5 積分

6 積分的應用

數學名言 數學愈來愈多的被應用於經濟學，
其實，在經濟學論文中的應用數學，看上去真美！ —納許

5 積分

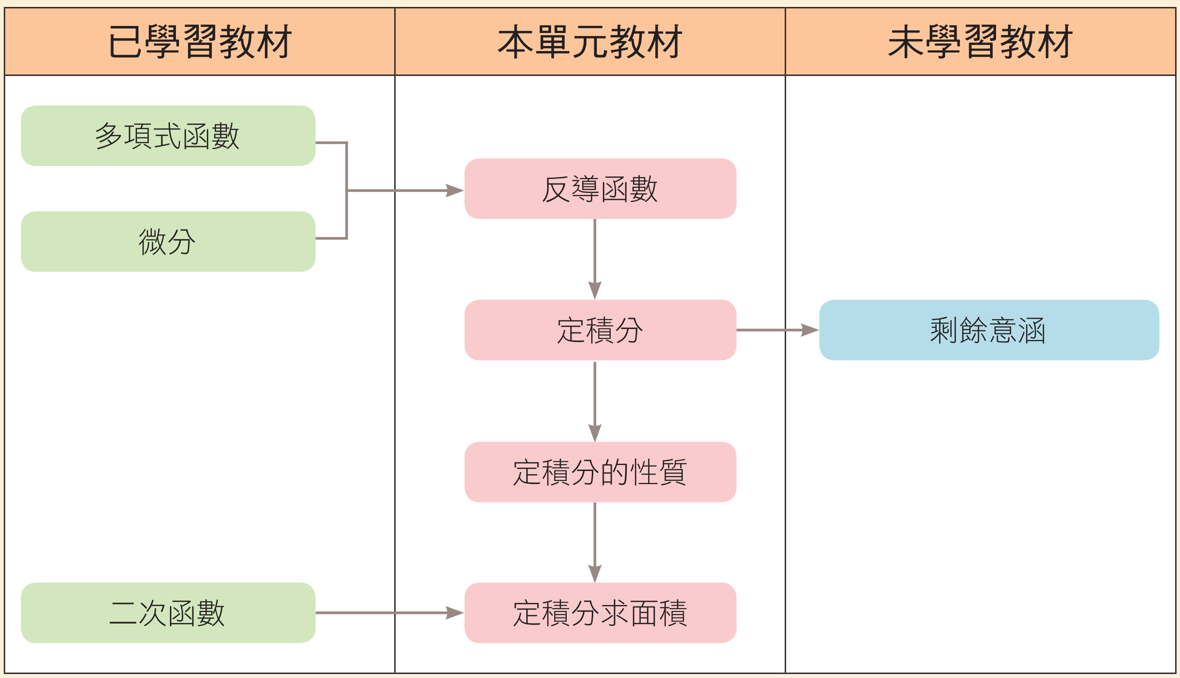
一 教材摘要

首先，定義反導函數及定積分，接著，介紹定積分的運算性質。最後，介紹定積分與面積的關係，並利用定積分計算函數 $f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$, $x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域面積。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 能了解反導函數的定義。 2. 能了解定積分的定義。 3. 能了解定積分與面積的關係。 4. 能理解定積分在總變化量的意涵。 5. 熟練定積分的運算性質。 6. 認識微積分基本定理。 7. 能使用定積分表示面積，並計算其值。	10

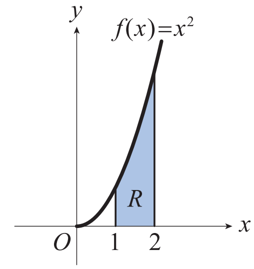
㊂ 教材地位分析



5 積分

要計算一個多邊形的面積，可先在其內部任取一點，接著連接此點與多邊形的每個頂點，將多邊形分割成一些三角形，最後將這些三角形的面積相加，即得此多邊形的面積。然而，圖 1 中鋪色區域的邊界含有曲線，它的面積不能只用上述分割的方法求得，那麼要如何求得呢？

利用定積分計算面積是本單元學習的重點。



▲圖 1

教學要點

❶ 介紹反導函數與定積分的定義、計算定積分的值及定積分的運算性質。

甲 一次、二次函數的反導函數與定積分 ❶

我們學過如何求多項式函數的導函數，現在我們反過來，介紹如何尋找一個函數使其導函數等於給定的多項式函數。

設 $F(x)$ 與 $f(x)$ 是兩個多項式函數。當 $F'(x)=f(x)$ 時，我們稱 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個**反導函數**。例如：因為 $\left(x^2+x+3\right)'=2x+1$，所以

$$x^2+x+3 \text{ 是 } 2x+1 \text{ 的一個反導函數。}$$

有沒有注意到，因為常數的微分是 0，所以與 x^2+x+3 只差一個常數的

$$x^2+x+5 \text{ 也是 } 2x+1 \text{ 的一個反導函數。}$$

也就是說，給定一個多項式函數，其反導函數並不唯一，但這些反導函數只相差一個常數，理由如下：若多項式 $F(x)$ 與 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的反導函數，則

$F'(x)=G'(x)=f(x)$，因此

$$\left(G(x)-F(x)\right)'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0。$$

因為 $G(x)-F(x)$ 為多項式函數，所以 $G(x)-F(x)$ 為常數函數，即

$$G(x)-F(x)=C\text{（}C\text{ 為常數）}。$$

故 $G(x)$ 與 $F(x)$ 只相差一個常數。

反導函數原理

若 $F(x)$ 與 $G(x)$ 都是多項式函數 $f(x)$ 的反導函數，則

$$G(x)=F(x)+C\text{（}C\text{ 為常數）}。$$

先舉一個實例，因為

$$\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x\right)'=4x^2+5x+6，$$

所以 $\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x$ 是 $4x^2+5x+6$ 的一個反導函數。再根據反導函數原理，得 $4x^2+5x+6$ 的反導函數為

$$\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x+C\text{（}C\text{ 為任意常數）}。$$

再觀察 $4x^2+5x+6$ 與 $\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x+C$ 各項係數與次方的對應關係，由此可推得底下的反導函數公式，敘述如下。

反導函數公式

多項式函數

$$a_2x^2+a_1x+a_0$$

的所有反導函數為

$$\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C\text{（}C\text{ 為任意常數）}。$$

教學小提醒

1 這裡我們只介紹二次以下的公式。

129

練習求反導函數。

例題 1

求下列各多項式函數的所有反導函數。

(1) $4x-7$。　　(2) x^2+5x+3。

解

利用反導函數公式，得

(1) 函數 $4x-7$ 的所有反導函數為

$$\frac{4}{2}x^2-7x+C=2x^2-7x+C\ （C\text{ 為任意常數}）。$$

(2) 函數 x^2+5x+3 的所有反導函數為

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C\ （C\text{ 為任意常數}）。$$

隨堂練習

1 求下列各多項式函數的所有反導函數。

(1) $2x+4$。　　(2) $-6x^2+8x-5$。

(1) x^2+4x+C（C 為任意常數）
(2) $-2x^3+4x^2-5x+C$（C 為任意常數）

隨堂練習解答

1 利用反導函數公式，得

(1) 函數 $2x+4$ 的所有反導函數為

$\frac{2}{2}x^2+4x+C$

$=x^2+4x+C$

（C 為任意常數）。

(2) 函數 $-6x^2+8x-5$ 的所有反導函數為

$\frac{-6}{3}x^3+\frac{8}{2}x^2-5x+C$

$=-2x^3+4x^2-5x+C$

（C 為任意常數）。

130

再練習反導函數公式。

例題 2

已知 $F(x)$ 為函數 $f(x)=3x^2-2x+1$ 的一個反導函數且 $F(2)=4$，求 $F(x)$。

解

利用反導函數公式，得

$$F(x)=\frac{3}{3}x^3-\frac{2}{2}x^2+x+C=x^3-x^2+x+C\text{（}C\text{ 為常數）。}$$

因為 $F(2)=4$，所以

$$2^3-2^2+2+C=4，$$

解得 $C=-2$。故

$$F(x)=x^3-x^2+x-2。$$

隨堂練習

已知 $F(x)$ 為函數 $f(x)=4x+3$ 的一個反導函數且 $F(1)=2$，求 $F(x)$。

$2x^2+3x-3$

設 $F(x)$ 是多項式函數 $f(x)$ 的一個反導函數。我們以符號 $\int f(x)dx$ 來表示 $f(x)$ 的所有反導函數，即

$$\int f(x)dx=F(x)+C\text{（}C\text{ 為任意常數），}$$

並稱 $\int f(x)dx$ 為 $f(x)$ 的**不定積分**。例如：由例題 1(1)，得

$$\int(4x-7)dx=2x^2-7x+C\text{（}C\text{ 為任意常數）。}$$

另一方面，反導函數 $F(x)$ 從 $x=a$ 到 $x=b$ 的變化量為 $F(b)-F(a)$，我們以符號 $\int_a^b f(x)dx$ 來表示，即

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)，$$

並稱 $\int_a^b f(x)dx$ 為函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的**定積分**，其中 a 與 b 分別稱為該定積分的**下限**與**上限**。

隨堂練習解答

1 利用反導函數公式，得

$F(x)=\frac{4}{2}x^2+3x+C$

$=2x^2+3x+C$

（C 為常數）。

因為 $F(1)=2$，所以

$2\times1^2+3\times1+C=2$，

解得 $C=-3$。

故 $F(x)=2x^2+3x-3$。

131

教學小提醒

1 這裡我們不以黎曼和介紹定積分，而是直接定義定積分的計算式。

隨堂練習解答

1 (1) 設 C 為實數。因為
$F(x)=2x^2+3x+C$
是 $4x+3$ 的一個反導函數，所以
$\int_1^2 (4x+3)dx$
$=F(2)-F(1)$
$=(2\times2^2+3\times2+C)$
$\quad-(2\times1^2+3\times1+C)$
$=9$。

(2) 設 C 為實數。因為
$F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$
是 x^2+x-1 的一個反導函數，所以
$\int_0^6 (x^2+x-1)dx$
$=F(6)-F(0)$
$=(72+18-6+C)$
$\quad-(0+0-0+C)$
$=84$。

1

定積分

當 $F(x)$ 是多項式函數 $f(x)$ 的一個反導函數時，$F(x)$ 從 $x=a$ 到 $x=b$ 的變化量 $F(b)-F(a)$ 稱為 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定積分，以符號 $\int_a^b f(x)dx$ 表示，即

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)。$$

練習求定積分。

例題 3

求下列各式的值。

(1) $\int_1^3 (2x+1)dx$。　　(2) $\int_2^4 (3x^2-2x)dx$。

解

(1) 設 C 為實數。因為 $F(x)=x^2+x+C$ 是 $2x+1$ 的一個反導函數，所以

$$\begin{aligned}\int_1^3 (2x+1)dx&=F(3)-F(1)\\&=(3^2+3+C)-(1^2+1+C)\\&=10。\end{aligned}$$

(2) 設 C 為實數。因為 $F(x)=x^3-x^2+C$ 是 $3x^2-2x$ 的一個反導函數，所以

$$\begin{aligned}\int_2^4 (3x^2-2x)dx&=F(4)-F(2)\\&=(4^3-4^2+C)-(2^3-2^2+C)\\&=44。\end{aligned}$$

隨堂練習

1 求下列各式的值。

(1) $\int_1^2 (4x+3)dx$。　　(2) $\int_0^6 (x^2+x-1)dx$。

(1) 9　(2) 84

在例題 3 求定積分的計算過程中，可以看出：**反導函數 $F(x)$ 的常數項 C 最終都會被消掉。因此，之後這類的計算，我們都取 $C=0$。**並且為了方便起見，在計算過程中，經常將 $F(b)-F(a)$ 以符號 $F(x)\Big|_a^b$ 表示，即

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)。$$

教學小提醒

1 從此例題起，計算定積分時都將反導函數的常數項 C 省略不寫。

例題 4

求 $\int_1^2 (6x^2+5)dx$ 的值。

解

因為 $2x^3+5x$ 是 $6x^2+5$ 的一個反導函數，所以

$$\begin{aligned}\int_1^2 (6x^2+5)dx&=(2x^3+5x)\Big|_1^2\\&=(2\times 2^3+5\times 2)-(2\times 1^3+5\times 1)\\&=19。\end{aligned}$$

補充例題

1 求 $\int_{-10}^{10}(99x+7)dx$ 的值。

解：原式

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{99}{2}x^2+7x\right)\Big|_{-10}^{10}\\&=\left(\frac{99}{2}\times 10^2+7\times 10\right)-\left(\frac{99}{2}\times(-10)^2+7\times(-10)\right)\\&=140。\end{aligned}$$

隨堂練習

求 $\int_0^3 (x^2+2x+3)dx$ 的值。

27

隨堂練習解答

1 因為 $\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$ 是 x^2+2x+3 的一個反導函數，所以

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^2+2x+3)dx&=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right)\Big|_0^3=(9+9+9)-(0+0+0)\\&=27。\end{aligned}$$

做一道求未知係數的定積分例題。

例題 5

已知$\int_{-1}^{2}\left(3x^2+2x+a\right)dx=9$，求實數 a 的值。

解

因為

$$\int_{-1}^{2}\left(3x^2+2x+a\right)dx=\left(x^3+x^2+ax\right)\Big|_{-1}^{2}$$
$$=\left(2^3+2^2+2a\right)-\left((-1)^3+(-1)^2-a\right)$$
$$=3a+12，$$

所以

$$3a+12=9。$$

解得 $a=-1$。

隨堂練習

已知$\int_{2}^{6}(ax+4)dx=8$，求實數 a 的值。

$-\frac{1}{2}$

接下來，我們介紹定積分的運算性質。

定積分的運算性質

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的多項式函數，則有下列性質。

(1) $\int_{a}^{b}\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx+\int_{a}^{b}g(x)dx$。

(2) $\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{a}^{b}f(x)dx$，其中 k 為常數。

(3) $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$，其中 $a<c<b$。

隨堂練習解答

1 因為

$\int_{2}^{6}(ax+4)dx$

$=\left(\frac{a}{2}x^2+4x\right)\Big|_{2}^{6}$

$=(18a+24)-(2a+8)$

$=16a+16$，

所以 $16a+16=8$。

解得 $a=-\frac{1}{2}$。

教學小提醒

1 性質 (1) 與 (2) 可以合併如下：

$\int_{a}^{b}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$

$=\alpha\int_{a}^{b}f(x)dx$

$+\beta\int_{a}^{b}g(x)dx$。

補充例題

1 已知函數 $f(x)=2x+b$ 滿足$\int_{0}^{1}xf(x)dx=0$，求 b 的值。

解：因為$\int_{0}^{1}xf(x)dx=\int_{0}^{1}\left(2x^2+bx\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}+\frac{b}{2}$，

所以$\frac{2}{3}+\frac{b}{2}=0$，解得 $b=-\frac{4}{3}$。

證明性質 (1)：設 $F(x)$ 與 $G(x)$ 分別為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的反導函數。因為

$$\left(F(x)+G(x)\right)'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)，$$

所以 $F(x)+G(x)$ 是 $f(x)+g(x)$ 的一個反導函數。因此，

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx &= \left(F(x)+G(x)\right)\Big|_a^b \\ &= \left(F(b)+G(b)\right)-\left(F(a)+G(a)\right) \\ &= \left(F(b)-F(a)\right)+\left(G(b)-G(a)\right) \\ &= \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx。\end{aligned}$$

至於性質 (2) 與 (3) 可以仿照上述的方法證得。

例題 6

已知函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^3 f(x)dx=2$ 且 $\int_3^5 f(x)dx=6$，求下列各式的值。

(1) $\int_1^5 f(x)dx$。　(2) $\int_1^5 4f(x)dx$。　(3) $\int_1^5 \left(5f(x)-2x\right)dx$。

解

根據定積分的運算性質，得下列各值。

(1) $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx=2+6=8$。

(2) $\int_1^5 4f(x)dx=4\int_1^5 f(x)dx=4\times 8=32$。

(3) $$\begin{aligned}\int_1^5 \left(5f(x)-2x\right)dx &= \int_1^5 5f(x)dx-\int_1^5 2xdx \\ &= 5\int_1^5 f(x)dx-\left(x^2\right)\Big|_1^5 \\ &= 5\times 8-\left(5^2-1^2\right)=16。\end{aligned}$$

隨堂練習

1 已知函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^4 f(x)dx=8$ 且 $\int_3^4 f(x)dx=5$，求下列各式的值。

(1) 3　(2) 6　(3) 22

(1) $\int_1^3 f(x)dx$。　(2) $\int_1^3 2f(x)dx$。　(3) $\int_1^3 \left(4f(x)+5\right)dx$。

隨堂練習解答

1 根據定積分的運算性質，得下列各值。

(1) $$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)dx &= \int_1^4 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx \\ &= 8-5=3。\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_1^3 2f(x)dx &= 2\int_1^3 f(x)dx \\ &= 2\times 3=6。\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_1^3 \left(4f(x)+5\right)dx &= \int_1^3 4f(x)dx+\int_1^3 5dx \\ &= 4\int_1^3 f(x)dx+(5x)\Big|_1^3 \\ &= 4\times 3+(15-5)=22。\end{aligned}$$

教學要點

❶介紹定積分與面積的關係，並利用定積分計算面積。

教學小提醒

❶這裡我們以驗證的方式介紹此性質，不作嚴謹的證明。

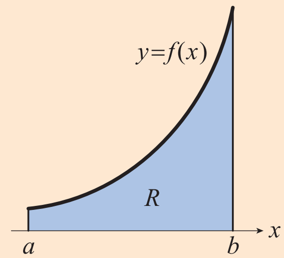
乙 定積分與面積

❶ 有了定積分的定義後，我們可以用它來表示函數圖形下的面積，進而求得面積。將結果敘述如下。

定積分與函數圖形下的面積

❶ 設多項函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上滿足 $f(x)\geq 0$。令 R 為 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域，如圖所示，則區域 R 的面積為

$$\int_a^b f(x)dx。$$



這結果的證明不在本書的範圍，故省略。我們舉底下三個函數來驗證：

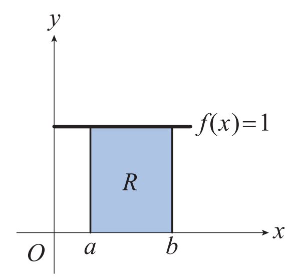
(1) 常數函數 $f(x)=1$：在圖 2 中，區域 R 為底是 $b-a$，高是 1 的矩形。利用矩形的面積公式，得 R 的面積為

$$(b-a)\times 1=b-a。$$

又定積分

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b 1dx=(x)\Big|_a^b=b-a。$$

符合 R 的面積等於 $\int_a^b f(x)dx$。



▲圖 2

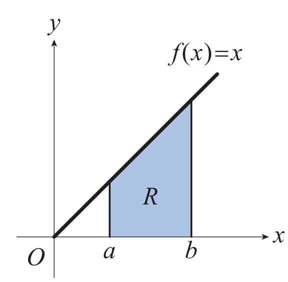
(2) 一次函數 $f(x)=x$：在圖 3 中，區域 R 為上底是 $f(a)$，下底是 $f(b)$，高是 $b-a$ 的梯形。利用梯形的面積公式，得 R 的面積為

$$\frac{\big(f(a)+f(b)\big)(b-a)}{2}=\frac{(a+b)(b-a)}{2}=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}。$$

又定積分

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx=\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_a^b=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}。$$

符合 R 的面積等於 $\int_a^b f(x)dx$。



▲圖 3

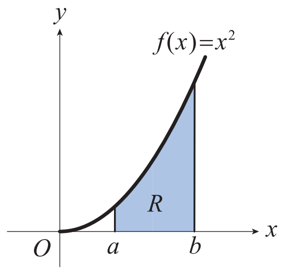
(3) 二次函數 $f(x)=x^2$：在圖 4 中，利用夾擠定理（計算過程請見附錄），可求得區域 R 的面積為

$$\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}。$$

又定積分

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_a^b=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}。$$

符合 R 的面積等於 $\int_a^b f(x)dx$。



▲圖 4

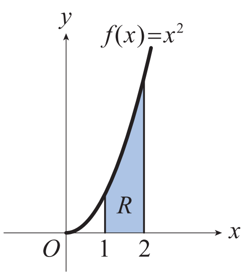
例題 7

已知 R 為函數 $f(x)=x^2$ 的圖形與 x 軸、$x=1$ 及 $x=2$ 所圍成的區域，求 R 的面積。

解

由定積分與函數圖形下的面積，得

$$\begin{aligned} R\text{ 的面積 } &=\int_1^2 x^2dx \\ &=\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 \\ &=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}。\end{aligned}$$



隨堂練習

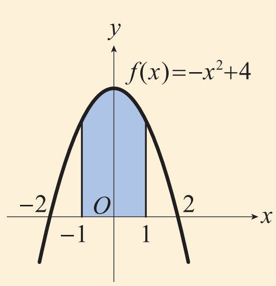
已知 R 為函數 $f(x)=-x^2+4$ 的圖形與 x 軸、$x=-1$ 及 $x=1$ 所圍成的區域，求 R 的面積。

❶ $\frac{22}{3}$

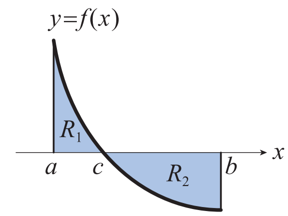
隨堂練習解答

❶ 由定積分與函數圖形下的面積，得

$$\begin{aligned} R\text{ 的面積 } &=\int_{-1}^{1}(-x^2+4)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &=\frac{11}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)=\frac{22}{3}。\end{aligned}$$



在圖 5 中，鋪色區域為 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域，其中在區間 $[a,c]$ 上 $f(x)\ge 0$，在區間 $[c,b]$ 上 $f(x)\le 0$。



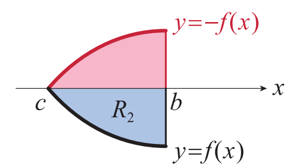
▲圖 5

由圖 5 得知，鋪色區域被分成 R_1 與 R_2 兩個小區域。底下我們來討論如何用定積分表示區域 R_1, R_2 與鋪色區域的面積。

(1) R_1 的面積：由定積分與函數圖形下的面積，得

$$R_1 \text{ 的面積 } = \int_a^c f(x)dx\text{。}$$

(2) R_2 的面積：因為 $y=f(x)$ 的圖形與 $y=-f(x)$ 的圖形對稱於 x 軸，所以 R_2 的面積等於 $y=-f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=c$ 及 $x=b$ 所圍成的區域面積，如圖 6 所示。又因為在區間 $[c,b]$ 上 $-f(x)\ge 0$，所以



▲圖 6

$$R_2 \text{ 的面積 } = \int_c^b \big(-f(x)\big)dx = -\int_c^b f(x)dx\text{。}$$

綜合 (1) 與 (2)，得

$$\text{鋪色區域的面積 } = (R_1 \text{ 的面積}) + (R_2 \text{ 的面積}) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\text{。}$$

現在舉實例利用定積分來計算面積。

例題 8

求下列各函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=3$ 所圍成區域的面積。

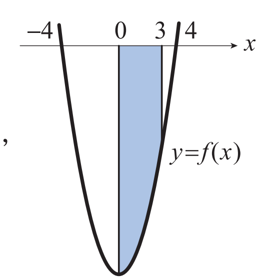
(1) $f(x)=x^2-16$。　　(2) $f(x)=-x^2+x+2$。

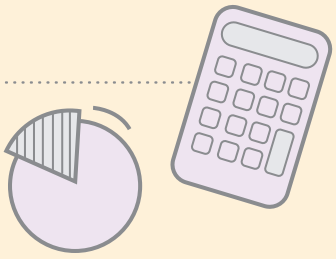
解

(1) 因為

$$f(x)=x^2-16=(x-4)(x+4)\text{，}$$

所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-4,0)$, $(4,0)$ 兩點，如圖所示。又因為在區間 $[0,3]$ 上 $f(x)\le 0$，所以



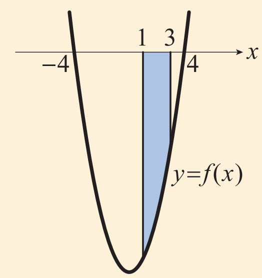


隨堂練習解答

1 (1) 因為

$$f(x)=x^2-16=(x-4)(x+4)，$$

所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-4, 0), (4, 0)$ 兩點，如圖所示。



又因為在區間 $[1, 3]$ 上 $f(x)\le 0$，所以

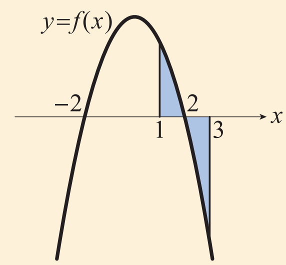
$$\text{所求面積} = -\int_1^3 \left(x^2-16\right)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3-16x\right)\Big|_1^3$$

$$= -\left(-39-\left(-\frac{47}{3}\right)\right)=\frac{70}{3}。$$

(2) 因為

$$f(x)=-x^2+4=-(x+2)(x-2)，$$

所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-2, 0), (2, 0)$ 兩點，如圖所示。



又因為在區間 $[1, 2]$ 上 $f(x)\ge 0$；在區間 $[2, 3]$ 上 $f(x)\le 0$，所以

$$\text{所求面積} = \int_1^2 \left(-x^2+4\right)dx-\int_2^3 \left(-x^2+4\right)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_1^2 -\left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_2^3$$

$$=\left(\frac{16}{3}-\frac{11}{3}\right)-\left(3-\frac{16}{3}\right)$$

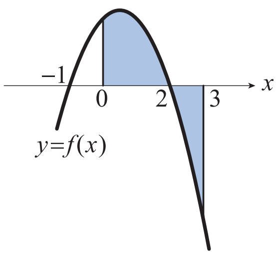
$$=4。$$

$$所求面積 = -\int_0^3 \left(x^2-16\right)dx$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3-16x\right)\Big|_0^3$$

$$= -\left((-39)-0\right) = 39。$$

(2) 因為



$$f(x) = -x^2+x+2 = -(x+1)(x-2),$$

所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$, $(2,0)$ 兩點，如圖所示。又因為在區間 $[0,2]$ 上 $f(x)\geq 0$；在區間 $[2,3]$ 上 $f(x)\leq 0$，所以

$$所求面積 = \int_0^2 \left(-x^2+x+2\right)dx-\int_2^3 \left(-x^2+x+2\right)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2-\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_2^3$$

$$= \left(\frac{10}{3}-0\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{31}{6}。$$

隨堂練習

求下列各函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=1$ 及 $x=3$ 所圍成區域的面積。

(1) $f(x)=x^2-16$。 (2) $f(x)=-x^2+4$。

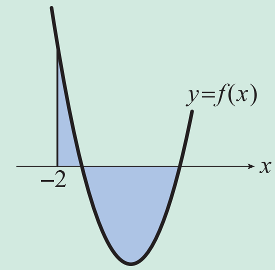
(1) $\frac{70}{3}$ (2)4

❶

再練習利用定積分計算面積。

例題 9

右圖的鋪色區域是函數 $f(x)=x^2-2x-3$ 的圖形與 x 軸、$x=-2$ 所圍成的區域，求鋪色區域的面積。

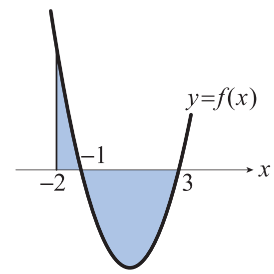


解

因為

$$f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)，$$

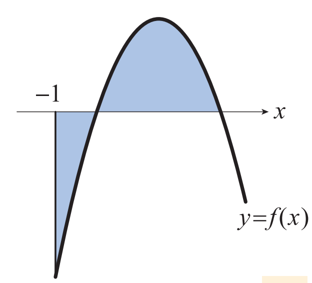
所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(-1,0),(3,0)$ 兩點，如圖所示。又因為在區間 $[-2,-1]$ 上 $f(x)\geq 0$；在區間 $[-1,3]$ 上 $f(x)\leq 0$，所以



$$\begin{aligned}
\text{所求面積} &= \int_{-2}^{-1}\left(x^2-2x-3\right)dx-\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx\\
&=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}-\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}\\
&=\left(\frac{5}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)-\left((-9)-\frac{5}{3}\right)\\
&=13。
\end{aligned}$$

隨堂練習

1 右圖的鋪色區域是函數 $f(x)=-x^2+3x$ 的圖形與 x 軸、$x=-1$ 所圍成的區域，求鋪色區域的面積。



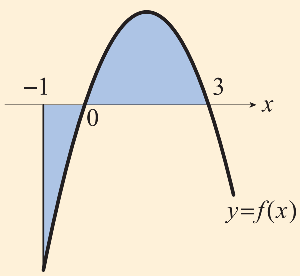
$\frac{19}{3}$

隨堂練習解答

1 因為

$$\begin{aligned}
f(x)&=-x^2+3x\\
&=-x(x-3)，
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(0,0),(3,0)$ 兩點，如圖所示。



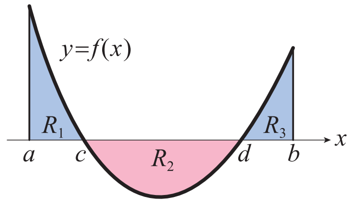
又因為在區間 $[-1,0]$ 上 $f(x)\leq 0$；在區間 $[0,3]$ 上 $f(x)\geq 0$，

所以

所求面積

$$\begin{aligned}
&=-\int_{-1}^{0}\left(-x^2+3x\right)dx\\
&\quad+\int_{0}^{3}\left(-x^2+3x\right)dx\\
&=-\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\\
&\quad+\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{0}^{3}\\
&=-\left(0-\frac{11}{6}\right)+\left(\frac{9}{2}-0\right)\\
&=\frac{19}{3}。
\end{aligned}$$

在此之前我們是將面積用定積分來表示，現在我們反過來，將定積分用面積來表示，說明如下：在圖 7 中，R_1, R_2 與 R_3 是函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的三個區域，其中 R_1 與 R_3 在 x 軸的上方，R_2 在 x 軸的下方。



▲圖 7

由定積分的運算性質，得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \\ &= (R_1 \text{ 的面積}) - (R_2 \text{ 的面積}) + (R_3 \text{ 的面積}) \\ &= \big((R_1 \text{ 的面積}) + (R_3 \text{ 的面積})\big) - (R_2 \text{ 的面積})。\end{aligned}$$

一般而言，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 等於 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域中，

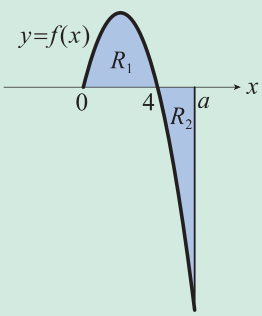
$$(x \text{ 軸上方的面積和}) - (x \text{ 軸下方的面積和})。$$

141

利用上述的結論，做一道例題。

例題 10

如圖，R_1 與 R_2 是函數 $f(x)=-x^2+4x$ 的圖形與 x 軸、$x=a$（其中 $a>4$）所圍成的兩個區域。已知 R_1 的面積與 R_2 的面積相等，求 a 的值。



解

因為 R_1 的面積與 R_2 的面積相等，所以

$$\int_0^a f(x)dx=(R_1\text{ 的面積})-(R_2\text{ 的面積})=0。$$

又因為

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a\left(-x^2+4x\right)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right)\Bigg|_0^a=-\frac{1}{3}a^3+2a^2，$$

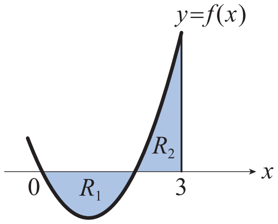
所以

$$-\frac{1}{3}a^3+2a^2=0，$$

即 $-\frac{1}{3}a^2(a-6)=0$，解得 $a=6$ 或 0（不合）。

1 **隨堂練習**

如圖，R_1 與 R_2 是函數 $f(x)=x^2-ax$ 的圖形與 x 軸、$x=3$ 所圍成的兩個區域。已知 R_1 的面積與 R_2 的面積相等，求 a 的值。



2

142

隨堂練習解答

1 因為 R_1 的面積與 R_2 的面積相等，所以

$$\int_0^3 f(x)dx = (R_2\text{ 的面積}) - (R_1\text{ 的面積}) = 0。$$

又因為

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(x^2 - ax\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_0^3 = 9 - \frac{9a}{2}，$$

所以

$$9 - \frac{9a}{2} = 0，$$

解得 $a = 2$。

補充例題

1 求$\int_{-5}^{5}(x+|x|)dx$ 的值。

解：根據定積分的運算性質，得

$$\int_{-5}^{5}(x+|x|)dx=\int_{-5}^{0}(x+|x|)dx+\int_{0}^{5}(x+|x|)dx$$

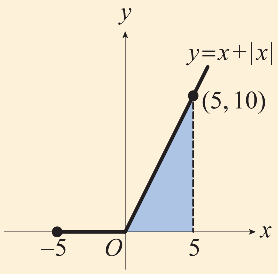
$$=\int_{-5}^{0}0dx+\int_{0}^{5}2xdx$$

$$=(C)\Big|_{-5}^{0}+(x^2)\Big|_{0}^{5}=25\text{。}$$

或由 $y=x+|x|=\begin{cases}2x\text{，若 }x\geq 0\\ 0\text{，若 }x<0\end{cases}$ 的圖形（如右圖）及

定積分與面積的關係得知，此定積分等於一個直角三角形的面積，即

$$\int_{-5}^{5}(x+|x|)dx=\frac{5\times 10}{2}=25\text{。}$$



2 求$\int_{-2}^{4}|x|dx$ 的值。

解：利用定積分的運算性質，得

$$\int_{-2}^{4}|x|dx=\int_{-2}^{0}|x|dx+\int_{0}^{4}|x|dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{4}xdx$$

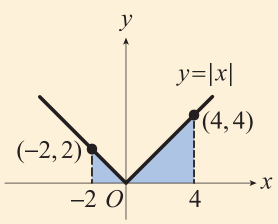
$$=\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{4}$$

$$=2+8=10\text{。}$$

或由 $y=|x|$ 的圖形（如右圖）及定積分與面積的關係得知，

此定積分等於二個直角三角形的面積之和，即

$$\int_{-2}^{4}|x|dx=\frac{2\times 2}{2}+\frac{4\times 4}{2}=10\text{。}$$



隨堂練習解答

1 為了去掉絕對值符號，在定積分的範圍 $[-1, 2]$ 內分段討論 $|x|$ 的值：

當 $-1\leq x\leq 0$ 時，$|x|=-x$；

當 $0\leq x\leq 2$ 時，$|x|=x$。

利用定積分的運算性質，得

$$\int_{-1}^{2}|x|dx=\int_{-1}^{0}|x|dx+\int_{0}^{2}|x|dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{2}xdx$$

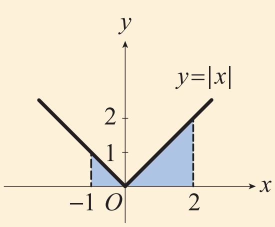
$$=\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{2}=\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)+(2-0)$$

$$=\frac{5}{2}\text{。}$$

或由 $y=|x|$ 的圖形（如右圖）及定積分與面積的關係得知，

此定積分等於兩個直角三角形面積的和，即

$$\int_{-1}^{2}|x|dx=\frac{1\times 1}{2}+\frac{2\times 2}{2}=\frac{5}{2}\text{。}$$



利用定積分的運算性質，可以求含有絕對值的函數之定積分，舉例如下。

例題 11

已知 $f(x)=|x-1|+|x-3|$，求 $\int_0^5 f(x)dx$ 的值。

解

為了去掉絕對值符號，在定積分的範圍 $[0,5]$ 內分段討論 $f(x)$ 的值：

當 $0\le x<1$ 時，$f(x)=-(x-1)-(x-3)=-2x+4$；

當 $1\le x<3$ 時，$f(x)=(x-1)-(x-3)=2$；

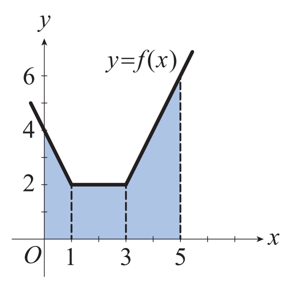
當 $3\le x\le 5$ 時，$f(x)=(x-1)+(x-3)=2x-4$。

利用定積分的運算性質，得

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^5 f(x)dx\\ &= \int_0^1(-2x+4)dx+\int_1^3 2dx+\int_3^5(2x-4)dx\\ &= \left(-x^2+4x\right)\Big|_0^1+2x\Big|_1^3+\left(x^2-4x\right)\Big|_3^5\\ &= (3-0)+(6-2)+\big(5-(-3)\big)\\ &= 15\text{。}\end{aligned}$$

或由 $f(x)$ 的圖形（如右圖）及定積分與面積的關係得知，此定積分等於兩個梯形與一個正方形的面積之和，即

$$\int_0^5 f(x)dx=\frac{(2+4)\times 1}{2}+2^2+\frac{(2+6)\times 2}{2}=15\text{。}$$



隨堂練習

求 $\int_{-1}^2 |x|dx$ 的值。

$\frac{5}{2}$

143

至此，我們應該可以了解定積分是計算面積的一個好工具。事實上，本單元對於定積分的定義是源自於**微積分基本定理**，將此定理敘述如下。

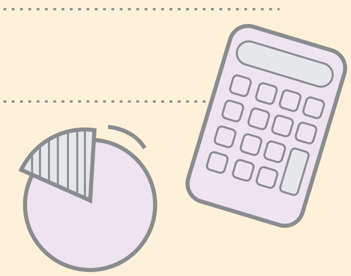
微積分基本定理

設 $f(x)$ 為 $[a,b]$ 上的連續函數。若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)。$$

這個定理是牛頓與萊布尼茲的偉大貢獻。它不但為定積分找到了普遍性的簡易算法，也讓微分與積分這兩個看似不相干的概念連結起來，呈現微分與積分是兩個互逆的運算，就像加法與減法，乘法與除法的關係。

144



習題解答

觀念澄清

由定積分與面積的關係，得

(1) ×：$\int_1^2 f(x)dx=-(R_1\text{ 的面積})=-3$。

(2) ○：$\int_2^4 f(x)dx=R_2\text{ 的面積}=5$。

(3) ×：$\int_1^4 f(x)dx=(R_2\text{ 的面積})-(R_1\text{ 的面積})=5-3=2$。

一、基礎題

1. 利用反導函數公式，得

(1) 函數 $3x^2-2x-1$ 的所有反導函數為

$$\frac{3}{3}x^3-\frac{2}{2}x^2-x+C=x^3-x^2-x+C\text{（}C\text{ 為任意常數）。}$$

(2) 函數 $(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2$ 的所有反導函數為

$$\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C\text{（}C\text{ 為任意常數）。}$$

2. 利用反導函數公式，得

$$F(x)=\frac{6}{2}x^2-x+C=3x^2-x+C\text{（}C\text{ 為常數）。}$$

因為 $F(3)=20$，所以

$$3\times3^2-3+C=20，$$

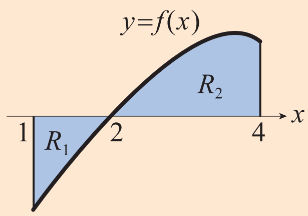
解得 $C=-4$。

故 $F(x)=3x^2-x-4$。

5 習題

觀念澄清

如圖，R_1 與 R_2 是函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸，$x=1$ 及 $x=4$ 所圍成的二個區域。已知 R_1 的面積為 3，R_2 的面積為 5，下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。



□ (1) $\int_1^2 f(x)dx=3$。

□ (2) $\int_2^4 f(x)dx=5$。

□ (3) $\int_1^4 f(x)dx=8$。

(1)×　(2)○　(3)×

一、基礎題

1 求下列各多項式函數的所有反導函數。

(1) $3x^2-2x-1$。　　(2) $(2x-1)(x+2)$。

(1) x^3-x^2-x+C（C 為任意常數）

(2) $\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$（$C$ 為任意常數）

2 已知 $F(x)$ 為函數 $f(x)=6x-1$ 的一個反導函數且 $F(3)=20$，求 $F(x)$。

$3x^2-x-4$

3 求下列各式的值。

(1) $\int_{2}^{7} 5\ dx$。　(2) $\int_{4}^{8} (3x+1)dx$。　(3) $\int_{1}^{3} \left(3x^2+2x-1\right)dx$。

(1) 25　(2) 76　(3) 32

4 已知$\int_{1}^{3} (2x+b)dx = 14$且$\int_{2}^{6} (ax+b)dx = 8$，求實數 a, b 的值。

$a=-\frac{1}{4}$, $b=3$

5 已知函數 $f(x)$ 滿足$\int_{1}^{2} f(x)dx = 3$且$\int_{1}^{6} f(x)dx = 7$，求下列各式的值。

(1) $\int_{2}^{6} f(x)dx$。　(2) $\int_{2}^{6} \left(3f(x)+x\right)dx$。

(1) 4　(2) 28

3. (1) $\int_{2}^{7} 5dx = (5x)\Big|_{2}^{7} = 35-10=25$。

(2) $\int_{4}^{8} (3x+1)dx = \left(\frac{3}{2}x^2+x\right)\Big|_{4}^{8} = 104-28=76$。

(3) $\int_{1}^{3} (3x^2+2x-1)dx = (x^3+x^2-x)\Big|_{1}^{3} = 33-1=32$。

4. 因為

$$\int_{1}^{3} (2x+b)dx = (x^2+bx)\Big|_{1}^{3} = (9+3b)-(1+b)=8+2b，$$

所以 $8+2b=14$，解得 $b=3$。

又因為

$$\int_{2}^{6} (ax+b)dx = \left(\frac{a}{2}x^2+bx\right)\Big|_{2}^{6} = (18a+6b)-(2a+2b)=16a+4b，$$

所以 $16a+4b=8$，即 $16a+12=8$，解得 $a=-\frac{1}{4}$。

故 $a=-\frac{1}{4}$, $b=3$。

5. 根據定積分的運算性質，得下列各值。

(1) $\int_{2}^{6} f(x)dx = \int_{1}^{6} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx = 7-3=4$。

(2) $\int_{2}^{6} (3f(x)+x)dx = \int_{2}^{6} 3f(x)dx + \int_{2}^{6} xdx$

$= 3\int_{2}^{6} f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{2}^{6}$

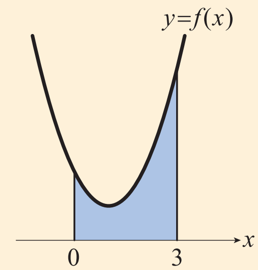
$= 3\times 4+(18-2)=28$。

6. 由定積分與函數圖形下的面積，得

所求面積 $= \int_0^3 \left(x^2-2x+2\right)dx$

$= \left(\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right)\Big|_0^3$

$= 6$。



7. 因為

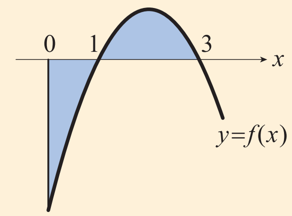
$$f(x) = -x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)，$$

所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(1,0)$, $(3,0)$ 兩點，
如圖所示。又因為在區間 $[0,1]$ 上 $f(x) \le 0$；
在區間 $[1,3]$ 上 $f(x) \ge 0$，所以

所求面積 $= -\int_0^1 \left(-x^2+4x-3\right)dx + \int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right)dx$

$= -\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right)\Big|_1^3$

$= -\left(\left(-\frac{4}{3}\right)-0\right)+\left(0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{8}{3}$。



二、進階題

8. $\int_0^1 (x+1)^2dx = \int_0^1 \left(x^2+2x+1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{3}$。

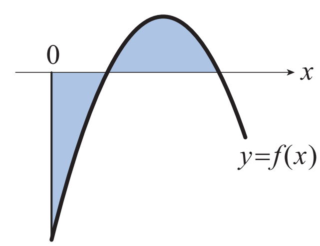
9. 因為

$$\int_a^5 (2x-1)dx = \left(x^2-x\right)\Big|_a^5 = \left(5^2-5\right)-\left(a^2-a\right) = -a^2+a+20，$$

所以 $-a^2+a+20=18$，即 $a^2-a-2=0$。
解得 $a=2$ 或 -1。

6 求函數 $f(x)=x^2-2x+2$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=3$ 所圍成區域的面積。 6

7 右圖的鋪色區域是函數 $f(x)=-x^2+4x-3$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 所圍成的區域，求鋪色區域的面積。 $\frac{8}{3}$

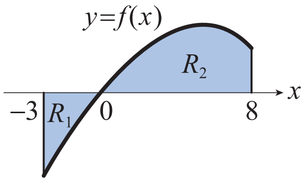


二、進階題

8 求 $\int_0^1 (x+1)^2 dx$ 的值。 $\frac{7}{3}$

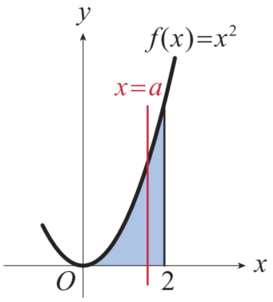
9 已知 $\int_a^5 (2x-1)dx=18$，求 a 的值。 2 或 -1

10 右圖的鋪色區域是函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=-3$ 與 $x=8$ 所圍成的區域。已知 R_2 的面積是 R_1 面積的 3 倍，且 $\int_{-3}^{8} f(x)dx=6$，求 $\int_{-3}^{0} f(x)dx$ 的值。



-3

11 右圖的鋪色區域是函數 $f(x)=x^2$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=2$ 所圍成的區域。已知鉛直線 $x=a$ 將此區域的面積二等分，求 a 的值。



$\sqrt[3]{4}$

12 已知生產某商品 x 件的邊際利潤函數為 $P'(x)=20-\frac{x}{4}$（千元／件），回答下列問題。

(1) 當生產多少件時，利潤達到最大？

(2) 當利潤達到最大時，再生產 20 件，利潤的增減情形為何？

(1) 80 件
(2) 利潤減少 50 千元

10. 令 R_1 的面積為 k，則 R_2 的面積為 $3k$。

由定積分與面積的關係，得

$$\int_{-3}^{8} f(x)dx = 3k - k = 6，$$

即 $2k = 6$，解得 $k = 3$。

$$故\int_{-3}^{0} f(x)dx = -k = -3。$$

11. 計算定積分

$$\int_0^2 x^2dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}且\int_0^a x^2dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3。$$

依題意，得 $\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3}$，即 $a^3 = 4$。

解得 $a = \sqrt[3]{4}$。

12. (1) 二階導函數 $P''(x) = -\frac{1}{4}$。

解 $P'(x) = 20 - \frac{x}{4} = 0$，得 $x = 80$。

因為 $P'(80) = 0$ 且 $P''(80) = -\frac{1}{4} < 0$，所以 $P(80)$ 為最（極）大值。

故當生產 80 件時，利潤達到最大。

(2) 從生產 80 件增加到 100 件，利潤函數 $P(x)$ 的變化量為

$$P(100) - P(80) = \int_{80}^{100} P'(x)dx = \int_{80}^{100} \left(20 - \frac{x}{4}\right)dx = \left(20x - \frac{x^2}{8}\right)\Big|_{80}^{100} = -50。$$

故利潤減少 50 千元。

13. (1) 因為 $f(0.3)=\frac{14}{15}\times\frac{9}{100}+\frac{1}{15}\times\frac{3}{10}=\frac{13}{125}=0.104$，所以所求為 10.4%。

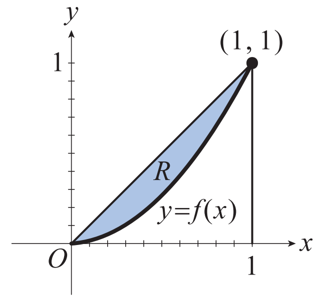
(2) 因為直角三角形的面積為 $\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$，所以由定積分與面積的關係，得

$$\begin{aligned} R\text{ 的面積 } &= \frac{1}{2}-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^1\left(\frac{14}{15}x^2+\frac{1}{15}x\right)dx \\ &= \frac{1}{2}-\left(\frac{14}{45}x^3+\frac{1}{30}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\left(\frac{14}{45}+\frac{1}{30}\right)=\frac{7}{45}\text{。} \end{aligned}$$

(3) 吉尼係數 $=2\times(R$ 的面積 $)=2\times\frac{7}{45}=\frac{14}{45}$。

13 設函數 $f(x)$ 是定義在 $[0, 1]$ 上的遞增連續函數，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$。經濟學家將這類函數的圖形統稱為羅倫茲曲線，並常使用它們來測度「所得分配不均」的程度。例如 $f(0.2)=0.15$ 表示 20％最低所得者的總所得占全部總所得的 15％。

除此之外，與羅倫茲曲線相關的吉尼係數（Gini coefficient）也可以用來測度所得分配不均程度，其定義如下：



$$\text{吉尼係數}=2\times(R\text{ 的面積})，$$

其中 R 代表右圖中被羅倫茲曲線 $y=f(x)$ 割出的鋪色區域。吉尼係數愈大表示所得分配愈不平均；反之，係數愈小則分配愈平均。

已知某一國家的所得分配符合羅倫茲曲線 $y=\frac{14}{15}x^2+\frac{1}{15}x$，回答下列問題。

(1) 使用羅倫茲曲線，求這國家 30％最低所得者的總所得占全部總所得的百分比。

(2) 求鋪色區域 R 的面積。

(3) 求此國家的吉尼係數。

(1) 10.4％ (2) $\frac{7}{45}$ (3) $\frac{14}{45}$