它們的交集為 $\mathbb{R}$。

(1) $(f+g)(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$，且 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+x-6$。

(2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}|x\neq 2\}$，且 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$（$x\neq 2$）。

(二) 合成函數

函數 $(x+1)^3$ 與 $\sin 2x$ 是我們熟悉的函數，事實上它們都可以是合成函數。以 $(x+1)^3$ 為例介紹函數的合成如下：給定函數 $f(x)=x+1$ 與 $g(x)=x^3$，我們可以利用這兩個函數組合成一個新的函數。例如，如圖 5 所示，「x 先經由函數 f 的對應，再經由函數 g 的對應」就可得新的函數 h，即

$$h(x)=g\big(f(x)\big)=g(x+1)=(x+1)^3。$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & x+1 \arrow[r, "g"] & (x+1)^3 \end{tikzcd}$$

▲圖 5

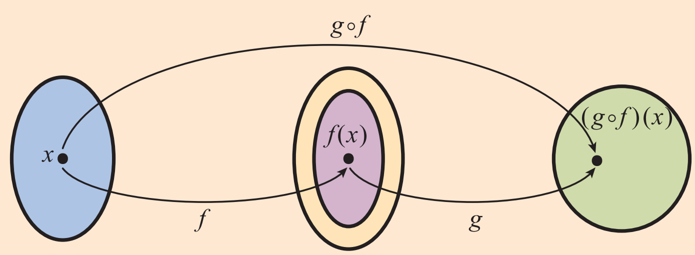
此時，我們稱 h 是 g 與 f 的**合成函數** $g\circ f$（讀作 g circle f），定義如下。

合成函數

函數 g 與 f 的合成函數 $g\circ f$ 定義為

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)，$$

其定義域就是使 $f(x)$ 落在 g 的定義域中之所有 x 所成的集合。



此外，我們將上述函數 $f(x)=x+1$ 與 $g(x)=x^3$ 的組合順序反過來，即「x 先經由函數 g 的對應，再經由函數 f 的對應」，如圖 6 所示：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & x^3 \arrow[r, "f"] & x^3+1 \end{tikzcd}$$

▲圖 6

此時，所得的合成函數為 $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(x^3\right)=x^3+1$，與先前求出的合成函數 $g\circ f$ 並不相同。事實上，合成函數 $g\circ f$ 與 $f\circ g$ 不一定是同一個函數。

42

練習求合成函數。

例題 4

已知函數 $f(x)=3x+2$ 與 $g(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$，求下列各合成函數。

(1) $(g\circ f)(x)$。 (2) $(f\circ g)(x)$。

解

根據合成函數的定義，得下列函數。

(1) $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x+2)=\frac{1}{3}(3x+2)-\frac{2}{3}=x$。

(2) $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)+2=x$。

隨堂練習

已知函數 $f(x)=x^2+x+1$ 與 $g(x)=x-3$，求下列各合成函數。

(1) $(g\circ f)(x)$。 (2) $(f\circ g)(x)$。

(1) x^2+x-2
(2) x^2-5x+7

教學小提醒

1 函數的合成不具交換律。

隨堂練習解答

1 根據合成函數的定義，得下列函數。

(1) $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g\big(x^2+x+1\big)=\big(x^2+x+1\big)-3=x^2+x-2$。

(2) $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x-3)=(x-3)^2+(x-3)+1=x^2-5x+7$。

補充例題

1 已知函數 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，求合成函數 $(f\circ f)(x)$。

解：$(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=x$。

教學要點

1 利用數據法與圖形法，兩種直觀的方法來說明極限。接著舉實例說明函數極限的概念。

教學小提醒

1 當我們使用「x 趨近 2」這樣的詞句時，就已經表示 $x \neq 2$，這一點在教學時要特別強調，以免學生誤以為「x 趨近 2」就是「令 $x=2$」。

2 使用數據法解說極限時，務必把大於 2 及小於 2 的 x 值都拿來講解，以增加學生對兩側趨近有更深刻的體會。

1 # 丙 函數的極限

我們學過數列的極限，現在來介紹函數的極限。首先考慮函數 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$（$x \neq 2$）。想知道的是：當 x 的值愈來愈接近 2，但不等於 2 時，$f(x)$ 的值會發生什麼變化？底下用兩種方法來觀察。為了方便觀察，我們將 $f(x)$ 化簡如下：

因為 $x \neq 2$，所以

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2。$$

1 ## (一) 數據法：

將 x 取 2 左、右兩邊附近的值，並實際地計算出 $f(x)=x+2$ 的值來觀察，如下表：

x 逐漸增大且接近 2 → 2 ← x 逐漸減小且接近 2

2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999	3.9999		4.0001	4.001	4.01	4.1

觀察以上的數據，當 x 的值逐漸靠近 2 時，$f(x)$ 的值會逐漸靠近 4。事實上，$f(x)$ 的值要多靠近 4 都可以，只要 x 的值足夠靠近 2；換句話說，$|f(x)-4|$ 的值要多小都可以，只要 $|x-2|$ 的值足夠小。舉以上的數據來說。

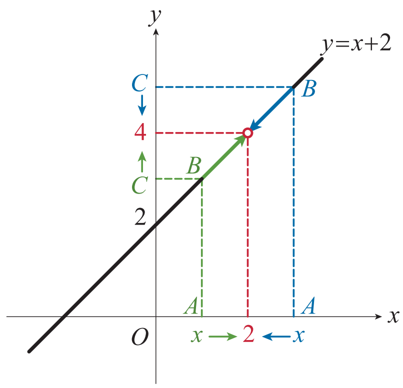
① 若想要 $f(x)$ 的值與 4 的差距在 0.01 內（即 $|f(x)-4|<0.01$），則只要將 x 限定在 $0<|x-2|<0.01$ 的範圍內即可。

② 若想要 $f(x)$ 的值與 4 的差距在 0.0001 內（即 $|f(x)-4|<0.0001$），則只要將 x 限定在 $0<|x-2|<0.0001$ 的範圍內即可。

一般而言，想要 $f(x)$ 的值與 4 的差距在某一正數內，都可以根據這個正數找到 x 的範圍，使得在此範圍內的 x，$f(x)$ 的值與 4 的差距都會小於這個正數。此時我們說：當 x 從左、右兩邊趨近 2（$x \neq 2$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近 4。

（二）圖形法：

因為 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$（$x\neq 2$）可化簡為 $f(x)=x+2$，所以 $f(x)$ 的圖形就是在直線 $y=x+2$ 上「挖掉」點 $(2,4)$ 所成的圖形，如圖 7 所示：



▲圖 7

在圖 7 中，如果讓 $\overline{AB}$ 保持與 x 軸垂直（其中 A 點在 x 軸上移動，且 B 點保持在函數的圖形上），那麼當 $A(x,0)$ 逐漸向點 $(2,0)$ 靠近時（從左邊或右邊靠近皆可），就會帶動 B 點向點 $(2,4)$ 靠近，此時 B 點在 y 軸投影點 C 也隨著向點 $(0,4)$ 靠近。也就是說，當 x 趨近 2（$x\neq 2$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近 4。

綜合這兩個方法，我們將這樣的情形稱為「**函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 的極限為 4**」，並用符號

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

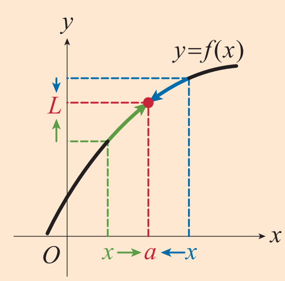
表示。

一般而言，我們將函數的極限定義如下。

函數的極限

設函數 $f(x)$ 在某個包含 a 的開區間中除了 a 以外之任意實數 x 都有定義。當 x 趨近 a（從 a 的左、右兩邊趨近，且 $x\neq a$）時，若對應的函數值 $f(x)$ 會趨近定值 L，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限為 L，記作

$$\lim_{x\to a} f(x)=L。$$



也就是說，只要 x 足夠靠近 a，函數值 $f(x)$ 要多靠近 L 都可以。

教學小提醒

1 使用圖形法解說極限時，若能使用直尺來示範 A 點逐漸向 $(2,0)$ 靠近時，就會帶動 B 點向點 $(2,4)$ 靠近，則應該可以增加學生對極限的了解，但別忘了「兩側趨近」。

45

要注意的是：函數的極限若存在，則只會有一個。由函數極限的定義知道：函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限取決於接近 a 但不等於 a 的那些 x 所對應的函數值，而不是 $x=a$ 的函數值。因此，不管 a 有沒有在 $f(x)$ 的定義域中，都可討論 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限。

例題 5

已知函數 $f(x)=x+2$，求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。

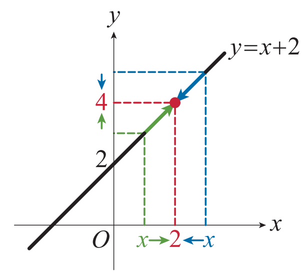
解

函數 $f(x)$ 的圖形是直線 $y=x+2$，如圖所示。

由函數圖形知，當 x 趨近 2（無論從左邊或右邊趨近）時，$f(x)$ 會趨近 4。

因此

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4。$$



1 隨堂練習

已知函數 $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$（$x\neq 1$），求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

3

隨堂練習解答

1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$。

在例題 5 中，函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 的極限恰好等於函數值，即 $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$。這個結果對一些函數並不成立，舉例如下。

例題 6

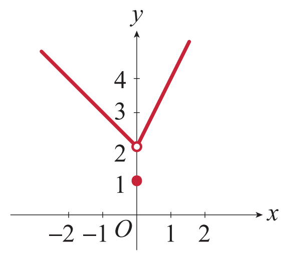
設函數 $f(x)=\begin{cases} 2x+2，當\ x>0 \\ 1，當\ x=0 \\ -x+2，當\ x<0 \end{cases}$。

(1) 求 $\lim_{x\to 0} f(x)$。

(2) 極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 與函數值 $f(0)$ 是否相等？

解

根據題意，描繪 $y=f(x)$ 的圖形，如圖所示。



(1) 由函數圖形知，當 x 趨近 0（無論從左邊或右邊趨近）時，$f(x)$ 會趨近 2。因此，

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2。$$

(2) 因為 $\lim_{x\to 0} f(x)=2$，而 $f(0)=1$，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)。$$

隨堂練習

1

設函數 $f(x)=\begin{cases} -x^2+2，當\ x>0 \\ 2，當\ x=0 \\ x+2，當\ x<0 \end{cases}$。

(1) 求 $\lim_{x\to 0} f(x)$。　　(2) 極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 與函數值 $f(0)$ 是否相等？

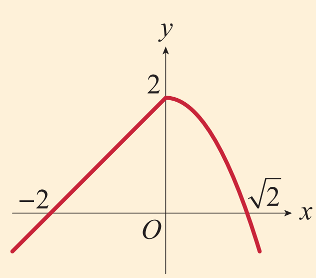
(1) 2
(2) 是，相等

隨堂練習解答

1 圖為 $y=f(x)$ 的圖形。

(1) 當 x 趨近 0 時，$f(x)$ 會趨近 2。因此，$\lim_{x\to 0} f(x)=2$。

(2) 因為 $\lim_{x\to 0} f(x)=2$，且 $f(0)=2$，所以 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$。



綜合以上的實例，把討論函數極限應注意的事項整理如下。

函數極限的概念

當 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 成立時，有三件事情值得注意。

(1)「x 趨近 a」指的是 x 從左、右兩邊趨近 a，但**不等於** a。

(2) 函數值 $f(a)$ 不一定存在。

(3) 即使函數值 $f(a)$ 存在，極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 也不一定等於函數值 $f(a)$。

函數的極限不一定會存在，舉例如下。

教學小提醒

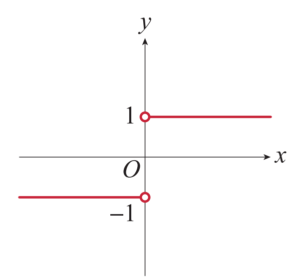
❶ 教學時，不宜花太多時間在極限不存在的問題上，且避免觸及 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 等類型的極限問題。

例題 7 ❶

設函數 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$（$x\neq 0$），討論 $f(x)$ 在 $x=0$ 的極限是否存在？

解

由例題 1 得知，函數 $y=f(x)$ 的圖形如圖所示。



根據函數極限的定義，討論如下。

① 當 x 從右邊趨近 0 時，$f(x)$ 會趨近 1。

② 當 x 從左邊趨近 0 時，$f(x)$ 會趨近 -1。

因此，當 x 趨近 0 時，對應的函數值 $f(x)$ 不會趨近某一定值。

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 的極限不存在。

從上例知道：當 x 分別從左、右兩邊趨近某一數時，函數 $f(x)$ 可能趨近不同的實數。為了方便討論，我們引進下列符號。

(1) 符號 $x\to a^+$ 表 x 從右邊趨近 a，即 $x>a$ 且 $x\to a$。

(2) 符號 $x\to a^-$ 表 x 從左邊趨近 a，即 $x<a$ 且 $x\to a$。

48

(3) 設函數 $f(x)$ 在某一個以 a 為左端點的區間 (a, b) 有定義。當 x 從右邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**右極限**，記作 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$。

(4) 設函數 $f(x)$ 在某一個以 a 為右端點的區間 (c, a) 有定義。當 x 從左邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 M，則稱 M 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的**左極限**，記作 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = M$。

要注意的是：右極限若存在，則只會有一個（左極限亦同）。

根據極限的定義，有以下的結論。

教學小提醒

1 左極限／右極限若存在，只會有一個。

極限與左右極限的關係

設函數 $f(x)$ 在某個包含 a 的開區間中除了 a 以外之任意實數 x 都有定義。若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$，則 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$；反之亦成立。

值得注意的是：當左右極限不相等時，極限不存在。例如：在例題 7 中，將 $f(x)$ 改寫成分段定義函數的形式，即

$$f(x) = \begin{cases} 1，當\ x > 0 \\ -1，當\ x < 0 \end{cases}。$$

因為右極限 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$，而左極限 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$，所以

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)。$$

故極限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在。

隨堂練習

設函數 $f(x) = \begin{cases} x+1，當\ x > 1 \\ -2x+3，當\ x < 1 \end{cases}$。

(1) 求右極限 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$。

(2) 求左極限 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$。

(3) 極限 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 是否存在？

(1) 2
(2) 1
(3) 否，不存在

1

隨堂練習解答

1 (1) 右極限 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 1+1 = 2$。

(2) 左極限 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-2x+3) = -2+3 = 1$。

(3) 因為 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$，$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$，所以 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$，故極限 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在。

教學要點

1 利用函數極限的運算性質求極限，最後再引進函數的夾擠定理求極限。

教學小提醒

1 此處應提醒學生：當極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 都存在時，才能使用運算性質。

1

丁 極限的性質

給定兩函數 $f(x)$ 與 $g(x)$。若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限都存在，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 經過四則運算後，在 $x=a$ 的極限也都會存在。這些性質對於求函數的極限有很大的幫助，敘述如下。

1

函數極限的運算性質

設 c 為常數，且函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 L 與 M，即

$$\lim_{x\to a} f(x)=L,\ \lim_{x\to a} g(x)=M。$$

我們有以下的性質。

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$。

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-M$。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)=cL$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=LM$。

(5) 若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$。

利用這些性質，可以求多項式函數的極限。舉例而言，利用性質 (4)，得

$$\lim_{x\to 2} x^2=\lim_{x\to 2}(xx)=\lim_{x\to 2} x\cdot\lim_{x\to 2} x=2\times 2=2^2，$$

且

$$\lim_{x\to 2} x^3=\lim_{x\to 2}\left(x^2x\right)=\lim_{x\to 2} x^2\cdot\lim_{x\to 2} x=2^2\times 2=2^3。$$

再由性質 (1), (2) 及 (3)，得

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-3x^2+8\right)=\lim_{x\to 2} x^3-3\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} 8=2^3-3\times 2^2+8=4。$$

仿照上述的方法，可以推得多項式函數與有理函數（形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $f(x), g(x)$ 是多項式且 $g(x)\neq 0$）的極限，敘述如下。

50

多項式函數與有理函數的極限

設 a 為實數，且 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 與 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 為兩實係數多項式函數。

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。　(2) 若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$。

結論 (1) 告訴我們：

多項式函數在 $x=a$ 的極限就是它在 $x=a$ 的函數值。

例題 8

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^{100}-2x+3)$。　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+3}{x+2}$。　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}\right)$。

解

由多項式函數與有理函數的極限，得下列極限。

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^{100}-2x+3)=(-1)^{100}-2\times(-1)+3=6$。

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+3}{x+2}=\dfrac{1^2+1+3}{1+2}=\dfrac{5}{3}$。

(3) 因為

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{2+2}{2-1}=4 \text{ 且 } \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-3}=\frac{2+1}{2-3}=-3，$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{x+1}{x-3}\right)=4+(-3)=1$。

隨堂練習

1

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+2)^8$。　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x+1}$。　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x-3}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)$。

(1) 1　(2) 3　(3) $-\dfrac{3}{2}$

隨堂練習解答

1 (1) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+2)^8=(3(-1)+2)^8=(-1)^8=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{3^2+3}{3+1}=3$。

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x-3}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\dfrac{2+1}{1-3}+\dfrac{1-1}{1+1}=-\dfrac{3}{2}+0=-\dfrac{3}{2}$。

51

極限的問題並非都像例題 8 那樣直接代入就可求得極限，有時直接代入會出現分母為 0 的情形，此時的極限有可能存在也有可能不存在。若存在，又該如何求得此極限呢？進行例題之前，因為函數在 $x=a$ 的極限與其在 $x=a$ 的函數值無關，所以我們有以下的性質：

「若函數 f 與 g 對所有 $x\neq a$ 都滿足 $f(x)=g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$。」

再看底下兩個實例。

1

例題 9

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$。 (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$。

解

(1) 因為分子與分母在 $x=3$ 的函數值均為 0，所以分子與分母都有 $x-3$ 的因式。於是，當 $x\neq 3$ 時，將原分式化簡如下：

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=x-2。$$

故由上述性質，得 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$。

(2) 分母在 $x=2$ 的函數值為 0，但分子在 $x=2$ 的函數值為 $3\neq 0$，

極限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$ 不存在。理由如下：

假設 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}=L$。因為 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，所以

$$\lim_{x\to 2}(x+1)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{x-2}\cdot(x-2)\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}(x-2)=L\cdot 0=0，$$

這與 $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$ 矛盾。故 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$ 不存在。

1

隨堂練習

2

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$。 (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9}{x^2-x-2}$。

(1) 4
(2) 不存在

52

補充例題

1 求極限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$。

2 求極限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^{100}-1}{x-2}$。

解：利用二項式定理，得

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^{100}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left((x-2)+1\right)^{100}-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{C_0^{100}(x-2)^{100}+C_1^{100}(x-2)^{99}+\cdots+C_{99}^{100}(x-2)+C_{100}^{100}-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(C_0^{100}(x-2)^{99}+C_1^{100}(x-2)^{98}+\cdots+C_{99}^{100}\right)$$

$$=C_{99}^{100}=100\text{。}$$

隨堂練習解答

1 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$。

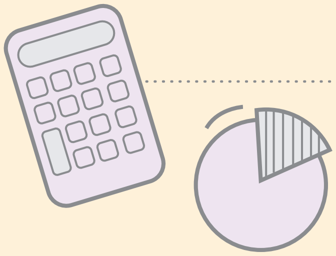
(2) 分母在 $x=2$ 的函數值為 0，但分子在 $x=2$ 的函數值為 $9\neq 0$，

極限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9}{x^2-x-2}$ 不存在。理由如下：

假設 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9}{x^2-x-2}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9}{x^2-x-2}=L$。因為 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x-2\right)=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 2}9=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{9}{x^2-x-2}\cdot\left(x^2-x-2\right)\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9}{x^2-x-2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x-2\right)=L\cdot 0=0$，

這與 $\lim\limits_{x\to 2}9=9$ 矛盾。故 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9}{x^2-x-2}$ 不存在。



一般而言，當 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為多項式函數時，函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 的極限之求法可分成以下三種情況。

(1) 若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$。

(2) 若 $g(a)=0$ 且 $f(a)\neq 0$，則此極限不存在。理由如下：

假設 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$。因為 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)=0$，所以

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)=L\cdot 0=0，$$

這與 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)\neq 0$ 矛盾。故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

(3) 若 $g(a)=0$ 且 $f(a)=0$，則將分子與分母的共同因式 $x-a$ 約去後，再依照以上的原則繼續處理。

當兩個函數的極限不存在時，它們的和之極限是可能存在的，舉例如下。

例題 10

求 $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{3x-1}{x^2+4x+3}\right)$。

解

這兩個分式在 $x=-3$ 的極限都不存在，將兩個分式合併成一個分式再考慮看看。當 $x\neq -3$ 時，得

$$\frac{x-2}{x+3}+\frac{3x-1}{x^2+4x+3}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}。$$

故 $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x-2}{x+3}+\dfrac{3x-1}{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-4}{-2}=2$。

隨堂練習

求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{9}{x^2-x-2}\right)$。 1

2

隨堂練習解答

1 這兩個分式在 $x=2$ 的極限都不存在，將兩個分式合併成一個分式再考慮看看。當 $x\neq 2$ 時，得

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{9}{x^2-x-2}=\frac{x+1}{x-2}-\frac{9}{(x-2)(x+1)}=\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x+4}{x+1}。$$

故 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{9}{x^2-x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x+1}=2$。

由上述函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 極限求法三種情況中的 (2) ，可以得知：

$$\text{若極限}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\text{存在，且 } g(a)=0\text{，則 } f(a) \text{ 就必須為 } 0\text{。}$$

例題 11

設 a 為實數，且極限 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+a}{x-2}$ 存在。

(1) 求 a 的值。　　(2) 求此極限。

解

(1) 因為此分式在 $x=2$ 的極限存在，且其分母在 $x=2$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=2$ 的函數值必須為 0，即

$$2^2-2+a=0\text{。}$$

解得 $a=-2$。

(2) 當 $x\neq 2$ 時，將原分式化簡如下：

$$\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1\text{。}$$

故 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$。

1 **隨堂練習**

設 a 為實數，且極限 $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+ax+3}{x^2-x-2}$ 存在。

(1) 求 a 的值。　　(2) 求此極限。

(1) 4
(2) $-\dfrac{2}{3}$

隨堂練習解答

1 (1) 因為此分式在 $x=-1$ 的極限存在，且其分母在 $x=-1$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=-1$ 的函數值必須為 0，即

$$1-a+3=0\text{。}$$

解得 $a=4$。

(2) 當 $x\neq -1$ 時，將原分式化簡如下：

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x+3}{x-2}\text{。}$$

故 $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{x+3}{x-2}=\frac{-1+3}{-1-2}=-\frac{2}{3}$。

再做一道含有兩個未知係數的例題。

例題 12

已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=7$，求實數 a, b 的值。

解

因為此分式在 $x=1$ 的極限存在，且其分母在 $x=1$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=1$ 的函數值必須為 0，由因式定理得知，分子有 $x-1$ 的因式。令分子

$$x^2+ax+b=(x-1)(x-k)，$$

則

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-k)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-k)=1-k。$$

因此，

$$1-k=7，$$

解得 $k=-6$。

再由 $(x-1)(x+6)=x^2+5x-6$，得 $a=5, b=-6$。

隨堂練習

已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+bx-2}{(x-2)(x-a)}=-3$，求實數 a, b 的值。

$a=3, b=-1$

隨堂練習解答

1 因為此分式在 $x=2$ 的極限存在，且其分母在 $x=2$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=2$ 的函數值必須為 0，即 $4+2b-2=0$。解得 $b=-1$。又

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x-a)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-a)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-a}=\frac{3}{2-a}。$$

因此，$\dfrac{3}{2-a}=-3$。

解得 $a=3$。

補充例題

1

1 已知

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2}=c，$$

求實數 a, b, c 的值。

解：因為此分式在 $x=2$ 的極限存在，且其分母在 $x=2$ 的函數值為 0，所以其分子在 $x=2$ 的函數值為 0。因此，x^3+ax+b 可被 $(x-2)^2=x^2-4x+4$ 整除。利用長除法計算如左。

得 $a+12=0$

且 $b-16=0$，解得

$a=-12$，$b=16$。

而且

$$c=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-12x+16}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+4)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}(x+4)=6。$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & & & x & + & 4 & & \\
\hline
x^2-4x+4 & x^3 & + & 0x^2 & + & ax & + & b \\
 & x^3 & - & 4x^2 & + & 4x & & \\
\hline
 & & & 4x^2 & + & (a-4)x & + & b \\
 & & & 4x^2 & - & 16x & + & 16 \\
\hline
 & & & & & (a+12)x & + & (b-16)
\end{array}$$

55

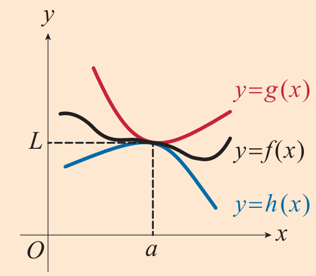
有些函數極限無法以直接計算方式求得，我們可以藉由兩個函數來限制原函數的範圍，並以雙邊逼近的方式求得極限。這需要借助函數的夾擠定理，將定理敘述如下。

函數的夾擠定理

設函數 $h(x), f(x), g(x)$ 在某個包含 a 的開區間中除了 a 以外之任意實數 x 都有定義，且滿足 $h(x) \le f(x) \le g(x)$。若

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L,$$

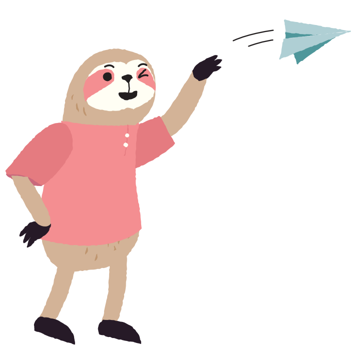
則 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$。



接下來的例題，我們要借助函數的夾擠定理求極限 $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$。進行例題之前，先利用計算機，將 x 取 0 左、右兩邊附近的值，並實際計算出 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 的近似值來觀察，列表如下：

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$x\sin\dfrac{1}{x}$	-0.00506	0.00083	-0.00003		-0.00003	0.00083	-0.00506

觀察以上的數據，當 x 的值從左、右兩邊靠近 0 時，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 的值似乎會逐漸趨近定值 0。那麼，要如何求 $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ 呢？說明如下。



例題 13

已知 $x \neq 0$，不等式 $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ 恆成立，求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$。

解

將不等式 $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ 乘以 x，討論如下。

① 當 $x>0$ 時，得

$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x。$$

② 當 $x<0$ 時，得

$$x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq -x。$$

綜合 ① 與 ②，得

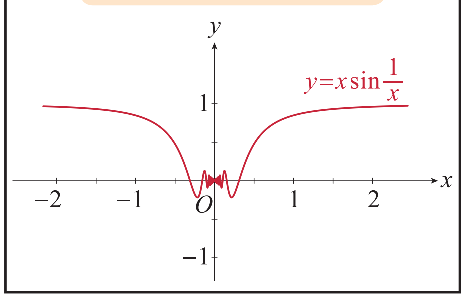
$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|。$$

因為

$\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，

所以由函數的夾擠定理，得 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$。

電腦繪製的函數圖形



隨堂練習

已知 $x \neq 0$，不等式 $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ 恆成立，求 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$。

0

隨堂練習解答

1 將不等式 $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ 乘以 x^2，得

$$-x^2 \leq x^2\sin\frac{1}{x} \leq x^2。$$

因為

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0$

1 且 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，

1 所以由函數的夾擠定理，

得 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$。

補充例題

1 求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)$。

解：

當 $x \neq 0$ 時，恆有

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow -x^2 \leq x^2\cos\frac{1}{x} \leq x^2。$$

因為 $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$，

且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0$，

所以根據函數的夾擠定理，得

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right)=0。$$

教學要點

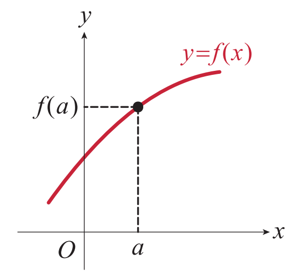
1 介紹連續函數，再得出介值定理（中間值定理）。

1

戊 連續函數

棒球選手打出全壘打時，球在空中飛行的路線是一條「連續」的弧線。這「連續」與數學上的「連續」有相同的含義。

直觀來看，若函數 $f(x)$ 的圖形在定義域內的一點 a 接連不斷，則當 x 趨近 a 時，$f(x)$ 就必須趨近於其函數值 $f(a)$，如圖 8 所示。這個直觀的看法提供我們使用極限的概念對連續函數定義如下。



▲圖 8

連續函數

設 a 為函數 $f(x)$ 定義域內的一點，當滿足下列兩個條件時，稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。　　(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

又當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續時，稱 $f(x)$ 為**連續函數**。

另外，當我們稱函數 $f(x)$ 在區間 I 連續時，指的是：$f(x)$ 對 I 的所有非端點都連續；若 I 有左端點 a，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$；若 I 有右端點 b，則 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$。

直觀來說，函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續的含義就是函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 處沒有斷裂。例如，因為多項式函數 $f(x)$ 對於任意實數 a 均滿足

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

所以 $f(x)$ 為連續函數。因此，

任一多項式函數都是連續函數，而且其圖形都是連續不斷的。

此外，我們學過的函數中，很多也是連續函數，例如指數函數 $y=a^x$、對數函數 $y=\log_a x$、正弦函數 $y=\sin x$、餘弦函數 $y=\cos x$、絕對值函數 $y=|x|$ 等。

58

進行例題之前，因為函數在 $x=a$ 的右極限是觀察 x 從右邊趨近 a 時函數值的變化，所以我們有以下的性質：

「若函數 f 與 g 對所有 $x>a$ 都滿足 $f(x)=g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$。」

（此性質對左極限亦同），現在利用這個性質處理分段定義函數的連續性。

例題 14

已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6，當\ x\geq 1 \\ x+a，當\ x<1 \end{cases}$ 為連續函數，求實數 a 的值。

解

因為當 $x>1$ 或 $x<1$ 時，$f(x)$ 是多項式（連續）函數，所以關鍵在 $x=1$ 處 $f(x)$ 也要連續。根據連續的定義，必須滿足 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$。因為

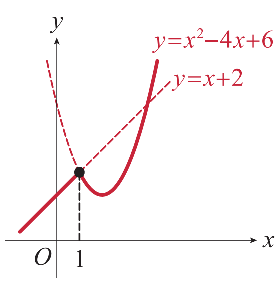
右極限 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-4x+6\right)=3$，

左極限 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a$，

函數值 $f(1)=1^2-4\times 1+6=3$，

所以 $1+a=3$，解得 $a=2$。

上例中，當 $a=2$ 時，在 $x=1$ 處左右兩段的函數圖形才能銜接起來（不斷裂），如圖 9 所示。



▲圖 9

59

隨堂練習

1 已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3\text{，當 } x\ge 0 \\ -2x+a\text{，當 } x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 處連續，求實數 a 的值。

3

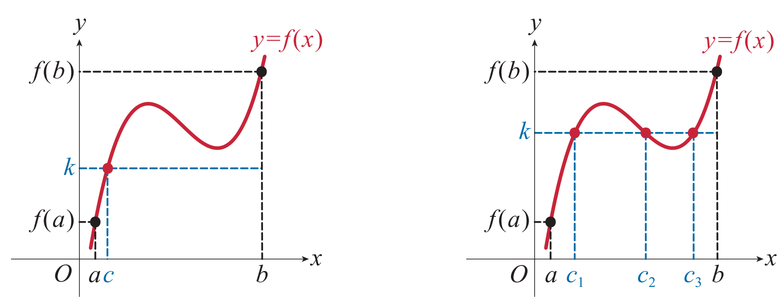
某日上午 8 時的氣溫為 15°C，到下午 14 時氣溫升高到 21°C。由於氣溫的高低變化是連續的，於是在 8 時到 14 時這段期間內，至少會有一時刻的氣溫恰好是 18°C。這個生活經驗有助於我們對**介值定理**（或稱**中間值定理**）的理解。

介值定理

設 $f(x)$ 是區間 $[a,b]$ 上的連續函數，且 $f(a)\neq f(b)$。若實數 k 滿足 $f(a)<k<f(b)$ 或 $f(b)<k<f(a)$，則至少有一實數 c 滿足 $a<c<b$ 且 $f(c)=k$。

介值定理的意思是說：如果 $f(x)$ 是區間 $[a,b]$ 上的連續函數，k 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的一個實數，那麼至少會有一個介於 a 與 b 之間的實數 c，使得它的函數值 $f(c)$ 等於 k。

這定理我們透過圖 10 直觀上來理解即可（證明省略）。



▲圖 10

隨堂練習解答

1 因為 $f(x)$ 在 $x=0$ 處連續，

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$。

又由於

$f(0)=0^2+0+3=3$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2x+3)$

$=3$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x+a)$

$=a$，

於是可得 $a=3$。

補充例題

1 已知函數

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}\text{，當 } x\neq 2 \\ a\text{，當 } x=2 \end{cases}$

在 $x=2$ 處連續，

求實數 a 的值。

解：根據連續的定義，必須滿足

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$。因為

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$，

$f(2)=a$，

所以 $a=4$。

練習使用介值定理。

例題 15

已知 $f(x)=(x-49)^2(x-51)^2+2x$，求證：至少有一實數 c，使得 $f(c)=100$。

解

因為 $f(x)$ 為多項式函數，所以 $f(x)$ 是連續函數。又因為

$$f(49)=98, f(51)=102，$$

所以 100 介於 $f(49)$ 與 $f(51)$ 之間。由介值定理得知：在 49 與 51 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=100$。

隨堂練習

已知 $f(x)=x^3-x^2+x$，求證：在 2 與 3 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=10$。

見解析

隨堂練習解答

1 因為 $f(x)$ 為多項式函數，所以 $f(x)$ 是連續函數。又因為

$$f(2)=6, f(3)=21，$$

所以 10 介於 $f(2)$ 與 $f(3)$ 之間。由介值定理得知：在 2 與 3 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=10$。

補充例題

1 在區間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 內是否存在一個實數 c 滿足 $\sin c=\frac{4}{7}$。

解：正弦函數 $f(x)=\sin x$ 是連續函數。因為

$$f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1，$$

所以 $\frac{4}{7}$ 介於 $f(0)$ 與 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 之間。由介值定理得知：在區間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 內至少有一個實數 c 滿足

$$f(c)=\sin c=\frac{4}{7}。$$

2 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

□ (1) 若 $f(x)=x^2+3x+4$，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=8$。

□ (2) 極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 不存在。

□ (3) 若多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=3$，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$。

(1) ○　(2) ×　(3) ○

一、基礎題

1 求下列各函數的定義域與值域。

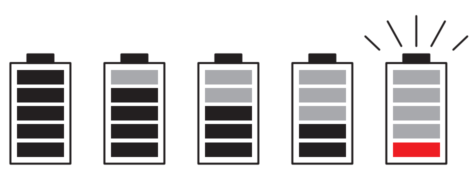
(1) $f(x)=\sin x$。

(2) $f(x)=x^2+2x+4$。

(3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$。

(1) 定義域為 $\mathbb{R}$，值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 1\}$
(2) 定義域為 $\mathbb{R}$，值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid y\ge 3\}$
(3) 定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 3\}$，值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid 0\le y\le 3\}$

2 在某格鬥遊戲的電玩中，用格子數顯示大魔王的能量。已知當大魔王充滿能量時，螢幕的能量顯示為 5 格，且大魔王挨了 x 拳後，能量顯示格數為



$$f(x)=\left[\frac{60}{x+11}\right]$$

格，其中符號 [ ] 為高斯符號，回答下列問題。

(1) 大魔王挨了 13 拳後，能量顯示格數為幾格？

(2) 已知能量顯示格數為 3 格，求大魔王最多挨了幾拳？

(1) 2 格
(2) 9 拳

習題解答

觀念澄清

(1) ○：$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1^2+3\times 1+4=8$。

(2) ×：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$。

(3) ○：因為多項式函數 $f(x)$ 為連續函數，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$。

一、基礎題

1. (1) 因為對所有實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以定義域為所有實數 $\mathbb{R}$。

   又因為 $-1\le \sin x\le 1$，所以值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 1\}$。

   (2) 因為對所有實數 x，x^2+2x+4 都有意義，所以定義域為所有實數 $\mathbb{R}$。

   又因為 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\ge 3$，所以值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid y\ge 3\}$。

   (3) 不等式 $9-x^2\ge 0$ 可化為 $(x+3)(x-3)\le 0$，解得 $-3\le x\le 3$。

   因此，定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 3\}$。

   又因為當 $-3\le x\le 3$ 時，$0\le 9-x^2\le 9$，所以 $0\le\sqrt{9-x^2}\le 3$，即值域為 $\{y\in\mathbb{R}\mid 0\le y\le 3\}$。

2. (1) 因為

$$f(13)=\left[\frac{60}{13+11}\right]=\left[\frac{5}{2}\right]=2，$$

   所以大魔王挨了 13 拳後，能量顯示為 2 格。

   (2) 因為能量顯示格數為 3 格，所以

$$3\le\frac{60}{x+11}<4。$$

   又因為 $x+11$ 是正數，所以 $3(x+11)\le 60<4(x+11)$，即

$$\begin{cases}3x+33\le 60\\ 60<4x+44\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 9\\ 4<x\end{cases}。$$

   因此 $4<x\le 9$。故大魔王最多挨了 9 拳。

3. 函數 $f(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R}$，$g(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}|x\le 3\}$，它們的交集為 $\{x\in\mathbb{R}|x\le 3\}$。根據函數四則運算的定義，得

⑴ $(f-g)(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}|x\le 3\}$，且

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+2-\sqrt{3-x}\text{。}$$

⑵ 因為 $x=3$ 使 $g(x)=0$，所以 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ 的定義域為 $\{x\in\mathbb{R}|x<3\}$，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+2}{\sqrt{3-x}}\text{。}$$

4. ⑴ $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(2x+3)=(2x+3)^2+1=4x^2+12x+10$。

⑵ $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(x^2+1\right)=2\left(x^2+1\right)+3=2x^2+5$。

5. ⑴ 當 x 趨近 1 時，$f(x)$ 會趨近 1，因此 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$。

⑵ 當 x 從左邊趨近 2 時，$f(x)$ 會趨近 ∞，即 $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ 不存在。

因此 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在。

⑶ 因為 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=1$。

因此 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=1$。

⑷ 因為 $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)$。

因此 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ 不存在。

故選 ⑴。

3 已知函數 $f(x)=x+2$ 與 $g(x)=\sqrt{3-x}$，求下列各函數及其定義域。

(1) $(f-g)(x)$。

(2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$。

(1) $(f-g)(x)=x+2-\sqrt{3-x}$，
定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 3\}$

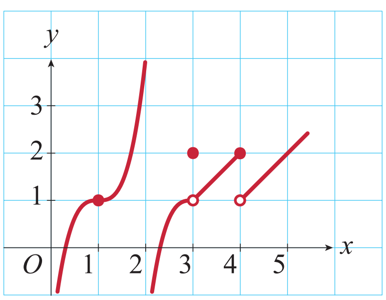
(2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{3-x}}$，
定義域為 $\{x\in\mathbb{R}\mid x<3\}$

4 已知函數 $f(x)=2x+3$ 與 $g(x)=x^2+1$，求下列各合成函數。

(1) $(g\circ f)(x)$。　　(2) $(f\circ g)(x)$。

(1) $4x^2+12x+10$
(2) $2x^2+5$

5 已知函數 $y=f(x)$ 的圖形如下：



選出所有正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=2$

(4) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=2$。

(1)

6 求下列各極限。

(1) $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x-3\right)$。

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}$。

(3) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x+1}{x^2-1}\right)$。

(1) -1
(2) -1
(3) 0

7 求下列各極限。

(1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$。

(2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$。

(3) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)$。

(4) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5x-2}{x^3-1}\right)$。

(1) $-\dfrac{1}{2}$
(2) 不存在
(3) $\dfrac{1}{2}$
(4) $-\dfrac{2}{3}$

6. (1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-3)=1^2+1-3=-1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+4}=\dfrac{0^2-4}{0^2+2\times 0+4}=-1$。

(3) 因為 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{5}{4}$ 且 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x+1}{x^2-1}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$，所以

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x-1}{x+1}-\frac{3x+1}{x^2-1}\right)=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0。$$

7. (1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x-5}=-\dfrac{1}{2}$。

(2) 因為分母在 $x=2$ 的函數值為 0，而分子在 $x=2$ 的函數值不為 0，

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ 不存在。

(3) 當 $x\neq 3$ 時，因為 $\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-1}$，

所以

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-4}{x-3}+\frac{2}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-1}=\frac{1}{2}。$$

(4) 當 $x\neq 1$ 時，因為

$$\frac{1}{x-1}-\frac{5x-2}{x^3-1}=\frac{x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x-3}{x^2+x+1}，$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5x-2}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+x+1}=-\frac{2}{3}。$$

8. (1) 因為極限存在，且分母在 $x=-2$ 的函數值為 0，所以分子在 $x=-2$ 的函數值必須為 0。因此

$$(-2)^2+(-2)+a=0，$$

解得 $a=-2$。

(2) 極限 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-1)=-3$。

9. 因為 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$。又由於

$f(1)=1^2+5=6$，

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+5\right)=6$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax-2)=a-2$，

於是可得 $a-2=6$，解得 $a=8$。

10. 因為 $f(x)$ 為多項式函數，所以 $f(x)$ 是連續函數。又因為

$$f(3)=30, f(4)=68，$$

所以 64 介於 $f(3)$ 與 $f(4)$ 之間。由介值定理得知：在 3 與 4 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=64$。

8 設 a 為實數，且極限 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x+a}{x+2}$ 存在。

(1) 求 a 的值。 (1) -2

(2) 求此極限。 (2) -3

9 已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+5 & \text{，當 } x\ge 1 \\ ax-2 & \text{，當 } x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 處連續，求實數 a 的值。 8

10 已知 $f(x)=x^3+x$，求證：在 3 與 4 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=64$。 見解析

二、進階題

11 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$，選出所有正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+\dfrac{x-1}{x}\right)=5$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2}=5$

(3) $f(1)=5$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}(xf(x))=5$。

(1)(3)(5)

12 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+ax+b}=4$，求實數 a, b 的值。

$a=-3$, $b=2$

二、進階題

11. (1) 因為 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{0}{1}=0$，所以

$$\lim_{x\to 1}\left(f(x)+\frac{x-1}{x}\right)=5+0=5。$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}\times 5=\dfrac{5}{2}$。

(3) 因為多項式函數 $f(x)$ 為連續函數，所以 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$。

(4) 因為分子在 $x=1$ 的函數值 $f(1)=5\neq 0$，而分母在 $x=1$ 的函數值為 0，所以極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 不存在。

(5) 因為 $\lim\limits_{x\to 1} x=1$，且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\left(x\cdot f(x)\right)=1\times 5=5$。

故選 (1)(3)(5)。

12. 因為極限存在，且分子在 $x=2$ 的函數值為 0，所以分母在 $x=2$ 的函數值必須為 0，由因式定理得知，分母有 $x-2$ 的因式。令分母

$$x^2+ax+b=(x-2)(x-k)，$$

則

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-k)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-k}=\frac{4}{2-k}。$$

因此，

$$\frac{4}{2-k}=4，$$

解得 $k=1$。

再由 $(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$，得 $a=-3, b=2$。

13. 因為 $\dfrac{f(x)}{x-1}$ 在 $x=1$ 的極限存在，且分母在 $x=1$ 的函數值為 0，

所以其分子在 $x=1$ 的函數值必須為 0，即 $f(1)=0$。

同理，得 $f(2)=0$。

由因式定理得知，三次多項式 $f(x)$ 有 $x-1$ 與 $x-2$ 的因式。因此，可設

$$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)。$$

因為 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，所以

$$\begin{cases}(1-2)(a+b)=1\\(2-1)(2a+b)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-1\\2a+b=2\end{cases}。$$

解得 $a=3, b=-4$，故 $f(x)=(x-1)(x-2)(3x-4)$。

14. (1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x|-x}{|x|-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-x}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{0}{x-2}=0$。

(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{-x-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\left(-(x-2)\right)=3$。

13 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，求 $f(x)$。

$(x-1)(x-2)(3x-4)$

14 求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|-x}{|x|-2}$。

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{|x|-1}$。

(1) 0
(2) 3

補充教材

● 函數極限的運算性質（補充函數的極限）

函數極限的運算性質對於求函數的極限有很大的幫助，教學時可視需要作以下的補充說明：

函數極限的運算性質

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 L 與 M，即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$，$c$ 為一常數。我們有以下的性質：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=L+M$。

(2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=L-M$。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\big(cf(x)\big)=cL$。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=LM$。

(5) 若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$。

極限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ 的意義也可說是：

當 x 趨近 a 時，$f(x)-L$ 會趨近 0。

同理，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$ 表示：當 x 趨近 a 時，$g(x)-M$ 會趨近 0。

我們利用函數極限的這個意義，對這些運算性質說明如下：

(1) 將 $\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)$ 化成

$$\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)=\big(f(x)-L\big)+\big(g(x)-M\big)。$$

因為當 x 趨近 a 時，$f(x)-L$ 與 $g(x)-M$ 都趨近 0，所以其和 $\big(f(x)-L\big)+\big(g(x)-M\big)$ 也會趨近 0，即 $\big(f(x)+g(x)\big)-(L+M)$ 趨近 0。故

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=L+M。$$

(2) 由

$$\big(f(x)-g(x)\big)-(L-M)=\big(f(x)-L\big)-\big(g(x)-M\big)$$

知，當 x 趨近 a 時，$f(x)-L$ 與 $g(x)-M$ 都趨近 0，所以 $\big(f(x)-g(x)\big)-(L-M)$ 也會趨近 0。故

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=L-M。$$

(3) 將 $cf(x)-cL$ 的常數 c 提出，得

$$cf(x)-cL=c\big(f(x)-L\big)。$$

因為當 x 趨近 a 時，$f(x)-L$ 趨近 0，所以 $c\big(f(x)-L\big)$ 也會趨近 0。故

$$\lim_{x\to a}\big(cf(x)\big)=cL。$$

(4) 將 $f(x)g(x)-LM$ 化成

$$f(x)g(x)-LM=f(x)\big(g(x)-M\big)+M\big(f(x)-L\big)。$$

因為當 x 趨近 a 時，$f(x)$ 會趨近 L，$f(x)-L$ 與 $g(x)-M$ 會趨近 0，所以 $f(x)\big(g(x)-M\big)$ 與 $M\big(f(x)-L\big)$ 都會趨近 0，其和也會趨近 0。故

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=LM。$$

(5) 將 $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{L}{M}$ 化成

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{L}{M}=\frac{\big(f(x)-L\big)M-\big(g(x)-M\big)L}{g(x)M}。$$

因為當 x 趨近 a 時，$f(x)-L$ 與 $g(x)-M$ 趨近 0，$g(x)$ 會趨近 M，
所以 $g(x)M$ 趨近 M^2, $\big(f(x)-L\big)M-\big(g(x)-M\big)L$ 趨近 0。故

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}。$$

● 函數的極限有唯一性（補充函數的極限）

證明：設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的極限為 L 與 L'，即

$$\lim_{x\to a}f(x)=L,\ \lim_{x\to a}f(x)=L'。$$

假設 $L\neq L'$，則 $|L-L'|>0$。令 $\varepsilon=\frac{1}{2}|L-L'|$，則由極限的定義知，

必存在 $\delta_1>0,\ \delta_2>0$ 使得

$$0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}，$$

$$0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-L'|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，則
$0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|+|f(x)-L'|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，
但若定義域中的 x 滿足 $0<|x-a|<\delta$，則
$|L-L'|=\big|\big(f(x)-L\big)-\big(f(x)-L'\big)\big|\leq|f(x)-L|+|f(x)-L'|<\varepsilon=\frac{1}{2}|L-L'|$。
矛盾！因此，原假設錯誤，故 $L=L'$，即函數的極限有唯一性。