1 離散型隨機變數

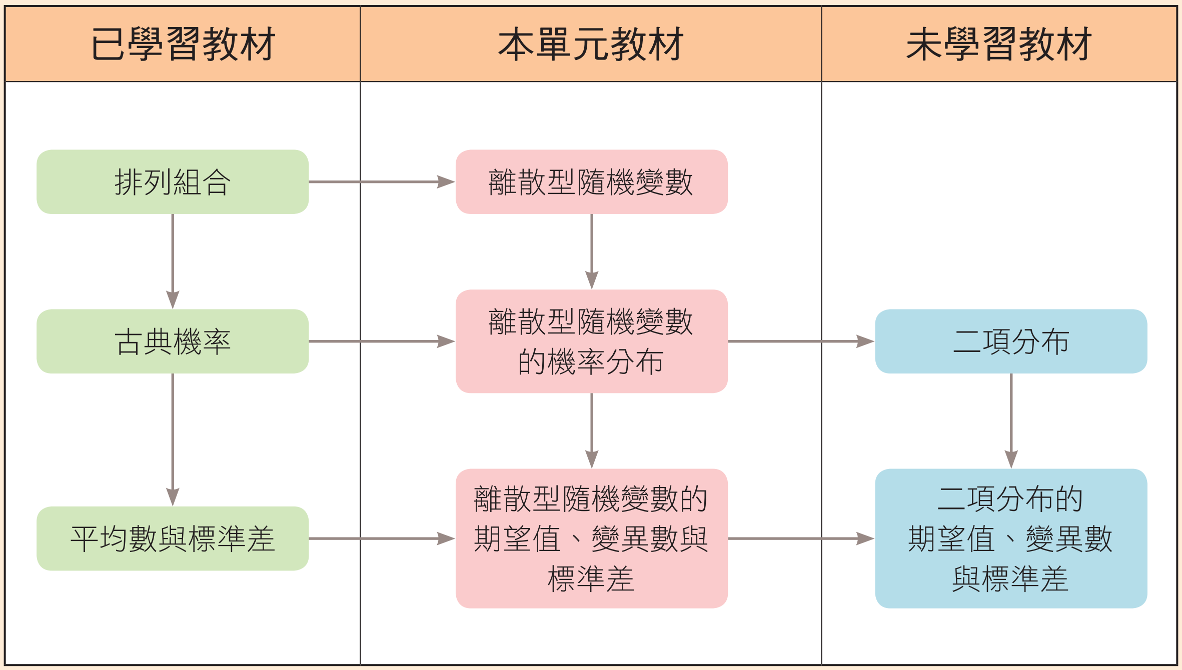
一 教材摘要

面對生活中不可預知結果的隨機現象，人們常想粗略知道其數量表現，如降雨的機率、股市的漲跌、樂透中獎的機率、疾病的傳染力等。本單元在機率的基礎上，先介紹與隨機現象有關的隨機變數，再延伸至隨機變數的期望值、變異數與標準差。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 了解隨機的意義，進而學習離散型隨機變數的意義。 2. 能舉出生活中隨機變數的例子。 3. 學習隨機變數的取值與機率分布。 4. 了解隨機變數的期望值，並知道 10 年級所提的期望值與這裡透過隨機變數的定義一致。 5. 了解隨機變數的變異數及標準差。	12

三 教材地位分析


已學習教材
本單元教材
未學習教材
排列組合
古典機率
平均數與標準差
離散型隨機變數
離散型隨機變數的機率分布
離散型隨機變數的期望值、變異數與標準差
二項分布
二項分布的期望值、變異數與標準差

1 離散型隨機變數

過年期間，許多店家都會有各種發紅包的活動。某年貨大街的一間商店辦理丟硬幣送紅包的活動，雖然我們無法預知丟硬幣會出現哪一面，但是透過機率的計算，我們心中可以期待參加活動能得到多少錢。

像丟硬幣這種無法預知明確結果的現象，我們稱為**隨機現象**。本單元我們將在機率的基礎上，學習與隨機現象有關的隨機變數、期望值、變異數與標準差。

▲圖 1

甲 離散型隨機變數

當一項試驗可在相同的條件下重複進行，每次試驗的可能結果不只一種，且試驗前無法確定哪一種結果會出現時，稱此試驗為**隨機試驗**。例如下列三項試驗都是不只一種結果的隨機試驗。

(1) 擲一粒骰子，可能出現 1, 2, 3, 4, 5 或 6 點，共有 6 種結果。

(2) 丟一枚硬幣兩次，可能是 (正，正)、(正，反)、(反，正) 或 (反，反)，共有 4 種結果。

(3) 從只裝有紅球與白球的袋中取一球，可能是紅球或白球，共有 2 種結果。

隨機試驗的結果有很多樣式，有些是數值，有些是文字或符號等。為了方便研究，通常會依感興趣的內容，將試驗的結果對應到一些特定的實數值。例如丟一枚硬幣兩次，若感興趣的是正面出現的次數，則會將試驗結果與正面出現的次數對應如下。

教學要點

1 了解隨機的意義，學習離散型隨機變數的意義，進而理解隨機變數的取值與機率分布。

教學小提醒

1 108 課綱刪除連續型隨機變數（例如常態分布）的內容，僅聚焦在離散型隨機變數。

2 日常生活中還有許多隨機試驗的例子，例如猜拳、民調、⋯⋯。此處可讓學生分組討論並發表答案。

試驗結果	對應	正面次數
(反,反)	→	0
(反,正)	→	1
(正,反)	→	1
(正,正)	→	2

像這樣將隨機試驗所有可能發生的結果（即樣本空間）對應到實數值的函數關係稱為**隨機變數**，通常以 X 表示。令 X 表示丟一枚硬幣兩次正面出現的次數，那麼 X 的值可為 $0,1,2$，此時

「$X=0$」表示「正面出現 0 次的事件」；

「$X=1$」表示「正面出現 1 次的事件」；

「$X=2$」表示「正面出現 2 次的事件」。

即符號「$X=x$」表示「隨機變數 X 取值為 x 的所有樣本點所成的事件」。

來練習寫出隨機變數 X 所有可能的取值。

例題 1

寫出下列隨機變數 X 所有可能的取值。

(1) 對同一籃框連續投籃 5 次，並令隨機變數 X 表示投進的次數。

(2) 從大小相同、編號 $1,2,3,4$ 各一張的卡片中任取 2 張，並令隨機變數 X 表示被取出的卡片編號之和。

解

(1) 用「○」表示進球，「×」表示沒進球，則樣本空間為

$S=\{5×,4×1○,3×2○,2×3○,1×4○,5○\}$。

由樣本空間可知：投進的次數 X 所有可能的取值為 $0,1,2,3,4,5$。

教學小提醒

1 此處可多舉一些例子讓學生體會 X 的取值。

補充例題

1 從 1 到 10 的十個正整數中任取一數，令隨機變數 X 表示所取之數的正因數個數，寫出 X 所有可能的取值。

解：X 為所取之數的正因數個數，X 所有可能的取值為 $1,2,3,4$，共 4 種。

(2) X 表示被取出的卡片編號之和，X 所有可能的取值情形如下表。

所取卡片的編號	X 的取值
1 號和 2 號	$X=3$
1 號和 3 號	$X=4$
1 號和 4 號	$X=5$
2 號和 3 號	$X=5$
2 號和 4 號	$X=6$
3 號和 4 號	$X=7$

故 X 所有可能的取值為 $3,4,5,6,7$。

1 **隨堂練習**

寫出下列隨機變數 X 所有可能的取值。

(1) 對同一個靶面連續射擊 4 發，隨機變數 X 表示命中靶面的次數。

(2) 從裝有 5 顆白球及 3 顆紅球的袋中任取出 4 顆球，隨機變數 X 表示被取出的紅球數。

(1) $0,1,2,3,4$
(2) $0,1,2,3$

隨堂練習解答

1 (1) X 表示命中靶面的次數，X 所有可能的取值為 $0,1,2,3,4$（次）。
(2) X 表示被取出的紅球數，X 所有可能的取值為 $0,1,2,3$（顆）。

練習寫出隨機變數 X 的取值並描述 $X=x$ 所表示的事件。

例題 2

袋中裝有大小相同的紅球 2 顆、白球 4 顆。從袋中任取 2 顆球，並令隨機變數 X 表示取得紅球的顆數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 描述 $X=0$ 所表示的事件。

解

樣本空間為

$$S=\{\text{兩顆白球，一紅一白，兩顆紅球}\}。$$

(1) 由樣本空間可知：取得紅球的顆數 X 所有可能的取值為 $0,1,2$。

(2) $X=0$ 所表示的事件為取到 0 顆紅球的事件，即｛兩顆白球｝。

隨堂練習

從 52 張撲克牌中隨機抽出 5 張牌。令隨機變數 X 表示抽到點數「K」的張數。 1

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 描述 $X=1$ 所表示的事件。

(1) $0,1,2,3,4$

(2) {1 張 K 及 4 張非 K 的牌}

隨堂練習解答

1 設 K 表示抽到點數「K」，而 $\times$ 表示抽到其他點數，則樣本空間為

$S=\{0K5\times,1K4\times,2K3\times,3K2\times,4K1\times\}$。

(1) 由樣本空間可知：抽到點數「K」的張數 X 所有可能的取值為 $0,1,2,3,4$。

(2) $X=1$ 所表示的事件為取到 1 張點數「K」的事件，即 {1 張 K 及 4 張非 K 的牌}。

5

教學小提醒

1 此處可多舉一些例子讓學生體會 X 之取值所對應的機率。

對於隨機變數 X，我們可以計算事件 $X=x$ 發生的機率，並以符號 $P(X=x)$ 表示此機率。以下面的例子來說明。

例題 3

丟一枚均勻硬幣 3 次，並令隨機變數 X 表示正面出現的次數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 求機率 $P(X=1)$ 及 $P(X=3)$ 的值。

解

用「＋」表示出現正面，「－」表示出現反面，則樣本空間

$$S=\{(+,+,+),(+,+,-),(+,-,+),(-,+,+),(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+),(-,-,-)\}，$$

其中序對裡面的位置，代表依次出現的結果。

(1) 由樣本空間可知：正面出現的次數 X 所有可能的取值為 $0,1,2,3$。

(2) ① 因為 $X=1$ 表示正面出現 1 次的事件，即

$$\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+)\}，$$

所以其機率 $P(X=1)=\dfrac{3}{8}$。

② 因為 $X=3$ 表示正面出現 3 次的事件，即

$$\{(+,+,+)\}，$$

所以其機率 $P(X=3)=\dfrac{1}{8}$。

隨堂練習

1 丟一枚均勻硬幣 4 次，並令隨機變數 X 表示正面出現的次數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 求機率 $P(X=2)$ 與 $P(X=3)$ 的值。

(1) $0,1,2,3,4$

(2) $P(X=2)=\dfrac{3}{8}$；$P(X=3)=\dfrac{1}{4}$

6

隨堂練習解答

1 用「+」表示出現正面，「−」表示出現反面，則樣本空間為

$$S=\{(+,+,+,+),(+,+,+,-),(+,+,-,+),(+,-,+,+),(-,+,+,+),(+,+,-,-),$$
$$(-,-,+,+),(+,-,+,-),(-,+,-,+),(-,+,+,-),(+,-,-,+),(+,-,-,-),$$
$$(-,+,-,-),(-,-,+,-),(-,-,-,+),(-,-,-,-)\}，$$

其中序對裡面的位置，代表依次出現的結果。

(1) 由樣本空間可知：正面出現的次數 X 所有可能的取值為 $0, 1, 2, 3, 4$。

(2) ① 因為 $X=2$ 表示正面出現 2 次的事件，即

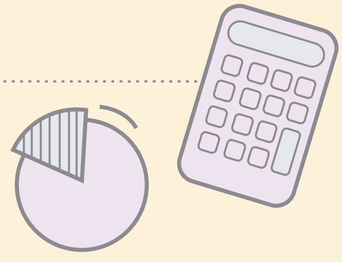
$$\{(+,+,-,-),(-,-,+,+),(+,-,+,-),(-,+,-,+),(-,+,+,-),(+,-,-,+)\}，$$

所以其機率 $P(X=2)=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$。

② 因為 $X=3$ 表示正面出現 3 次的事件，即

$$\{(+,+,+,-),(+,+,-,+),(+,-,+,+),(-,+,+,+)\}，$$

所以其機率 $P(X=3)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$。



在例題 3 中，我們有 $P(X=1)=\dfrac{3}{8}$ 與 $P(X=3)=\dfrac{1}{8}$，表示將 X 的取值 1、3 分別對應到機率 $\dfrac{3}{8}$、$\dfrac{1}{8}$；這種將隨機變數 X 所有可能的取值 x 對應到其機率的函數關係稱為隨機變數 X 的**機率質量函數**，習慣上可以列表如下，並稱此表為**機率分布表**。

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

一般而言，若隨機變數 X 所有可能的取值為 $x_1, x_2, \dots, x_n$，且 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\dots,n$，則可以列出隨機變數 X 的機率分布表如下。

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

由機率的性質知，機率 $p_i=P(X=x_i)$ 具有下面兩個性質。

(1) $0\le p_i\le 1$，$i=1,2,\dots,n$。

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$。

在上述的情況中，隨機變數 X 的取值為有限個，事實上，隨機變數 X 也有無限多個取值的情況，例如連續擲一粒骰子，擲到 6 點才停止，並令隨機變數 X 表示第一次擲到 6 點所需的次數，此時隨機變數 X 所有可能的取值就是 $1,2,3,\dots,n,\dots$，有無限多個。若隨機變數 X 的取值為 $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$，且其對應的機率為 $p_1,p_2,\dots,p_n,\dots$，則這些機率具有下面兩個性質。

(1) $0\le p_i\le 1$，$i=1,2,\dots,n,\dots$。

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n+\cdots=1$。

本書僅探討隨機變數為有限多個取值的例子，而隨機變數為無限多個取值的例子，留待大學會有更多的探討。

數學知識家

❶ 有關機率質量函數請見補充教材。

7

練習一道求機率分布表的例題。

例題 4

有一粒公正的特製骰子，其六個面分別為 2, 2, 4, 4, 4, 6 點。今投擲此骰子一次，並令隨機變數 X 表示出現的點數。

(1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。

(2) 求機率 $P(X \le 4)$ 的值。

解

(1) 因為隨機變數 X 的所有可能取值為 2, 4, 6，其所對應的面數分別為 2, 3, 1 面，所以各取值發生的機率分別為 $\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}$。故 X 的機率分布表如下。

點數 x	2	4	6
$P(X=x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2) $P(X \le 4) = P(X=2) + P(X=4) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$。

1 **隨堂練習**

甲、乙兩人各從 1, 2 與 3 三個數字中任選一個數字，可重複選取。已知每個數字被選到的機會均等，並令隨機變數 X 表示甲、乙所選數字的差之絕對值。

(1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。

(2) 求機率 $P(X \ge 1)$ 的值。

(1)

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

(2) $\frac{2}{3}$

8

隨堂練習解答

1 (1) ① $X=0$ 表示甲、乙所選數字的差之絕對值為 0 的事件，即甲、乙選到的數字為 $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$，其機率

$$P(X=0)=\frac{3}{3\times 3}=\frac{1}{3}\text{。}$$

② $X=1$ 表示甲、乙所選數字的差之絕對值為 1 的事件，即甲、乙選到的數字為 $\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$，其機率

$$P(X=1)=\frac{4}{3\times 3}=\frac{4}{9}\text{。}$$

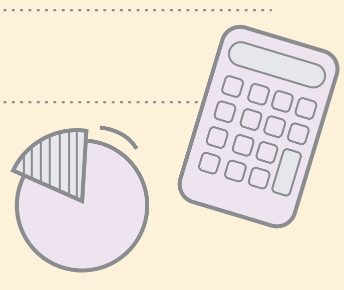
③ $X=2$ 表示甲、乙所選數字的差之絕對值為 2 的事件，即甲、乙選到的數字為 $\{(1,3),(3,1)\}$，其機率

$$P(X=2)=\frac{2}{3\times 3}=\frac{2}{9}\text{。}$$

綜合①②③，可得隨機變數 X 的機率分布表如下。

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

(2) $P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$。



再做一道求機率分布的例題。

例題 5

袋中有大小相同的白球 2 顆、紅球 2 顆，每次從袋中任取一球，取後不放回，直到取到紅球才停止，稱此為一輪操作。已知每顆球在同一輪操作中被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示一輪操作中所取出的總球數。

(1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。

(2) 求機率 $P(X \le 2)$ 的值。

解

(1) ① $X=1$ 表示共取出 1 球的事件，即取球顏色為紅，其機率為

$$P(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}。$$

② $X=2$ 表示共取出 2 球的事件，即取球顏色依序為白紅，其機率為

$$P(X=2)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}。$$

③ $X=3$ 表示共取出 3 球的事件，即取球顏色依序為白白紅，其機率為

$$P(X=3)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{6}。$$

由於白球只有兩顆，因此至多取到第 3 球必可取到紅球，即 $X \le 3$。

綜合以上，可得隨機變數 X 的機率分布表如下。

取出的球數 x	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) $P(X \le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$。

9

離散型隨機變數

1 隨堂練習

盒中裝有大小相同的白光燈泡 4 顆、橘光燈泡 2 顆。今從盒中任取 2 顆燈泡，已知每個燈泡被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出橘光燈泡的個數。

(1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。

(2) 求機率 $P(X<2)$ 的值。

(1)

個數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2) $\frac{14}{15}$

教學小提醒

1 可多利用生活中的實例來練習期望值，例如保險、抽獎等。

在上述的例題與隨堂練習中，隨機變數 X 所有可能的取值可以一一列出，像這樣的隨機變數稱為**離散型隨機變數**。

教學要點

1 了解隨機變數的期望值、變異數及標準差，並知道 10 年級所提的期望值與這裡透過隨機變數的定義一致。

乙 隨機變數的期望值、變異數與標準差

對於隨機變數 X，常利用一些數值來代表該隨機變數 X 的某些特性，最常用的有「期望值」、「變異數」與「標準差」，此處用來定義期望值的精神與內涵與第二冊所學過的數學期望值是一致的。

(一) 期望值

在第二冊中我們學過：當一試驗有 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 等 n 種結果，且每一種結果發生的機率分別為 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 時，此試驗的期望值

$$E=m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_np_n=\sum_{i=1}^{n} m_ip_i。$$

同樣地，當隨機變數 X 的取值為有限個時，X 的**期望值**就是將其所有可能的取值 $x_1, x_2, \dots, x_n$，分別乘上相對應發生的機率之總和。又因為 $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$，所以 X 的期望值可視為將 X 每一個取值以其發生的機率作為相對應的權數進行加權平均的概念。

隨堂練習解答

1 (1) ① $X=0$ 表示取出 0 顆橘光燈泡的事件，即取出 2 顆白光燈泡，其機率

$$P(X=0)=\frac{C_2^4}{C_2^6}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\text{。}$$

② $X=1$ 表示取出 1 顆橘光燈泡的事件，即取出 1 顆白光燈泡與 1 顆橘光燈泡，其機率

$$P(X=1)=\frac{C_1^4\times C_1^2}{C_2^6}=\frac{8}{15}\text{。}$$

③ $X=2$ 表示取出 2 顆橘光燈泡的事件，其機率

$$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_2^6}=\frac{1}{15}\text{。}$$

綜合①②③，可得隨機變數 X 的機率分布表如下。

個數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2) $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{2}{5}+\frac{8}{15}=\frac{14}{15}$ 。

隨堂練習解答

1 因為 X 表示取到杏仁內餡巧克力的顆數，所以 X 所有可能的取值為 0 , 1 , 2（顆），其機率分布表如下。

顆數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\dfrac{C_0^3\times C_2^5}{C_2^8}=\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{C_1^3\times C_1^5}{C_2^8}=\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{C_2^3\times C_0^5}{C_2^8}=\dfrac{3}{28}$

故期望值

$$E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$$（顆）。

期望值

設隨機變數 X 的機率分布表如右。
定義隨機變數 X 的期望值為

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\text{。}$$

練習求隨機變數 X 的期望值。

例題 6

已知 4 個紅包袋分別裝有 100 元、200 元、200 元、300 元，從中任取 2 個紅包袋，且每個紅包袋被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出兩個紅包袋的總金額，求 X 的期望值。

解

因為任意抽取兩個紅包袋的組合有「100 元與 200 元」、「100 元與 300 元」、「200 元與 200 元」、「200 元與 300 元」，所以總金額 X 所有可能的取值共有 300 元、400 元、500 元三種，且其機率分布表如下。

總金額 x	300	400	500
$P(X=x)$	$\dfrac{C_1^1C_1^2}{C_2^4}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{C_1^1C_1^1+C_2^2}{C_2^4}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{C_1^1C_1^2}{C_2^4}=\dfrac{1}{3}$

故期望值

$$E(X)=300\times\frac{1}{3}+400\times\frac{1}{3}+500\times\frac{1}{3}=400\text{（元）。}$$

隨堂練習

盒中有 8 顆巧克力，其中 3 顆的內餡為杏仁，自盒中任取 2 顆，且每顆巧克力被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取到杏仁內餡巧克力的顆數，求 X 的期望值。

$\dfrac{3}{4}$（顆）

教學小提醒

1 提醒學生期望值有單位。

補充例題

1 一位講者進行一場 60 分鐘的講座，全場的聽眾中有 20% 全程聽完，有 10% 的聽眾全程睡著，其餘聽眾中有一半只聽了 $\frac{1}{3}$，另一半只聽了 $\frac{2}{3}$。試問每名聽眾聽講座時間的期望值是幾分鐘？

解：期望值

$$E=60\times\frac{20}{100}+0\times\frac{10}{100}+20\times\frac{35}{100}+40\times\frac{35}{100}=33\text{（分鐘）。}$$

再做一題與期望值有關的練習。

例題 7

袋中有 100 元代幣 3 枚、50 元代幣 6 枚與 20 元代幣 n 枚。從袋中抽出一枚代幣，且每枚代幣被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示抽出代幣的金額。已知 X 的期望值為 40 元，求 n 的值。

解

因為 X 表示取出一枚代幣的金額，所以 X 所有可能的取值為 100, 50, 20（元），其機率分布表如下。

金額 x	100	50	20
$P(X=x)$	$\frac{3}{3+6+n}$	$\frac{6}{3+6+n}$	$\frac{n}{3+6+n}$

又 X 的期望值為 40 元，即

$$E(X)=100\times\frac{3}{n+9}+50\times\frac{6}{n+9}+20\times\frac{n}{n+9}=40，$$

整理得 $20n=240$，解得 $n=12$。

1 **隨堂練習**

擲一粒公正的骰子一次，當出現 1, 2 或 3 點時，可得 200 元；出現 4 或 5 點時，可得 500 元；出現 6 點時，可得 k 元。設隨機變數 X 表示擲骰子一次所得的金額，已知 X 的期望值為 400 元，求 k 的值。

800

隨堂練習解答

1 因為 X 表示擲骰子一次所得的金額，所以 X 的取值為 200, 500, k（元），其機率分布表如右。

金額 x	200	500	k
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

又 X 的期望值為 400 元，即

$$E(X)=200\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{3}+k\times\frac{1}{6}=400，$$

整理得 $1600+k=2400$，解得 $k=800$。

(二) 變異數與標準差

在第二冊中曾介紹過一組數據的變異數與標準差，它們是衡量數據分散程度時常用的指標，我們先複習一下它們的算法：設 6 個數據為 $4, 5, 7, 5, 4, 5$，可得 6 個數據的平均數為

$$\mu=\frac{1}{6}(4+5+7+5+4+5)=5，$$

因此這 6 個數據的變異數為

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\frac{1}{6}\left((4-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(5-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2\right)\\&=\frac{1}{6}\left((4-5)^2\times 2+(5-5)^2\times 3+(7-5)^2\times 1\right)\\&=(4-5)^2\times\frac{2}{6}+(5-5)^2\times\frac{3}{6}+(7-5)^2\times\frac{1}{6}=1。\end{aligned}$$

仿照以上的方式，將隨機變數 X 每一個取值的離均差平方乘上其對應的機率之總和，稱為隨機變數 X 的**變異數**；再將變異數開正平方根所得到的值稱為隨機變數 X 的**標準差**。

將隨機變數 X 的變異數與標準差定義如下。

變異數與標準差

設隨機變數 X 的機率分布如表，且期望值為 $E(X)=\mu$。定義隨機變數 X 的變異數為

x	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	…	p_n

$$\operatorname{Var}(X)=(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i，$$

且 $\sigma(X)=\sqrt{\operatorname{Var}(X)}$ 稱為隨機變數 X 的**標準差**。

隨機變數 X 的標準差是用來衡量該變數的值與期望值的離散程度。一般而言，如果標準差較大，則該變數的值與期望值較分散；如果標準差較小，則該變數的值與期望值較接近。

教學小提醒

1 可與第二冊數據的變異數、標準差做比較。

13

底下來練習求隨機變數的期望值、變異數與標準差。

例題 8

袋中有編號 $2, 4, 6, 8$ 的球各一顆。今從袋中取出一球，且每球被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出球的編號，求 X 的期望值、變異數與標準差。

1

解

因為 X 表示取出球的編號，所以 X 所有可能的取值為 $2, 4, 6, 8$，其機率分布表如下。

編號 x	2	4	6	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

故期望值

$$E(X)=2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{4}=\frac{20}{4}=5\text{。}$$

變異數

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=(2-5)^2\times\frac{1}{4}+(4-5)^2\times\frac{1}{4}+(6-5)^2\times\frac{1}{4}+(8-5)^2\times\frac{1}{4}\\&=9\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}=5\text{。}\end{aligned}$$

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{5}$。

1

隨堂練習

摸彩箱中裝有標示 $5, 6, 7, 8$ 折的球分別各 $1, 2, 3, 4$ 顆。從箱中取出一球，且每球被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出球所代表的折扣數（例如標示 7 折的球所對應的 X 為 7），求 X 的期望值、變異數與標準差。

$E(X)=7$；$\mathrm{Var}(X)=1$；$\sigma(X)=1$

14

補充例題

1 設生男生女的機率均等，對有 3 個小孩的家庭而言，令隨機變數 X 表示男孩的數量，求 X 的期望值、變異數與標準差。

解：有 3 個小孩的家庭中，男女孩的數量有「3 男」、「2 男 1 女」、「1 男 2 女」與「3 女」四種情形，因為隨機變數 X 表示男孩的數量，X 的取值與機率分布表如下。

情形	3 女	1 男 2 女	2 男 1 女	3 男
數量 x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

故期望值

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\text{（個）。}$$

變異數

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}\\&=\frac{9}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{8}\\&=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}，\end{aligned}$$

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$（個）。

隨堂練習解答

1 隨機變數 X 的機率分布表如下。

折扣數 x	5	6	7	8
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

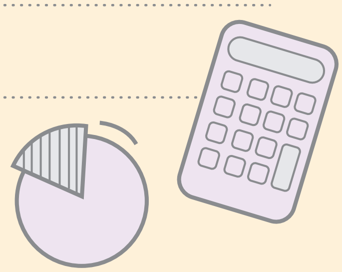
故期望值

$$E(X)=5\times\frac{1}{10}+6\times\frac{2}{10}+7\times\frac{3}{10}+8\times\frac{4}{10}=7\text{。}$$

變異數

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=(5-7)^2\times\frac{1}{10}+(6-7)^2\times\frac{2}{10}+(7-7)^2\times\frac{3}{10}+(8-7)^2\times\frac{4}{10}\\&=4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{2}{10}+0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{4}{10}=1\text{。}\end{aligned}$$

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{1}=1$。



處理變異數時，有時為了計算上的方便，會將變異數公式改寫如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2\mu x_i+\mu^2\right)p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i - 2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + \mu^2\sum_{i=1}^{n}p_i\text{，}\end{aligned}$$

因為 $\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=\mu$ 且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，所以上式可化為

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-2\mu\times\mu+\mu^2\times 1=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\mu^2\text{，}$$

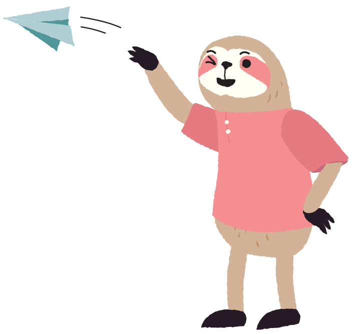
又因為 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i$ 是隨機變數 X^2 的期望值，以符號 $E\left(X^2\right)$ 表示，所以

$$\mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2\text{。}$$

因此，隨機變數 X 的變異數公式也可以改寫如下。

變異數公式

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\mu^2=E\left(X^2\right)-\mu^2=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2\text{。}$$



教學小提醒

1 ❶關於 $E(X)$、$E\left(X^2\right)$ 與 $\left[E(X)\right]^2$ 符號上的差異，老師可用例子多做說明。

15

利用上述公式，可以幫我們處理一些計算較複雜的變異數。

例題 9

投擲一粒不公正的骰子，其各點數出現的機率與該點數成正比。設隨機變數 X 表示擲一次骰子所出現的點數，求 X 的期望值與變異數。

解

因為 X 表示擲一次骰子所出現的點數，所以 X 所有可能的取值為 1, 2, 3, 4, 5, 6，又各點數出現的機率比為 1：2：3：4：5：6，可得其機率分布表如下。

點數 x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

故期望值

$$E(X)=1\times\frac{1}{21}+2\times\frac{2}{21}+3\times\frac{3}{21}+4\times\frac{4}{21}+5\times\frac{5}{21}+6\times\frac{6}{21}=\frac{91}{21}=\frac{13}{3}\ ;$$

變異數

$$\operatorname{Var}(X)=\left(1^2\times\frac{1}{21}+2^2\times\frac{2}{21}+3^2\times\frac{3}{21}+4^2\times\frac{4}{21}+5^2\times\frac{5}{21}+6^2\times\frac{6}{21}\right)-\left(\frac{13}{3}\right)^2$$

$$=\frac{441}{21}-\frac{169}{9}=\frac{140}{63}=\frac{20}{9}\ 。$$

1 **隨堂練習**

袋中裝有大小相同、編號為 1, 2, 3, 4 的球各一顆，自袋中任取兩顆球，且每球被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出兩顆球中的最大編號，求 X 的期望值、變異數與標準差。

$E(X)=\frac{10}{3}$ ； $\operatorname{Var}(X)=\frac{5}{9}$ ； $\sigma(X)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

16

隨堂練習解答

1 隨機變數 X 的機率分布表如下。

編號 x	1	2	3	4
取球情形	無	(1 , 2)	(1 , 3) , (2 , 3)	(1 , 4) , (2 , 4) , (3 , 4)
$P(X=x)$	$\frac{0}{C_2^4}=0$	$\frac{1}{C_2^4}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{C_2^4}=\frac{2}{6}$	$\frac{3}{C_2^4}=\frac{3}{6}$

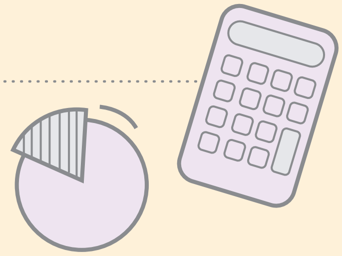
故期望值

$$E(X)=1\times0+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{6}+4\times\frac{3}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}\ ;$$

變異數

$$\mathrm{Var}(X)=\left(1^2\times0+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{2}{6}+4^2\times\frac{3}{6}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{35}{3}-\frac{100}{9}=\frac{5}{9}\ 。$$

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 。



(三) 期望值、變異數與標準差的性質

設 X 為隨機變數且其機率分布表如表 (a)。若 $Y=aX+b$（其中 a, b 為常數），即將 X 的每個取值乘以 a 再加 b，則 Y 也會是隨機變數，且每一個 Y 的取值 $y_i=ax_i+b$ 出現的機率也會與 x_i 出現的機率相同，如表 (b)。

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

表 (a)

y	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_n+b
$P(Y=y)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

表 (b)

上述的隨機變數 X 與 Y 有著線性變換 $Y=aX+b$ 的關係，那麼此時兩者的期望值與標準差會有怎樣的關係呢？利用期望值的定義，可得隨機變數 Y 的期望值

$$\begin{aligned}E(Y)&=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\cdots+(ax_n+b)p_n\\&=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n)\\&=aE(X)+b\text{。}\end{aligned}$$

同樣方法可推導出 $Y=aX+b$ 的變異數與標準差，請見附錄一。

期望值、變異數與標準差的性質

若 X 為隨機變數且 a, b 為常數，則 $Y=aX+b$ 也會是隨機變數，且滿足下列性質。

(1) $E(Y)=aE(X)+b$。

(2) $\mathrm{Var}(Y)=a^2\mathrm{Var}(X)$。

(3) $\sigma(Y)=|a|\sigma(X)$。

17

利用上面的性質，來看一道與引言有關的例子。

例題 10

某年貨大街的店家辦理丟硬幣送紅包的活動：顧客同時丟兩枚均勻的硬幣一次，每出現一枚正面可得紅包 200 元，每出現一枚反面可得紅包 100 元。設隨機變數 X 表示正面出現的枚數；Y 表示所得的金額。

(1) 求 X 的期望值 $E(X)$ 與標準差 $\sigma(X)$。

(2) 已知 X 與 Y 的關係可表示成 $Y=aX+b$，求 a, b 的值。

(3) 利用 (1) 與 (2)，求 Y 的期望值 $E(Y)$ 與標準差 $\sigma(Y)$。

解

(1) 因為 X 表示正面出現的枚數，所以 X 所有可能的取值為 $0, 1, 2$，其機率分布表如下。

正面出現的枚數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{C^2_0}{2^2}=\frac{1}{4}$	$\frac{C^2_1}{2^2}=\frac{1}{2}$	$\frac{C^2_2}{2^2}=\frac{1}{4}$

故 X 的期望值

$$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1\text{；}$$

變異數

$$\mathrm{Var}(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{4}+(1-1)^2\times\frac{1}{2}+(2-1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{；}$$

標準差

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{。}$$

(2) 因為 X 的取值 $0, 1, 2$ 分別對應到 Y 的取值 $200, 300, 400$，且

$$Y=aX+b\text{，}$$

所以

$$\begin{cases} b=200 \\ a+b=300 \\ 2a+b=400 \end{cases}。$$

解得 $a=100,\ b=200$。

(3) 由 (1) 的結果與 (2) 的關係式 $Y=100X+200$，得 Y 的期望值

$E(Y)=E(100X+200)=100E(X)+200=100\times1+200=300$（元）；

標準差

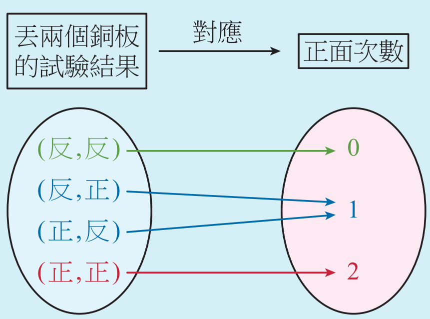
$\sigma(Y)=\sigma(100X+200)=100\sigma(X)=100\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}(\approx70.7)$（元）。

隨堂練習

❶ 已知隨機變數 X 滿足 $E(-2X+3)=47,\ \mathrm{Var}(-2X+3)=196$，求 X 的期望值 $E(X)$、變異數 $\mathrm{Var}(X)$ 與標準差 $\sigma(X)$。 $E(X)=-22$；$\mathrm{Var}(X)=49$；$\sigma(X)=7$

數學超展開

第二冊學習的古典機率是單純討論樣本空間中某事件發生的機率，而本單元的隨機變數是進一步將樣本空間中的每一個樣本點對應到一個實數，也就是說，隨機變數是由樣本空間映至實數的函數，這讓我們可以將函數的概念引入機率的範疇中。



根據隨機變數（視為函數）值域的數值分布情形，我們可將其區分為「離散型隨機變數」與「連續型隨機變數」。目前高中學習的內容僅限於離散型隨機變數，例如抽紅包得到的獎金、取球的個數等；反之，若隨機變數的值域為某一區間的所有數值，例如等公車的時間、中午的溫度等，則為連續型隨機變數。有了隨機變數的概念後，開創了機率論新的研究方向，進一步適用於更多一般性的情況。

隨堂練習解答

❶ 因為利用期望值、變異數與標準差的性質可得

$$E(-2X+3)=-2E(X)+3=47,$$

$$\mathrm{Var}(-2X+3)=(-2)^2\times\mathrm{Var}(X)=196，$$

所以 $E(X)=-22$，$\mathrm{Var}(X)=49$，$\sigma(X)=\sqrt{49}=7$。

1 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) 丟一枚均勻硬幣三次，令隨機變數 X 表示出現正面的次數，則 $P(X=0)=0$。

☐ (2) 若隨機變數 X 所有可能的取值為 1 , 2，則 $P(X=1)+P(X=2)=1$。

☐ (3) 若隨機變數 X 的期望值 $E(X)=2$，且 $Y=-2X+3$，則 $E(Y)=-4$。

一、基礎題

(1) × (2) ○ (3) ×

1 寫出下列隨機變數 X 所有可能的取值。

(1) 一盒中有 12 件樣品，其中 3 件為不良品。自盒中任取 4 件，並令隨機變數 X 表示取得不良品的件數。

(2) 皮夾內有 1000 元與 100 元鈔票各 4 張。隨機取出 2 張，並令隨機變數 X 表示所取出的總金額。

(3) 從 1 到 10 的十個數字中任取一數，並令隨機變數 X 表示所取之數的正因數個數。

(1) 0 , 1 , 2 , 3 (2) 200, 1100, 2000 (3) 1 , 2 , 3 , 4

2 從 1 , 2 , 3 , 4 , 5 中任取兩個相異的數字，並令隨機變數 X 表示取到偶數的個數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 描述 $X=0$ 所表示的事件。

(1) 0 , 1 , 2 (2) $\{(1,3),(1,5),(3,5)\}$

習題解答

觀念澄清

(1) ×：因為「 $X=0$ 」表示「正面出現 0 次的事件」，

所以 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ 。

(2) ○：因為隨機變數 X 所有可能的取值只有 1, 2，所以 $P(X=1)+P(X=2)=1$ 。

(3) ×： $E(Y)=E(-2X+3)=-2\times E(X)+3=-2\times 2+3=-1$ 。

一、基礎題

1. (1) X 表示取得不良品的件數， X 所有可能的取值為 0 , 1 , 2 , 3（件）。

(2) X 表示所取出的總金額， X 所有可能的取值如下表。

所取出的鈔票	X 的取值
兩張 100 元	$X=200$
一張 100 元和一張 1000 元	$X=1100$
兩張 1000 元	$X=2000$

故 X 所有可能的取值為 200, 1100, 2000（元）。

(3) X 表示所取之數的正因數個數， X 所有可能的取值情形如下表。

1～10	正因數	X 的取值
1	1	$X=1$
2	1 , 2	$X=2$
3	1 , 3	$X=2$
4	1 , 2 , 4	$X=3$
5	1 , 5	$X=2$
6	1 , 2 , 3 , 6	$X=4$
7	1 , 7	$X=2$
8	1 , 2 , 4 , 8	$X=4$
9	1 , 3 , 9	$X=3$
10	1 , 2 , 5 , 10	$X=4$

故 X 可能的取值為 1 , 2 , 3 , 4。

2. (1) 因為任取兩個相異的數字，可能取到偶數的個數為 0 , 1 , 2 個，所以 X 所有可能的取值為 0 , 1 , 2。

(2) $X=0$ 表示取得 0 個偶數的事件，

也就是說，兩個數字都是奇數，

即 $\{(1,3),(1,5),(3,5)\}$ 。

3. (1) 因為從袋中取出兩顆球，可能取出的紅球數為 1 , 2 顆，所以 X 所有可能的取值為 1 , 2。
(2) 因為 $X=2$ 表示取出的紅球數為 2 顆的事件，
所以其機率 $P(X=2)=\dfrac{C_2^3}{C_2^4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ 。
4. 因為 X 表示甲、乙所選數字的平方和，所以 X 所有可能的取值為 $1^2+1^2=2$ ，$1^2+2^2=5$ ，$2^2+2^2=8$ ，
其機率分布表如下。

平方和 x	2	5	8
$P(X=x)$	$\dfrac{1}{C_1^2\times C_1^2}=\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{2}{C_1^2\times C_1^2}=\dfrac{2}{4}$	$\dfrac{1}{C_1^2\times C_1^2}=\dfrac{1}{4}$

故 $P(X\le 7)=P(X=2)+P(X=5)=\dfrac{3}{4}$ 。
5. 因為 X 表示點數 6 出現的次數，所以 X 的可能取值為 0 , 1 , 2，其機率分布表如下。

次數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\dfrac{5\times 5}{6\times 6}=\dfrac{25}{36}$	$\dfrac{5\times 1\times 2}{6\times 6}=\dfrac{10}{36}$	$\dfrac{1\times 1}{6\times 6}=\dfrac{1}{36}$

故期望值 $E(X)=0\times\dfrac{25}{36}+1\times\dfrac{10}{36}+2\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$ 。
6. 因為 X 表示取出一球所得的金額，所以 X 的取值為 500, 200, 0（元），其機率分布表如下。

金額 x	500	200	0
$P(X=x)$	$\dfrac{2}{2+5+n}$	$\dfrac{5}{2+5+n}$	$\dfrac{n}{2+5+n}$

又 X 的期望值為 100 元，即

$$E(X)=500\times\frac{2}{n+7}+200\times\frac{5}{n+7}+0\times\frac{n}{n+7}=100\ ,$$

整理得 $n+7=20$ ，解得 $n=13$ 。

3 袋中有紅球 3 顆、白球 1 顆。從袋中取出 2 顆球，且每球被取到的機會均等，令隨機變數 X 表示取出的紅球數。

(1) 寫出 X 所有可能的取值。

(2) 求機率 $P(X=2)$ 的值。

(1) 1，2　(2) $\frac{1}{2}$

4 甲、乙兩人各從 1 與 2 兩個數字中任選一個數字，並令隨機變數 X 表示甲、乙所選數字的平方和。已知每個數字被選到的機會均等，求機率 $P(X\leq 7)$ 的值。

$\frac{3}{4}$

5 擲一粒公正骰子 2 次，令隨機變數 X 為點數 6 出現的次數，求隨機變數 X 的期望值。

$\frac{1}{3}$

6 箱中有黃球 2 顆、紅球 5 顆與白球 n 顆。從箱中取出一球，且每球被取到的機會均等。取出球的顏色為黃球、紅球與白球分別可得 500 元、200 元與 0 元，並令隨機變數 X 表示取出一球所得的金額。已知 X 的期望值為 100 元，求 n 的值。

13

7 袋中裝有大小相同的代幣 1 元與 5 元各 2 枚。從袋中任取 2 枚代幣，並令隨機變數 X 表示取出 2 枚代幣所得的總金額。已知每個代幣被取到的機會均等，求 X 的期望值與標準差。

$E(X)=6$（元）；$\sigma(X)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$（元）

8 袋中裝有標示 1, 2, 3, 4 號的卡片各 5, 3, 1, 1 張。從袋中取出 1 張卡片，且每張卡片被取到的機會均等，令隨機變數 X 表示取出卡片的編號，求 X 的期望值、變異數與標準差。

$E(X)=\frac{9}{5}$；$\mathrm{Var}(X)=\frac{24}{25}$；$\sigma(X)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

9 有一粒公正的特製骰子，其六個面分別為 0, 1, 1, 1, 1, 2 點。今投擲此骰子一次，可得到的金額為點數的 3 倍再加 5（元）。設隨機變數 X 表示擲骰子一次所出現的點數；Y 表示擲骰子一次所得到的金額。

(1) 求 X 的期望值 $E(X)$ 與變異數 $\mathrm{Var}(X)$。

(2) 寫出 X 與 Y 的關係。

(3) 求 Y 的期望值 $E(Y)$ 與變異數 $\mathrm{Var}(Y)$。

(1) $E(X)=1$；$\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{3}$　(2) $Y=3X+5$　(3) $E(Y)=8$（元）；$\mathrm{Var}(Y)=3$

7. 因為 X 表示取出 2 枚代幣所得的總金額，所以 X 的取值為 2 , 6 , 10（元），其機率分布表如下。

總金額 x	2	6	10
$P(X=x)$	$\frac{C_2^2}{C_2^4}=\frac{1}{6}$	$\frac{C_1^2\times C_1^2}{C_2^4}=\frac{4}{6}$	$\frac{C_2^2}{C_2^4}=\frac{1}{6}$

故期望值

$E(X)=2\times\frac{1}{6}+6\times\frac{4}{6}+10\times\frac{1}{6}=\frac{36}{6}=6$（元）。

變異數

$$\mathrm{Var}(X)=(2-6)^2\times\frac{1}{6}+(6-6)^2\times\frac{4}{6}+(10-6)^2\times\frac{1}{6}$$
$$=16\times\frac{1}{6}+0\times\frac{4}{6}+16\times\frac{1}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$ 。

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$（元）。

8. 因為 X 表示取出卡片的編號，所以 X 的取值為 1, 2, 3, 4，其機率分布表如下。

編號 x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

故期望值 $E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$ 。

變異數 $\mathrm{Var}(X)=\left(1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}+4^2\times\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{42}{10}-\frac{81}{25}=\frac{24}{25}$ 。

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 。

9. (1) 因為 X 表示擲骰子一次所出現的點數，所以 X 的取值為 0, 1, 2。其機率分布表如下。

點數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

故期望值 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$ ，

變異數 $\mathrm{Var}(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{6}+(1-1)^2\times\frac{2}{3}+(2-1)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ 。

(2) 因為投擲此骰子一次，可得到的金額為點數的 3 倍再加 5，所以
$Y=3X+5$ 。

(3) 由(1)的結果與(2)的關係式 $Y=3X+5$ ，得
$E(Y)=E(3X+5)=3E(X)+5=3\times1+5=8$（元）；
$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(3X+5)=9\mathrm{Var}(X)=9\times\frac{1}{3}=3$ 。

二、進階題

10. (1) 期望值

$$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times a+2\times b+3\times\frac{1}{6}=a+2b+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}\text{，}$$

又 $\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{6}=1$，

整理得 $\begin{cases} a+2b=\dfrac{5}{6} \\ a+b=\dfrac{7}{12} \end{cases}$，解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{4}$。

(2) $\operatorname{Var}(X)=\left(0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{17}{6}-\frac{16}{9}=\frac{19}{18}$。

11. 因為 X 表示甲、乙兩人紅包金額的總和，所以 X 所有可能的取值為 $100+200=300$, $100+500=600$, $200+500=700$，其機率分布表如下。

總金額 x	300	600	700
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故期望值 $E(X)=300\times\frac{1}{3}+600\times\frac{1}{3}+700\times\frac{1}{3}=\frac{1600}{3}$（元）。

12. 因為 X 表示所取出兩球號碼的平均，X 可能的取值情形如下表。

所取出兩球的號碼	X 的取值
1, 2	$X=1.5$
1, 3	$X=2$
1, 4	$X=2.5$
2, 3	$X=2.5$
2, 4	$X=3$
3, 4	$X=3.5$

所以 X 的取值為 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5，其機率分布表如下。

平均 x	1.5	2	2.5	3	3.5
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

故期望值 $E(X)=1.5\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+2.5\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+3.5\times\frac{1}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=2.5$。

標準差 $\sigma(X)=\sqrt{(1.5-2.5)^2\times\frac{1}{6}+(2-2.5)^2\times\frac{1}{6}+(2.5-2.5)^2\times\frac{1}{3}+(3-2.5)^2\times\frac{1}{6}+(3.5-2.5)^2\times\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$。

二、進階題

10 設隨機變數 X 的機率分布表如下。

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{6}$

設 X 的期望值 $E(X)=\frac{4}{3}$。

(1) 求實數 a, b 的值。

(2) 求隨機變數 X 的變異數 $\mathrm{Var}(X)$。

(1) $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{4}$　(2) $\frac{19}{18}$

11 有 100 元、200 元、500 元的紅包袋各一個。由甲、乙兩人依序各抽取 1 個紅包袋，抽取後不放回，且每個紅包袋被抽取的機會均等。設隨機變數 X 表示甲、乙兩人紅包金額的總和，求 X 的期望值。

$\frac{1600}{3}$（元）

12 箱中裝有大小相同、編號 1, 2, 3, 4 的球各一顆。從箱中任取 2 顆球，並令隨機變數 X 表示所取出 2 顆球號碼的平均。已知每個球被取到的機會均等，求 X 的期望值與標準差。

$E(X)=2.5$；$\sigma(X)=\frac{\sqrt{15}}{6}$

補充教材

● 機率質量函數

設離散型隨機變數 X 所有可能的取值為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，若將 $X=x_i$ 的機率以 $P(X=x_i)=P_i$ 表示，則隨機變數 X 所有可能的取值與其機率之對應關係稱為 X 的**機率分布**，此時，機率 P 是隨機變數 X 的函數，稱為**機率質量函數**（probability mass function，簡寫為 pmf）。由機率的性質可知，隨機變數 X 的機率質量函數都具有下面兩個性質：

(1) $p_i \geq 0, i=1, 2, \cdots, n$ 。

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ 。

若以橫軸為隨機變數 X 的取值，縱軸為該取值出現的機率，所得到的長條圖稱為**機率質量函數圖**。例如丟一枚均勻的硬幣 3 次，令隨機變數 X 表示正面出現的次數，可得隨機變數 X 的機率分布如下表。

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

依據上表繪製下圖便可得隨機變數 X 的機率質量函數圖。