總　　分
測驗時間：20分鐘

選修數學乙(下)小試身手卷（中偏易）

請 尊重著作權 勿擅自翻印

第 3 回

範圍：單元 1 離散型隨機變數

（主題：甲乙）

____年____班____號

姓名______________

一、單選題(5 小題，每格 10 分，共 50 分)

1.（　　）下列隨機變數 X 所有可能的取值，何者為 0、1、2 三種情況？　(A)對同一籃框連續投籃 3 次，並令隨機變數 X 表示投進的次數　(B)丟一枚均勻硬幣 3 次，並令隨機變數 X 表示正面出現的次數　(C)擲一粒公正的骰子 3 次，並令隨機變數 X 表示所得的 6 點的次數　(D)從 52 張撲克牌中隨機抽出 3 張牌。令隨機變數 X 表示抽到點數「K」的張數　(E)盒中裝有大小相同的白光燈泡 3 顆、橘光燈泡 2 顆。今從盒中任取 3 顆燈泡，已知每個燈泡被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出橘光燈泡的個數

解答　E

解析　(A)(B)(C)(D)隨機變數 X 所有可能的取值為 0、1、2、3 四種情況
(E)隨機變數 X 所有可能的取值為 0、1、2 三種情況

2.（　　）已知某 AI 機器人被設定打靶命中率為 $\frac{2}{3}$，若此機器人對同一個靶面連續射擊 4 發，每發均為獨立事件，令隨機變數 X 表示命中靶面的次數，求機率 $P(X>2)$。　(A) $\frac{1}{9}$　(B) $\frac{8}{9}$　(C) $\frac{16}{27}$　(D) $\frac{8}{81}$　(E) $\frac{32}{81}$

解答　C

解析　$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=C_3^4(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^1+C_4^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^0=\frac{16}{27}$

3.（　　）已知 5 個紅包袋分別裝有 100 元、100 元、100 元、500 元、1000 元，從中任取 2 個紅包袋，且每個紅包袋被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出兩個紅包袋的總金額，求 X 的期望值。　(A)500　(B)560　(C)600　(D)720　(E)750

解答　D

解析　因為任意抽取兩個紅包袋的組合有「100 元與 100 元」、「100 元與 500 元」、「100 元與 1000 元」、「500 元與 1000 元」，所以總金額 X 所有可能的取值共有 200 元、600 元、1100、1500 元四種，且其機率分布表如下。

總金額 x	200	600	1100	1500
$P(X=x)$	$\frac{C_2^3}{C_2^5}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_1^3C_1^1}{C_2^5}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_1^3C_1^1}{C_2^5}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_2^5}=\frac{1}{10}$

故期望值 $E(X)=200\times\frac{3}{10}+600\times\frac{3}{10}+1100\times\frac{3}{10}+1500\times\frac{1}{10}=720$

4.（　　）袋中有編號 1、3、5、7 的球各一顆。今從袋中取出一球，且每球被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出球的編號，求 X 的標準差。
(A)2　(B)$\sqrt{5}$　(C)3　(D)$\sqrt{10}$　(E)$2\sqrt{3}$

解答　B

解析　因為 X 表示取出球的編號，所以 X 所有可能的取值為 1、3、5、7，其機率分布表如下。

編號 x	1	3	5	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=\frac{16}{4}=4$。

變異數 $\mathrm{Var}(X)=(1-4)^2\times\frac{1}{4}+(3-4)^2\times\frac{1}{4}+(5-4)^2\times\frac{1}{4}+(7-4)^2\times\frac{1}{4}$

$=9\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}=5$。

故標準差 $\sigma(X)=\sqrt{5}$

5.（　　）已知隨機變數 X 滿足 $E(aX+b)=47$，$\mathrm{Var}(aX+b)=196$，又 $E(X)=-22$、$\mathrm{Var}(X)=49$，則下列選項何者正確？　(A)$a=3$　(B)$b=9$　(C)$a^2E(X)=47$　(D)$aE(X)=47$　(E)$a^2\mathrm{Var}(X)=196$

解答　E

解析　由隨機變數之期望值、變異數的性質可知
$E(aX+b)=aE(X)+b$、$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$，
因此 $aE(X)+b=47$，$a^2\mathrm{Var}(X)=196$，又 $E(X)=-22$、$\mathrm{Var}(X)=49$，
得 $a\times(-22)+b=47$，$a^2\times 49=196$，解得 $a=2$，$b=91$ 或 $a=-2$，$b=3$
(A)╳：$a=2$ 或 -2　(B)╳：$b=91$ 或 3　(C)╳：$a^2E(X)=4\times(-22)=-88$
(D)╳：$aE(X)=2\times(-22)$或$(-2)\times(-22)=-44$ 或 44
(E)○：$a^2\mathrm{Var}(X)=196$

二 、 填充題(2 小題，第 1 題每格 4 分；第 2 題每格 7 分，共 50 分)

1. 箱中裝有大小相同、編號分別為 2、2、4、6 的球各一顆。從箱中任取 2 顆球，並令隨機變數 X 表示所取出 2 顆球號碼的平均。已知每個球被取到的機會均等，
   (1) 寫出隨機變數 X 的機率分布表。

2 顆球號碼的平均 x	①	③	⑤	⑦
機率 $P(X=x)$	②	④	⑥	⑧

①____________。②____________。③____________。④____________。
⑤____________。⑥____________。⑦____________。⑧____________。

   (2) 求 X 的變異數為____________。

解答　(1)①2　②$\frac{1}{6}$　③3　④$\frac{1}{3}$　⑤4　⑥$\frac{1}{3}$　⑦5　⑧$\frac{1}{6}$　(2)$\frac{11}{12}$

解析　取出 2 顆球的號碼之情況為：2 與 2、2 與 4、2 與 6、4 與 6，而其平均依序為 2、3、4、5，

且對應的機率為 $\frac{C_2^2}{C_2^4}=\frac{1}{6}$、$\frac{C_1^2C_1^1}{C_2^4}=\frac{2}{6}$、$\frac{C_1^2C_1^1}{C_2^4}=\frac{2}{6}$、$\frac{C_1^1C_1^1}{C_2^4}=\frac{1}{6}$，所以

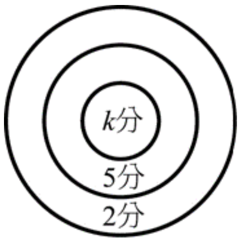
(1) 隨機變數 X 的機率分布表如下。

2 顆球號碼的平均 x	2	3	4	5
機率 $P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2) X 的期望值為 $2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{6}+4\times\frac{2}{6}+5\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$，

則 X 的變異數為 $2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{2}{6}+4^2\times\frac{2}{6}+5^2\times\frac{1}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{11}{12}$。

2. 如附圖之靶，某線上遊戲設定射中外環區域得 2 分；射中中間環狀區域得 5 分；射中最中心圓形區域得 k 分，且命中靶面各區域的機率依序為 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$。設隨機變數 X 表示射擊一次所得的分數，已知 X 的期望值為 4 分。



   (1) 求 k 的值為____________。
   (2) 求 X 的標準差為____________。

解答　(1)8　(2)$\sqrt{5}$

解析　(1) 由題意可得

隨機變數 X 的期望值 $E(X)=2\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{3}+k\times\frac{1}{6}=4$，解得 $k=8$。

(2) X 的變異數為 $\mathrm{Var}(X)=(2-4)^2\times\frac{1}{2}+(5-4)^2\times\frac{1}{3}+(8-4)^2\times\frac{1}{6}=5$，

則 X 的標準差為 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{5}$。