

2 二項分布

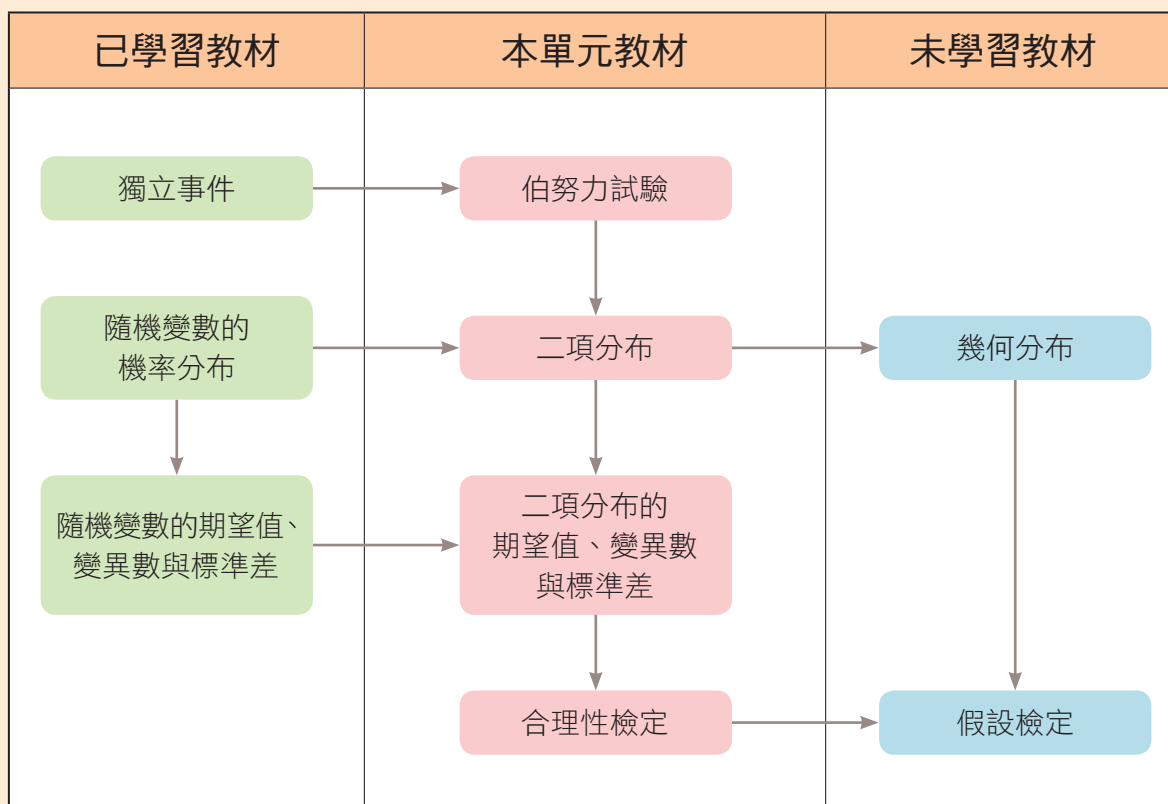
一 教材摘要

根據機率的概念，先討論由伯努力試驗所定義出的隨機變數，並導出其機率分布—二項分布，再介紹二項分布的期望值。最後用例子說明如何使用二項分布來做檢定。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 知道獨立事件、重複試驗與伯努力試驗。 2. 了解二項分布的機率。 3. 了解二項分布的期望值及意義。 4. 了解二項分布的變異數與標準差。	12

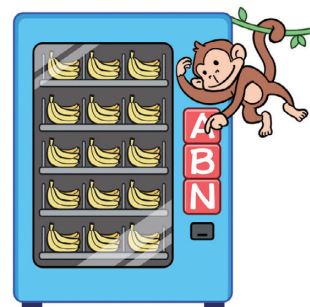
教材地位分析



2 二項分布

有一台貨源充足的香蕉自動販賣機，面板上只有 A、B、N 三個按鍵。某隻猴子每次隨機地按下其中一個按鍵，每回合可按 6 次。若這 6 次是依照 BANANA 的順序按下，則會掉落一根香蕉。那麼，猴子獲得香蕉的機率是多少呢？牠要成功地獲得第一根香蕉至少要嘗試多少次呢？

這樣的機率分布是本單元要學習的內容之一。



▲圖 1

教學要點

- 1 知道獨立事件、重複試驗與伯努力試驗，並了解二項分布的機率。

教學小提醒

- 1 伯努力試驗中成功的定義是指此情境中聚焦討論的那一個結果，與生活經驗中的成功並不相同。

甲 二項分布

引言中，猴子在每回合結束後，會有兩種結果：獲得香蕉、沒有獲得香蕉，像這樣只有兩種結果的試驗就是我們接下來要介紹的**伯努力試驗**。

(一) 伯努力試驗



雅各布·伯努力

(J. Bernoulli, 1654 ~ 1705)，瑞士數學家，他在機率論中提出伯努力試驗與大數定律。

伯努力試驗是指「只有兩種可能結果」的試驗，通常把這兩種結果分別叫做「成功」與「失敗」。

下面是兩個伯努力試驗的例子。

- (1) 丟一枚硬幣，把丟出正面叫做成功，丟出反面叫做失敗。
- (2) 袋中抽一球，把抽中紅球叫做成功，未抽中紅球叫做失敗。



在伯努力試驗中，如果成功的機率為 p ，那麼失敗的機率為 $1-p$ 。許多的試驗都可以看成是重複多次的伯努力試驗，例如丟一枚硬幣 20 次，擲一粒骰子 50 次。這些重複試驗都具有下列的特徵。

(1) 每次試驗成功與否都互不影響。

(2) 每次試驗成功的機率均相等。

在單選題的作答中，隨意選擇一個答案，答對叫做成功，答錯叫做失敗，就是一種典型的伯努力試驗。

例題 1

有 5 題 4 選 1 的單選題，某生每題皆隨意選擇一個選項作答。已知每題答對與否為獨立事件，求下列各事件的機率。

(1) 恰答對 2 題。

(2) 5 題全答對。

解

每題 4 選 1 的單選題答對（成功）的機率為 $\frac{1}{4}$ ，答錯（失敗）的機率為

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}。$$

(1) 在 5 題中恰答對 2 題的情形與其機率對應如下圖所示（其中 ○ 與 × 分別表示答對與答錯）。

題號	一	二	三	四	五	機率
共 C_2^5 種	○	○	×	×	×	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$
	○	×	○	×	×	$\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$
	×	×	×	○	○	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

1

教學小提醒

1 可視教學情況補充機率相關歷史。

2

2 日常生活中還有許多伯努力試驗的例子，例如小孩性別、支不支持某候選人、……。此處可讓學生分組討論並發表答案。

補充例題

1

1 重複伯努力試驗 4 次，已知至少有一次成功的機率為 $\frac{609}{625}$ ，求每次試驗成功的機率。

解：令隨機變數 X 表示成功的次數， p 為成功的機率。依題意可得，

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (1-p)^4 \\ &= \frac{609}{625}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-p)^4 &= \frac{16}{625} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^4, \end{aligned}$$

$$\text{解得 } p = \frac{3}{5},$$

故成功的機率為 $\frac{3}{5}$ 。

因為 5 題中恰答對 2 題的情形有 C_2^5 種，又每一種情形的機率都是 $\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3$ ，所以 5 題中恰答對 2 題的機率為

$$C_2^5\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{135}{512}。$$

(2) 同理，5 題全答對的機率為

$$C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}。$$

1

隨堂練習

有 6 題是非題，某生每題皆隨意作答。已知每題答對與否皆為獨立事件，求下列各事件的機率。

(1) 恰答對 3 題。

(2) 6 題都沒有答對。

$$(1) \frac{5}{16} \quad (2) \frac{1}{64}$$

在伯努力試驗中，當成功機率 $p = 0$ 時，表示每次的試驗結果都失敗；而當成功機率 $p = 1$ 時，表示每次試驗結果都會成功。這兩種情形的試驗結果十分明確，從機率的角度來說，並不出現變化，因此，接下來介紹的機率分布，本書僅討論 $0 < p < 1$ 的情況。

教學小提醒

1 可先複習獨立事件的定義。

(二) 二項分布

重複操作一個成功機率為 p ($0 < p < 1$) 的伯努力試驗 n 次（每次試驗結果都是獨立的）。設隨機變數 X 表示成功的次數，則「 n 次試驗中恰成功 k 次」（即 $X = k$ ）的機率為

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k},$$

且隨機變數 X 的機率分布表如下。

成功的次數 k	0	1	...	k	...	n
$P(X = k)$	$C_0^n p^0 (1-p)^n$	$C_1^n p^1 (1-p)^{n-1}$	...	$C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$	...	$C_n^n p^n (1-p)^0$

因為 $C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ，恰好是 $(p + (1-p))^n$ 的二項展開式中之各項，所以稱 X 的機率分布為**二項分布**。

26

隨堂練習解答

1 是非題隨意作答，答對的機率為 $\frac{1}{2}$ ，答錯的機率為 $\frac{1}{2}$ 。

$$(1) \text{恰答對 3 題的機率為 } C_3^6\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}。$$

$$(2) \text{6 題都沒有答對的機率為 } C_0^6\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}。$$

二項分布

重複操作一個成功機率為 p ($0 < p < 1$) 的伯努力試驗 n 次（每次試驗結果都是獨立的）。設隨機變數 X 表示成功的次數，則 n 次試驗中恰成功 k 次的機率為

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n,$$

並稱 X 的機率分布為二項分布。

來看一道應用二項分布求機率的例子。

例題 2

袋中有大小相同的紅球 2 顆、白球 1 顆。每次從袋中取出一球，觀察顏色後再放回袋中，共取球 4 次。已知每一次取球都為獨立事件，且每球被取到的機會均等。

- (1) 寫出取到紅球的個數之機率分布表。
- (2) 求至多 1 次取到紅球的機率。

解

- (1) 由題意可知，每次取到紅球（成功）的機率為 $\frac{2}{3}$ ，取到白球（失敗）的機率為 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 。

列出取到紅球的個數之機率分布表如下。

取到紅球的個數	0	1	2	3	4
機率	$C_0^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^4$ $= \frac{1}{81}$	$C_1^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3$ $= \frac{8}{81}$	$C_2^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$ $= \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$	$C_3^4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1$ $= \frac{32}{81}$	$C_4^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0$ $= \frac{16}{81}$

- (2) 由上表可得，至多 1 次取到紅球的機率為

$$\frac{1}{81} + \frac{8}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}。$$

教學小提醒

- 1 日常生活中還有許多二項分布的例子，此處可讓學生分組討論並發表答案。

補充例題

- 1 阿丁平時投籃 3 球中會投進 2 球，今體育老師規定 5 球中至少進 3 球才及格，求阿丁及格的機率。
解：投籃 3 球中會投進 2

球，即進球率為 $\frac{2}{3}$ 。

5 球中進 3 球以上的機率為

$$\begin{aligned} & C_3^5 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_4^5 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) \\ & + C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \\ & = \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} \\ & = \frac{192}{243} = \frac{64}{81}。 \end{aligned}$$

故阿丁及格的機率為

$$\frac{64}{81}。$$

1

隨堂練習

有一粒公正骰子，其中 1 點與 4 點為紅色點，其餘皆為黑色點。擲此骰子 5 次，觀察出現紅色點或黑色點的情形，求下列各事件的機率。

- (1) 恰有 3 次出現紅色點。
 (2) 至少有 4 次出現紅色點。

$$(1) \frac{40}{243} \quad (2) \frac{11}{243}$$

生活中很多的機率分布都是二項分布，來看一道與彈珠檯相關的例子。

例題 3

補充例題

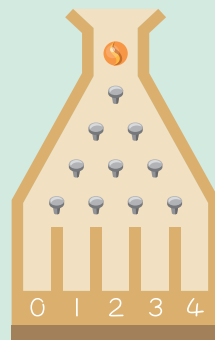
- 1 已知某人射飛鏢時射中靶

面的機率是 $\frac{1}{4}$ ，他連續射了 4 次，求恰好射中靶面 2 次的機率。

解：恰好射中靶面 2 次的機率為

$$C_2^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ = \frac{27}{128}。$$

右圖是一個彈珠檯的示意圖，從上方放入一顆彈珠，假設彈珠每次滑落撞擊到釘柱時，會隨機地向右或向左落下，進而撞擊到下一層的釘柱，總共撞擊 4 次，最後落到下方編號 0 到 4 的格子中。已知彈珠每次撞擊後向右或向左落下的機率相等。



- (1) 求彈珠落到 1 號格子的機率。
 (2) 寫出彈珠落到各格子的機率。
 (3) 試問彈珠落到幾號格子的機率最大？

隨堂練習解答

① 由題意可知，每次擲到紅色點（成功）的機率為 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，擲到黑色點（失敗）的機率為 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 。

(1) 擲此骰子 5 次，恰有 3 次出現紅色點（3 次成功、2 次失敗）之機率為

$$C_3^5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}。$$

(2) 擲此骰子 5 次，至少有 4 次出現紅色點，即

① 有 4 次出現紅色點（4 次成功、1 次失敗）。

② 有 5 次出現紅色點（5 次成功、0 次失敗）。

$$\text{其機率為 } C_4^5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{11}{243}。$$

隨堂練習解答

① 由題意可知，取到紅球（成功）的機率為 $\frac{3}{5}$ ，取到白球（失敗）的機率為 $\frac{2}{5}$ 。

(1) 取到 2 次紅球的機率為 $C_2^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{54}{125}$ 。

(2) 紅球被取到的次數多過白球被取到的次數，即

① 取到 3 次紅球。

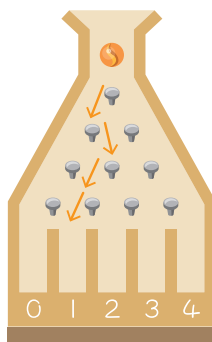
② 取到 2 次紅球 1 次白球。

其機率為 $C_3^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^0 + C_2^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{81}{125}$ 。

解

彈珠每次撞擊釘柱後，向右方落下（成功）的機率為 $\frac{1}{2}$ ，向左方落下（失敗）的機率為 $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。

- (1) 彈珠落入 1 號格子之前，不管路徑為何，總共會撞擊釘柱 4 次，且其中只有 1 次撞擊後向右，而其餘 3 次撞擊後向左，如右圖即為其中一種可能的路徑。因此，彈珠落到 1 號格子的機率為



$$C_1^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}。$$

- (2) 彈珠落入 k 號格子之前，不管路徑為何，總共會撞擊釘柱 4 次，且其中恰有 k 次撞擊後向右，而其餘 $4-k$ 次撞擊後向左。因此，彈珠落到 k 號格子的機率為

$$C_k^4 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \frac{C_k^4}{16}, k = 0, 1, 2, 3, 4。$$

列出彈珠落到各格子的機率分布表如下。

格子編號	0	1	2	3	4
機率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

- (3) 由 (2) 得知，彈珠落入 2 號格子的機率最大。

隨堂練習

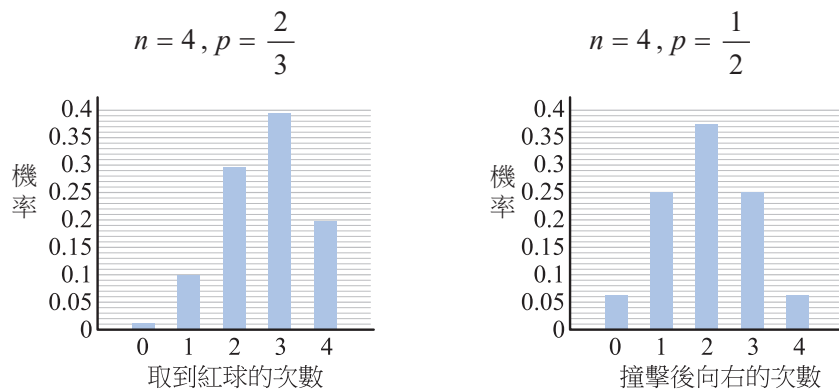
袋中有大小相同的紅球 3 顆、白球 2 顆。每次從袋中取出一球，觀察顏色後再放回袋中，共取球 3 次。已知每一次取球都為獨立事件，且每球被取到的機會均等，求下列各事件的機率。

- (1) 取到 2 次紅球。
 (2) 紅球被取到的次數多過白球被取到的次數。

$$(1) \frac{54}{125} \quad (2) \frac{81}{125}$$

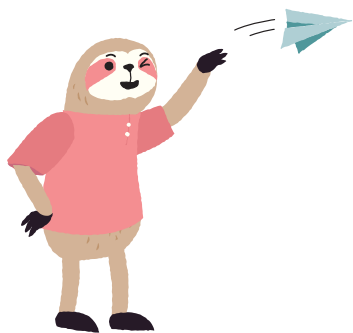


將例題 2 與例題 3 的試驗次數 n 皆為 4 次，成功機率 p 分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{1}{2}$ ，將其機率質量函數以圖形表示如下（橫軸為隨機變數的值、縱軸為其對應的機率），稱此圖為**機率分布圖**，簡稱**分布圖**。



▲圖 2

觀察發現：當 $p = \frac{1}{2}$ 時，分布圖會左右對稱，而當 $p \neq \frac{1}{2}$ 時則否。



- 1 了解二項分布的期望值、變異數與標準差及意義。

乙 二項分布的性質

如果重複操作一個成功機率為 p 的伯努力試驗 n 次，且每次試驗結果都是獨立的，那麼成功次數的期望值會是多少呢？以丟一枚均勻硬幣 4 次為例，說明如下。

設隨機變數 X 表示正面出現的次數，根據二項分布，正面出現 k 次的機率為

$$P(X=k) = C_k^4 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \frac{C_k^4}{16}, k=0, 1, 2, 3, 4,$$

且隨機變數 X 的機率分布表如下。

正面出現的次數 k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

根據隨機變數期望值的定義，得

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = 2。$$

以上所得的期望值 $E(X) = 2$ 與我們生活經驗相呼應，當我們丟一枚均勻硬幣 4 次時，會期待正面出現的次數為 $4 \times \frac{1}{2} = 2$ （次）。一般而言，如果重複操作成功機率為 p 的伯努力試驗 n 次，那麼成功次數的期望值為 np 。我們將二項分布的性質整理如下。

二項分布的期望值、變異數與標準差

重複操作一個成功機率為 p ($0 < p < 1$) 的伯努力試驗 n 次（每次試驗結果都是獨立的）。設隨機變數 X 表示試驗成功的次數，則下列性質成立。

- (1) X 的期望值 $E(X) = np$ 。
- (2) X 的變異數 $\text{Var}(X) = np(1-p)$ 。
- (3) X 的標準差 $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ 。

以上的結果證明過程詳見附錄二。來練習上述的結果。

例題 4

重複擲一粒公正骰子 180 次，觀察所出現的點數，求 6 點出現次數的期望值與標準差。

解

設隨機變數 X 表示 6 點出現的次數。因為公正骰子出現 6 點的機率 $p = \frac{1}{6}$ ，所以 X 的機率分布是 $n = 180, p = \frac{1}{6}$ 的二項分布，此時 X 的期望值與標準差分別為

$$E(X) = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30 \text{ (次)}。$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \sqrt{25} = 5 \text{ (次)}。$$

隨堂練習

重複丟一枚均勻硬幣 36 次，觀察出現正面或反面的情形，求正面出現次數的期望值與標準差。

期望值 = 18 (次)；標準差 = 3 (次)

補充例題

1 阿南每天走同一條路上學，共需經過 6 個紅綠燈。設阿南在每個路口會

碰到紅燈的機率是 $\frac{1}{3}$ ，

而 6 個路口的紅綠燈是互相獨立的，求阿南每天上學時，會碰到紅燈次數的期望值與標準差。

解：會碰到紅燈次數的期望值為

$$\begin{aligned} E(X) &= np = 6 \times \frac{1}{3} \\ &= 2 \text{ (次)}。 \end{aligned}$$

標準差為

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{np(1-p)} \\ &= \sqrt{6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (次)}。 \end{aligned}$$

隨堂練習解答

1 設隨機變數 X 表示正面出現的次數。

因為均勻硬幣出現正面的機率 $p = \frac{1}{2}$ ，所以 X 的機率分布是 $n = 36, p = \frac{1}{2}$ 的二項分布，

此時 X 的期望值與標準差分別為 $E(X) = np = 36 \times \frac{1}{2} = 18 \text{ (次)}。$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{36 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{9} = 3 \text{ (次)}。$$

利用二項分布的性質再做一道例題。

例題 5

重複「同時丟兩枚均勻硬幣」300次，觀察出現正面或反面的情形，並令隨機變數 X 表示兩枚硬幣都出現正面的次數，求 X 的期望值與標準差。

解

因為兩枚硬幣都出現正面的機率 $p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，所以 X 的機率分布是

$n = 300$ ， $p = \frac{1}{4}$ 的二項分布，此時 X 的期望值與標準差分別為

$$E(X) = np = 300 \times \frac{1}{4} = 75 \text{ (次)}。$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \frac{15}{2} \text{ (次)}。$$

隨堂練習

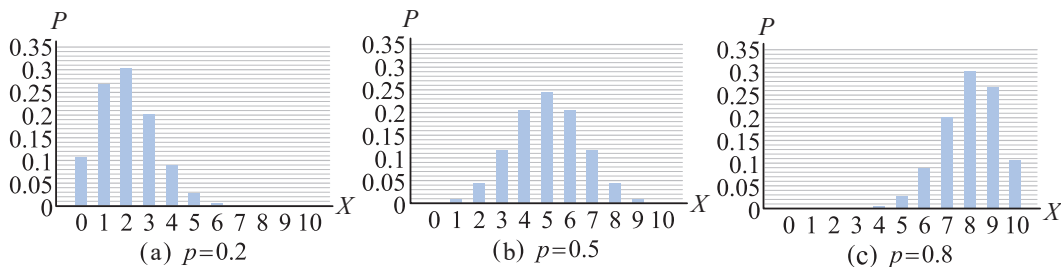
重複「同時擲兩粒公正骰子」30次，並令隨機變數 X 表示兩粒骰子點數相同的次數，求 X 的期望值與標準差。

$$E(X) = 5 \text{ (次)}; \sigma(X) = \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ (次)}$$

1

本單元甲小節的最後介紹過：當 $p = \frac{1}{2}$ 時，分布圖會左右對稱，而當 $p \neq \frac{1}{2}$

時則否。那麼，二項分布的分布圖會有什麼特性呢？以下以 $n = 10$ 、 p 分別為 0.2、0.5、0.8 的分布圖來說明。



▲圖 3

33

隨堂練習解答

1 因為兩粒公正骰子點數相同的機率 $p = \frac{6 \times 1}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$ ，所以 X 的機率分布是 $n = 30$ ， $p = \frac{1}{6}$ 的二項分布，

此時 X 的期望值與標準差分別為 $E(X) = np = 30 \times \frac{1}{6} = 5$ (次)。

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{30 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{150}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \text{ (次)}。$$

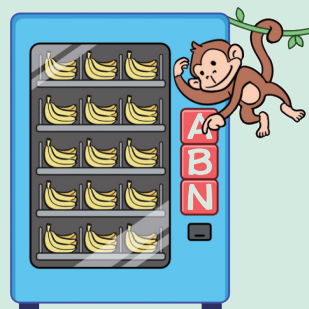
在圖 3 中，三個分布圖的最高點（即機率的最大值）分別發生在隨機變數 X 的期望值 np 之處（如 (a) 的 $np = 10 \times 0.2 = 2$ ，(b) 的 $np = 10 \times 0.5 = 5$ ，(c) 的 $np = 10 \times 0.8 = 8$ ）。

一般而言，對於參數為 (n, p) 的二項分布，當期望值 np 為整數時，其機率的最大值剛好會發生在期望值 $X = np$ 之處；而當期望值 np 不是整數時，其機率的最大值會發生在期望值 $X = np$ 的附近。

來看一道與引言相關的例子。

例題 6

有一台貨源充足的香蕉自動販賣機，面板上只有 A、B、N 三個按鍵。每一回合可按按鍵 6 次，若這 6 次是依照 BANANA 的順序按下，則會掉落一根香蕉。有一隻猴子每次隨機地按下其中一個按鍵，根據以上資訊，試回答下列問題。



(1) 這隻猴子隨機按一回合（即按 6 次），選出牠沒有獲得香蕉的機率。

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ ④ $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6$ ⑤ $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6$ 。（單選）

(2) 已知這隻猴子每天都在機器前面按 30 回合，長達一季共 90 天，令隨機變數 X 表示獲得香蕉的數量，求 X 的期望值。

(3) 假設這隻猴子每天都在機器前面按 30 回合，長達 N 天，令隨機變數 Y 表示獲得香蕉的個數，已知 Y 的期望值為 10 根，求 N 的值。

解

(1) 每回合隨機按 6 次按鍵，這 6 次依照 BANANA 的順序按下而獲得香蕉（成功）的機率為 $\left(\frac{1}{3}\right)^6$ ，沒有獲得香蕉（失敗）的機率為 $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6$ 。
故選 ④。

(2) 因為每回合獲得香蕉（成功）的機率為 $p = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$ ，又每天按 30 回合、90 天共按了 2700 回合，所以 X 的機率分布是 $n = 2700$ ， $p = \frac{1}{729}$ 的二項分布，此時 X 的期望值為

$$E(X) = np = 2700 \times \frac{1}{729} = \frac{100}{27} \text{ (根) }。$$

(3) 因為每回合獲得香蕉（成功）的機率為 $p = \frac{1}{729}$ ，又每天按 30 回合、 N 天共按了 $30N$ 回合，所以 Y 的機率分布是 $n = 30N$ ， $p = \frac{1}{729}$ 的二項分布，此時 Y 的期望值為

$$E(Y) = np = 30N \times \frac{1}{729} = \frac{10N}{243} \text{ (根) }。$$

又已知 Y 的期望值為 10，因此 $\frac{10N}{243} = 10$ ，解得 $N = 243$ （天）。

隨堂練習

承例題，假設這隻猴子每天總共嘗試 M 回合，令隨機變數 Z 表示獲得香蕉的個數，已知 Z 的期望值為 1 根，求 M 的值。

729



35

隨堂練習解答

① 因為每回合獲得香蕉（成功）的機率為 $p = \frac{1}{729}$ ，又總共嘗試了 M 回合，

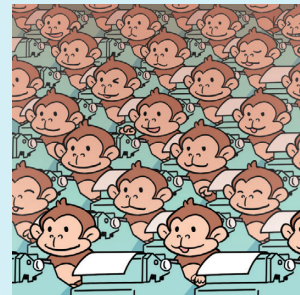
所以 Z 的機率分布是 $n = M$ ， $p = \frac{1}{729}$ 的二項分布，此時 Z 的期望值為 $E(Z) = np = M \times \frac{1}{729} = \frac{M}{729}$ （根）。

又已知 Z 的期望值為 1，因此 $\frac{M}{729} = 1$ ，解得 $M = 729$ （回合）。

數學超展開



例題 6 是基於「無限猴子定理」的一道題目。無限猴子定理是一個機率論的概念：讓一隻猴子隨機地按鍵，只要時間無限多，那麼牠最終可以打出任何一本書，例如莎士比亞的劇本《哈姆雷特》。



如果我們不算標點符號、空格與大小寫的差異，一隻猴子隨機按鍵打出的第一個字母和《哈姆雷特》第一個字母相同的機率為 $\frac{1}{26}$ ，兩個字母相同的機率為 $\left(\frac{1}{26}\right)^2 = \frac{1}{676}$ ，而《哈姆雷特》約有 13 萬個字母，也就是說，這隻猴子要正確地打出《哈姆雷特》整本書的機率為 $\left(\frac{1}{26}\right)^{130000}$ ；雖然機率很低，但是只要猴子無限多次的嘗試，總有機會可以成功。

假設這隻猴子嘗試了 N 次，並令隨機變數 X 表示猴子成功打出整本書的次數，則由上可知， X 的期望值 $E(X) = N\left(\frac{1}{26}\right)^{130000}$ 。因此，當我們期待猴子能有一次成功地打出整本書，即 $E(X) = 1$ 時，猴子需要嘗試 $N = 26^{130000} \approx 3.4 \times 10^{183946}$ 次。

丙 合理性的檢定

當連續丟一枚硬幣 10 次均出現正面（或均出現反面）時，我們會對這枚硬幣是否均勻產生懷疑，甚至可能認定「這不是一枚均勻硬幣」；然而，做出此判斷所依據的標準為何呢？有沒有可能判斷錯誤呢？事實上，在統計學上，當我們懷疑某個假設的正確性時，經常會對這個假設進行「檢定」。以下我們就以檢定硬幣是否均勻為例來說明檢定的步驟與過程。

我們知道：丟一枚硬幣 10 次，若令隨機變數 X 表示正面出現的次數，則在「這是一枚均勻硬幣」的假設前提下，

$$P(X = k) = C_k^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{C_k^{10}}{1024}, k = 0, 1, \dots, 10,$$

即 X 的機率分布表如下。

次數 k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
$P(X = k)$ 近似值	0.1%	1.0%	4.4%	11.7%	20.5%	24.6%	20.5%	11.7%	4.4%	1.0%	0.1%

直觀上，當正面出現的次數很多或很少時，例如 0 次或者 10 次，表示很有可能這不是一枚均勻的硬幣，因此我們會傾向於拒絕（或推翻）「這是一枚均勻硬幣」的假設。更精確來說，根據上表， X 為左右兩端的值 0 或 10 的機率為

$$P(X = 0) + P(X = 10) \approx 0.002,$$

即正面出現 0 次或 10 次的機率約為 0.002，表示發生這情形的機會很小，可以拒絕「這是一枚均勻硬幣」的假設。然而，即便發生的機率很小，硬幣仍有可能是均勻的，此時發生誤判的機率會約為 0.002。同理，由

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0.0215$$

得知，正面出現 0, 1, 9 或 10 次的機率約為 0.0215，此時若我們以「出現 0, 1, 9 或 10 次正面」的準則來拒絕「這是一枚均勻硬幣」，則發生誤判的機率約為 0.0215。因此，誤判是可能發生的，當我們要設定檢定的步驟時，有必要將誤判發生的機率納入考慮。

1

教學要點

- 1 應用二項分布的機率分布檢定事件的合理性。

教學小提醒

1

- 1 此處不需要延伸到正式的假設檢定內容與其相關的專有名詞。

2

- 2 這裡的誤判不需要提及假設檢定的型一錯誤與型二錯誤。

教學小提醒

1 一般情況來說，極端值會依據假設檢定中對立假設去做單尾或雙尾的判斷，如下列所示，（令 H_0 ：虛無假設； H_1 ：對立假設）

① 當「 $H_0: p = p_0$ ，
 $H_1: p \neq p_0$ 」時，
此時為雙尾檢定。

② 當「 $H_0: p = p_0$ ，
 $H_1: p > p_0$ 」或
「 $H_0: p \leq p_0$ ，
 $H_1: p > p_0$ 」時，
此時為右尾檢定。

③ 當「 $H_0: p = p_0$ ，
 $H_1: p < p_0$ 」或
「 $H_0: p \geq p_0$ ，
 $H_1: p < p_0$ 」時，
此時為左尾檢定。

在課本這裡內文中提到的

極端值，是 $H_0: p = \frac{1}{2}$ ，

$H_1: p \neq \frac{1}{2}$ 的情況，為雙

尾檢定，因此，在尋找極端值時，會從兩邊的極端去找起。

首先，為了使誤判的機率在可接受的範圍內，我們會設定一個數值作為誤判機率的上限，並稱此數值為**顯著水準**，如 0.01 或 0.05 等。當 X 出現某些極端值的機率小於顯著水準時，我們就拒絕假設；否則，我們就不拒絕假設。如此一來，我們發生檢定誤判的機率就會小於設定的顯著水準。在上述的例子中，我們設定顯著水準為 0.05。

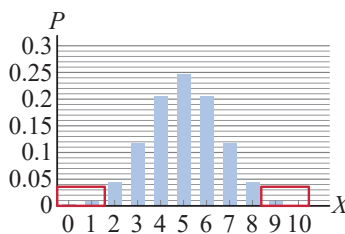
接著，由 X 的機率分布表可得

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=9)+P(X=10) < 0.05 \text{ (顯著水準)}$$

且

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10) > 0.05。$$

最後，當 $X=0, 1, 9, 10$ 時，我們就拒絕「這是一枚均勻硬幣」的假設（此時誤判的機率小於顯著水準 0.05）；否則，我們就不拒絕「這是一枚均勻硬幣」。此時我們稱 $X=0, 1, 9, 10$ 為顯著水準 0.05 的**拒絕域**。



▲圖 4

要注意的是，拒絕域由顯著水準所決定，不同的顯著水準所決定的拒絕域可能不同。例如上例中，顯著水準為 0.01 所決定的拒絕域為 $X=0, 10$ 。若拒絕域為 $X=0, 1, 2, 8, 9, 10$ ，則其顯著水準大於 0.05。

接下來，我們以上述丟一枚硬幣 10 次為例，將檢定的步驟說明如下。

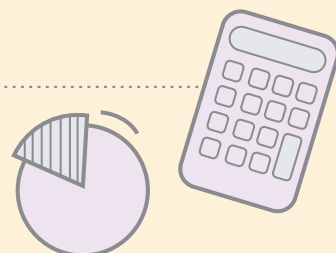
步驟一：提出假設。此例為「這是一枚均勻硬幣」。

步驟二：選擇檢定統計量。此例為「丟硬幣 10 次出現正面的次數」，即上述隨機變數 X 的值。

步驟三：設定「顯著水準」。此例設定的顯著水準為 0.05。

步驟四：得出「拒絕域」。此例得出的拒絕域為 $X=0, 1, 9, 10$ 。

步驟五：進行試驗並依結果做出判斷。此例中，當試驗後的 X 值落在拒絕域 $X=0, 1, 9, 10$ 時，我們就拒絕「這是一枚均勻硬幣」；否則，我們就不拒絕「這是一枚均勻硬幣」。

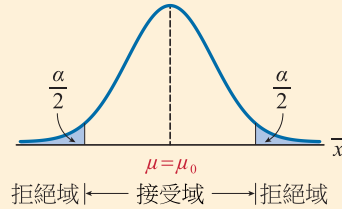


教學小提醒

① 這裡基於課綱不提及兩個假設、但是又希望敘述嚴謹的考量下，使用括號補充「我們懷疑此枚硬幣出現正面的機率

$p \neq \frac{1}{2}$ 」，來表示 $H_1: p \neq \frac{1}{2}$ 的情況，也就是明確指出，我們的例子為雙尾檢定的例子。

② 當我們要進行雙尾檢定時，從左右兩端找拒絕域。事實上，左右兩端找到的拒絕域面積應該要一樣大（若顯著水準為 α ，左右兩端的面積都為 $\frac{\alpha}{2}$ ）。



③ 當 $p_0 \neq \frac{1}{2}$ 時，例如廠商宣稱中獎率有 8 成，此時 $H_0: p = 0.8$ ，其機率分布圖會有左偏或右偏的情形，此時，如果我們使

用雙尾檢定（ $H_1: p \neq 0.8$ ），因為左右面積需要相等為 $\frac{\alpha}{2}$ 的情況下，需要先進行標準化。

④ 承③，事實上，在廠商宣稱中獎率有 8 成這種情形下，一般來說，會懷疑的對立假設為中獎率不到 8 成，即 $H_1: p < 0.8$ ，因此，在假設檢定較常使用的為課本接下來要敘述的單尾檢定。

⑤ 綜合以上①-④，在雙尾檢定的考題上，老師在抽換數值時，還是以 $H_0: p = \frac{1}{2}$ ， $H_1: p \neq \frac{1}{2}$ 做考題即可，無須延伸到其他機率的數值。這裡在命題時，可抽換顯著水準、或進行試驗次數的數值。

在上述例子的檢定過程中，我們懷疑這不是一枚均勻硬幣（即我們懷疑此枚硬幣出現正面的機率 $p \neq \frac{1}{2}$ ），因此便在「這是一枚均勻硬幣」（即 $p = \frac{1}{2}$ ）的假設前提下進行檢定，此時拒絕域取自 X 的可能值（即 $0, 1, 2, \dots, 10$ ）之左右兩端，如 $X = 0, 1, 9, 10$ 。

在某些情況下，拒絕域只會取自 X 的可能值之一端，例如，當我們懷疑硬幣出現正面的機率 $p < \frac{1}{2}$ 且在 $p \geq \frac{1}{2}$ 的假設前提下進行檢定時，拒絕域就只會是取自 X 的可能值之一端，我們用以下的例題說明。

例題 7

某工廠生產一個投籃球的罰球機器人，並宣稱它的命中率 p 在 $\frac{1}{2}$ 以上（含 $\frac{1}{2}$ ）。今檢定此機器人的命中率，並列出前三個步驟如下：

- ① 假設「此機器人的罰球命中率 $p \geq \frac{1}{2}$ 」；
- ② 確立檢定統計量為「機器人重複罰球 8 次的進球數」；
- ③ 設定顯著水準為 0.05。

回答下列問題。

- (1) 設隨機變數 X 表示進球的次數，求拒絕域。
- (2) 若試驗的結果為進球 2 次，則是否拒絕「此機器人的罰球命中率 $p \geq \frac{1}{2}$ 」的假設？

解

- (1) 在假設成立的條件下，因為罰球命中率 $p \geq \frac{1}{2}$ ，所以罰球 8 次進球數

的期望值大於或等於 4，因此，此假設檢定的拒絕域會落在進球數少的一端，也就是說，拒絕域應從左端的值 $0, 1, 2, \dots$ 開始逐一考慮。

另一方面，當 $p = \frac{1}{2}$ 時，發生 $X = 0, 1, 2, 3$ 的機率比 $p > \frac{1}{2}$ 大，也就

是說， $p = \frac{1}{2}$ 時的檢定誤判機率會高於 $p > \frac{1}{2}$ 時。因此，我們只要考

慮 $p = \frac{1}{2}$ 的情形即可。因為

$$\begin{aligned}
 P(X=0)+P(X=1) &= C_0^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_1^8 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1+8}{256} \approx 0.04 < 0.05 \text{ (顯著水準)}
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) &= C_0^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_1^8 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right) + C_2^8 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1+8+28}{256} \approx 0.14 > 0.05 \text{ (顯著水準)},
 \end{aligned}$$

所以拒絕域為 $X=0, 1$ 。

(2) 因為試驗的結果為進球 2 次，即 $X=2$ ，並沒有落在拒絕域，所以不拒絕「此機器人的罰球命中率 $p \geq \frac{1}{2}$ 」的假設。

1

隨堂練習

某國的鐵路管理局宣稱該國火車誤點的機率 p 在 0.2 以下（含 0.2）。今檢定火車誤點的機率，並列出前三個步驟如下：

- ① 假設「火車誤點的機率 $p \leq 0.2$ 」；
- ② 確立檢定統計量為「隨機觀察 6 班火車誤點的班數」；
- ③ 設定顯著水準為 0.05。

回答下列問題。

- (1) 設隨機變數 X 表示火車誤點的班數，求拒絕域。
- (2) 若試驗的結果為有 4 班火車誤點，則是否拒絕「火車誤點的機率 $p \leq 0.2$ 」的假設？

(1) $X=4, 5, 6$ (2) 是

隨堂練習解答

- ① (1) 在假設成立的條件下，因為火車誤點的機率 $p \leq 0.2$ ，所以觀察 6 班火車其誤點的期望值小於或等於 1 班，因此，此假設檢定的拒絕域會落在誤點班數多的一端，也就是說，拒絕域應從右端的值 6, 5, 4, ... 開始逐一考慮。另一方面，比起 $p < 0.2$ 的情形，在 $p = 0.2$ 時我們會有較高的機率拒絕假設，也就是說， $p = 0.2$ 時的檢定誤判機率會高於 $p < 0.2$ 時，因此，我們只要考慮 $p = 0.2$ 的情形即可。因為

$$\begin{aligned} & P(X=6) + P(X=5) + P(X=4) \\ &= C_6^6 \left(\frac{1}{5}\right)^6 + C_5^6 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right) + C_4^6 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1+24+240}{15625} \approx 0.02 < 0.05 \text{ (顯著水準)} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} & P(X=6) + P(X=5) + P(X=4) + P(X=3) \\ &= C_6^6 \left(\frac{1}{5}\right)^6 + C_5^6 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right) + C_4^6 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^2 + C_3^6 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\ &= \frac{1+24+240+1280}{15625} \approx 0.10 > 0.05 \text{ (顯著水準)}, \end{aligned}$$

所以拒絕域為 $X = 4, 5, 6$ 。

- (2) 因為試驗的結果為火車誤點 4 次，即 $X = 4$ ，落在拒絕域，所以拒絕「火車誤點的機率 $p \leq 0.2$ 」的假設。

習題解答

觀念澄清

(1) ×：重複丟一枚均勻硬幣 4 次，恰出現 3 次正面的機率為 $C_3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \neq \frac{3}{4}$ 。

(2) ○：重複丟一枚均勻硬幣 10 次，恰出現 3 次正面的機率為 $C_3^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7$ ，恰出現 7 次正面的機率為 $C_7^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ，兩者相等。

(3) ○：這是 $n=100$ ， $p=\frac{1}{2}$ 的二項分布，出現正面次數的期望值為 $np=100 \times \frac{1}{2}=50$ （次）。

一、基礎題

1. 抽到的花色為紅心（成功）的機率為 $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$ ，不為紅心（失敗）的機率為 $\frac{3}{4}$ 。

(1) 恰有 3 次抽到的花色為紅心的機率為 $C_3^4 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64}$ 。

(2) 至多有 2 次抽到的花色為紅心表示抽到 2 次或 1 次或 0 次紅心，其機率為

$$C_2^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_1^4 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_0^4 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{54+108+81}{256} = \frac{243}{256}。$$

2. 出現點數為 6 的因數（成功）之機率為 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ，不為 6 的因數（失敗）之機率為 $\frac{1}{3}$ 。

(1) 恰有 3 次出現的點數為 6 的因數之機率為 $C_3^5 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$ 。

(2) 至少有 3 次出現的點數為 6 的因數表示 3 次或 4 次或 5 次出現的點數為 6 的因數，其機率為

$$C_3^5 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_4^5 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{80+80+32}{243} = \frac{64}{81}。$$

2 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) 重複丟一枚均勻硬幣 4 次，恰出現 3 次正面的機率為 $\frac{3}{4}$ 。

☐ (2) 重複丟一枚均勻硬幣 10 次，恰出現 3 次正面的機率與恰出現 7 次正面的機率相等。

☐ (3) 重複丟一枚均勻硬幣 100 次，出現正面次數的期望值為 50 次。

一、基礎題

(1) × (2) ○ (3) ○

- 1 從 52 張撲克牌中，每次抽一張牌，觀察花色後放回並重新洗牌。已知每張牌被抽出的機會均等，共抽 4 次，且每一次抽牌都為獨立事件，求下列各事件的機率。

- (1) 恰有 3 次抽到的花色為紅心。
(2) 至多有 2 次抽到的花色為紅心。

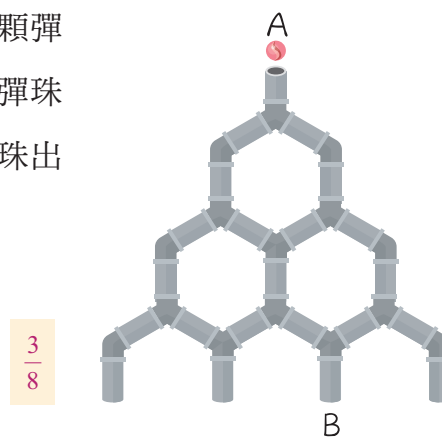
(1) $\frac{3}{64}$ (2) $\frac{243}{256}$

- 2 擲一粒公正骰子 5 次，觀察所出現的點數，求下列各事件的機率。

- (1) 恰有 3 次出現的點數為 6 的因數。
(2) 至少有 3 次出現的點數為 6 的因數。

(1) $\frac{80}{243}$ (2) $\frac{64}{81}$

- 3 右圖是一個分支管道圖。從上方 A 處放入一顆彈珠，設彈珠會隨機地向右或向左落下。已知彈珠在分支處向右或向左落下的機率相等，求彈珠出現在 B 處的機率。



- 4 甲、乙兩人進行「剪刀、石頭、布」的猜拳遊戲，其中甲勝叫做成功，乙勝或平手叫做失敗。
- (1) 兩人猜拳 1 次，求成功的機率。
- (2) 今兩人猜拳 60 次，求成功次數的期望值與標準差。

(1) $\frac{1}{3}$ (2) 期望值 = 20 (次) ; 標準差 = $\frac{2\sqrt{30}}{3}$ (次)

3. 彈珠在分支處向右方落下（成功）的機率為 $\frac{1}{2}$ ，向左方落下（失敗）的機率為 $\frac{1}{2}$ 。

彈珠總共會經過分支處 3 次。因為當彈珠落入 B 處時，表示只有 2 次向右而 1 次向左，

所以其機率為 $C_2^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$ 。

4. (1) 甲、乙兩人出拳情形與獲勝的情況如下表。

乙 \ 甲	剪刀	石頭	布
剪刀	平手	甲勝	乙勝
石頭	乙勝	平手	甲勝
布	甲勝	乙勝	平手

由上表得知：兩人出拳一次共有 9 種情形，其中有 3 種為甲勝。

故成功的機率為 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 。

- (2) 這是 $n = 60$ ， $p = \frac{1}{3}$ 的二項分布。設隨機變數 X 表示成功的次數，則 X 的期望值與標準差分別為

$$E(X) = np = 60 \times \frac{1}{3} = 20 \text{ (次)}。$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{60 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{30}}{3} \text{ (次)}。$$

二項分布

5. 因為兩球都是紅球的機率 $p = \frac{C_2^3}{C_2^4} = \frac{1}{2}$ ，所以這是 $n = 8$ ， $p = \frac{1}{2}$ 的二項分布。因此， X 的期望值與標準差分別為

$$E(X) = np = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{（次）}。$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2} \text{（次）}。$$

二、進階題

6. 由題意可知，小孩是雙眼皮（成功）的機率為 $\frac{3}{4}$ ，單眼皮（失敗）的機率為 $\frac{1}{4}$ 。

父 母	A	a
	AA	Aa
A	AA	Aa
a	Aa	aa

(1) 3 個小孩都是雙眼皮的機率為 $C_3^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$ 。

(2) 恰有 2 個小孩是雙眼皮的機率為 $C_2^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$ 。

- 5 袋中有大小相同的紅球 3 顆、白球 1 顆，每次從袋中隨機取出 2 球，觀察顏色後再放回袋中，共取 8 次，設每顆球被取到的機率均等且每一次取球都為獨立事件。令隨機變數 X 表示兩球都是紅球的次數，求 X 的期望值與標準差。

$$E(X)=4 \text{ (次)} ; \sigma(X)=\sqrt{2} \text{ (次)}$$

二、進階題

- 6 遺傳中外觀是由一對基因所決定，若 A 表示雙眼皮的基因， a 表示單眼皮的基因，則

- ① 當這對基因為 AA 或 Aa 時，外觀是雙眼皮；
- ② 當這對基因為 aa 時，外觀是單眼皮。

小孩的基因是分別從父母親隨機各取得一個基因來組成，且取得 A 或 a 的機率均等。已知一對夫婦的基因皆為 Aa ，他們計畫生 3 個小孩，且每個小孩從父母親取得基因皆為獨立事件，求下列各事件的機率。

- (1) 3 個小孩都是雙眼皮。
- (2) 恰有 2 個小孩是雙眼皮。

$$(1) \frac{27}{64} \quad (2) \frac{27}{64}$$

- 7 袋中有大小相同、編號 1、2、3、4、5 的號碼球各 1 顆。每次從袋中取出一球，觀察取到的號碼後再放回袋中，共取球 3 次。已知每一次取球都為獨立事件，且每球被取到的機會均等，求下列各事件的機率。

(1) 恰有 1 次是奇數。

(2) 3 次的數字和是偶數。

$$(1) \frac{36}{125} \quad (2) \frac{62}{125}$$

- 8 袋中有大小相同的紅球 6 顆，白球 x 顆。每次從袋中任取一球，觀察顏色後再放回袋中，共取了 18 次。設每顆球被取到的機率均等且每一次取球都為獨立事件。已知取到白球次數的期望值為 6 次，求 x 的值。

3

7. 取到奇數號碼球的機率為 $p = \frac{3}{5}$ 。

(1) 恰有 1 次是奇數的機率為 $C_1^3 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125}$ 。

(2) 3 次的數字和是偶數，即

① 取到 3 次偶數。

② 取到 2 次奇數、1 次偶數。

其機率為 $C_0^3 \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^3 + C_2^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{62}{125}$ 。

8. 設隨機變數 X 為取到白球的次數

取到白球的機率 $p = \frac{x}{6+x}$ ，依題意可得

$$E(X) = np = 18 \times \frac{x}{6+x} = 6，$$

解得 $x = 3$ 。

二項分布

9. 由題意可知，向右移的機率為 $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，向左移的機率為 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 。擲骰子 5 次後 P 點停在 -1 處，

表示有 2 次向右而 3 次向左，其機率為 $C_2^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$ 。

10. (1) 在假設成立的條件下，可得女生的比例為 $\frac{1}{2}$ ，此時拒絕域取自 X 可能的取值之左右兩端。又因為

$$P(X = k) = C_k^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} = \frac{C_k^7}{128}, k = 0, 1, \dots, 7,$$

可得

$$P(X = 0) + P(X = 7) = \frac{C_0^7}{128} + \frac{C_7^7}{128} = \frac{2}{128} \approx 0.02 < 0.05 \text{ (顯著水準)}$$

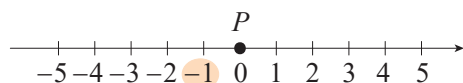
且

$$\begin{aligned} &P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= \frac{C_0^7}{128} + \frac{C_1^7}{128} + \frac{C_6^7}{128} + \frac{C_7^7}{128} = \frac{16}{128} \approx 0.13 > 0.05 \text{ (顯著水準)}. \end{aligned}$$

故拒絕域為 $X = 0, 7$ 。

(2) 因為試驗的結果為 7 名新生中有 1 名女生，並沒有落在拒絕域，所以不拒絕「男女錄取的比例相等」的假設。

- 9 如下圖， P 點在數線上的原點。今擲一粒公正骰子決定 P 點的移動方式：當點數出現 1 或 2 時， P 點向右移 1 單位；當點數出現 3, 4, 5, 6 時， P 點向左移 1 單位。求擲骰子 5 次後 P 點停在 -1 處的機率。



$\frac{80}{243}$

- 10 某科系宣稱該系新生男女錄取的比例相等。今檢定男女錄取的比例，並列出前三個步驟如下：

- ① 假設「男女錄取的比例相等」；
- ② 確立檢定統計量為「隨機抽取 7 名新生中女生的人數」；
- ③ 設定顯著水準為 0.05。

回答下列問題。

- (1) 已知隨機變數 X 表示女生的人數，求拒絕域。
- (2) 若試驗的結果為 7 名新生中有 1 名女生，則是否拒絕「男女錄取的比例相等」的假設？

(1) $X = 0, 7$
(2) 否

