總　　分
測驗時間：20分鐘

選修數學乙(下)小試身手卷（中偏易）

第 2 回

範圍：單元 1 離散型隨機變數

（主題：乙）

____年____班____號

姓名______________

一、單選題(5 小題，每格 10 分，共 50 分)

1.（　　）已知袋中共有 4 顆球，其中 1 號球二顆，2 號球二顆，從中任取兩顆球，且每顆球被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出兩顆球的號碼總和，求 X 的期望值。　(A)1　(B)$\frac{3}{2}$　(C)2　(D)3　(E)4

解答　D

解析　任意抽取兩顆球的編號組合有「1 號與 1 號」、「1 號與 2 號」、「2 號與 2 號」，所以取出兩顆球的編號總和 X 所有可能的取值為 2、3、4，且其機率分布表如下。

號碼總和 x	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{C_2^2}{C_2^4}=\frac{1}{6}$	$\frac{C_1^2\times C_1^2}{C_2^4}=\frac{4}{6}$	$\frac{C_2^2}{C_2^4}=\frac{1}{6}$

故期望值 $E(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{4}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{18}{6}=3$

2.（　　）有一顆均勻的正六面體骰子，其六個面的點數分別為 1、1、1、2、2、3。擲此骰子一次，當出現 1 點時，可得 100 美元；出現 2 點時，可得 200 美元；出現 3 點時，可得 k 美元。設隨機變數 X 表示擲骰子一次所得的金額。已知 X 的期望值為 200 美元，求 k 的值。　(A)100　(B)200　(C)300　(D)400　(E)500

解答　E

解析　因為 X 表示擲骰子一次所得的金額，所以 X 所有可能的取值為 100、200、k（元），其機率分布表如下。

金額 x	100	200	k
$P(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

又 X 的期望值為 200 元，即 $E(X)=100\times\frac{3}{6}+200\times\frac{2}{6}+k\times\frac{1}{6}=200$，解得 $k=500$

3.（　　）某百貨公司推出購物摸彩送禮券的活動，摸彩箱中裝有禮券 300 元 1 張、500 元 2 張、700 元 3 張、900 元 4 張。從箱中取出一張，且每張禮券被取到的機會均等。設隨機變數 X 表示取出禮券所代表的金額，求 X 的標準差。　(A)200　(B)300　(C)400　(D)$\sqrt{300}$　(E)$\sqrt{500}$

解答　A

解析　因為 X 表示取出禮券所代表的金額，所以 X 所有可能的取值為 300、500、700、900，

而禮券總張數為 1 + 2 + 3 + 4 = 10，得機率分布表如下。

禮券金額 x	300	500	700	900
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

所以期望值 $E(X)=300\times\frac{1}{10}+500\times\frac{2}{10}+700\times\frac{3}{10}+900\times\frac{4}{10}=700$。

變異數 $\mathrm{Var}(X)=(300-700)^2\times\frac{1}{10}+(500-700)^2\times\frac{2}{10}+(700-700)^2\times\frac{3}{10}+(900-700)^2\times\frac{4}{10}$

$=40000$。

故標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{40000}=200$

4.（　　）袋中裝有大小相同且編號分別為 2、3、6、9 的球各一顆。自袋中任取兩顆球，且每球被取到的機會均等。隨機變數 X 表示取出兩顆球中的較小編號，求 X 的變異數。　(A)1　(B)2　(C)3　(D)5　(E)6

解答　B

解析　因 X 表示取出兩顆球中的最小編號，所以 X 所有可能的取值為 2、3、6。

(i)「X = 2」表示「取得編號 2 與 3、2 與 6 或 2 與 9 的事件」。

(ii)「X = 3」表示「取得編號 3 與 6 或 3 與 9 的事件」。

(iii)「X = 6」表示「取得編號 6 與 9 的事件」。

由上面可得隨機變數 X 的機率分布表如下。

取出兩顆球中的最小編號 x	2	3	6
$P(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

故期望值 $E(X)=2\times\frac{3}{6}+3\times\frac{2}{6}+6\times\frac{1}{6}=3$。

變異數 $\mathrm{Var}(X)=(2-3)^2\times\frac{3}{6}+(3-3)^2\times\frac{2}{6}+(6-3)^2\times\frac{1}{6}=2$

5.（　　）已知隨機變數 X，若 $E(X) = -3$，$\mathrm{Var}(X) = 4$，則下列選項何者正確？
(A)$E(-2X+1)=-6$　(B)$E(-2X+1)=-5$　(C)$\mathrm{Var}(-2X)=-8$
(D)$\mathrm{Var}(X+1)=5$　(E)$\mathrm{Var}(-2X+1)=16$

解答　E

解析　若 X 為隨機變數且 a、b 為常數，由期望值與變異數的性質

$E(aX+b)=aE(X)+b$、$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\mathrm{Var}(X)$，可知

(A)(B)$E(-2X+1)=-2E(X)+1=-2\times(-3)+1=7$

(C)$\mathrm{Var}(-2X)=(-2)^2\mathrm{Var}(X)=16$

(D)$\mathrm{Var}(X+1)=\mathrm{Var}(X)=4$

(E)$\mathrm{Var}(-2X+1)=(-2)^2\mathrm{Var}(X)=4\times4=16$

二 、 填充題(4 小題，每格 10 分，共 50 分)

1. 盒中有 6 枝冰棒，其中 4 枝為綠豆口味、2 枝為紅豆口味。自盒中任取兩枝冰棒，且每枝冰棒被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取到紅豆口味冰棒的枝數，則 X 的期望值為____________。

解答 $\frac{2}{3}$

解析 因為任意抽取兩枝冰棒的口味組合有「綠豆與綠豆」、「綠豆與紅豆」、「紅豆與紅豆」，
所以紅豆口味冰棒的枝數 X 所有可能的取值共有 0 枝、1 枝、2 枝三種，
且其機率分布表如下。

紅豆口味冰棒的枝數 x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{C_2^4\times C_0^2}{C_2^6}=\frac{2}{5}$	$\frac{C_1^4\times C_1^2}{C_2^6}=\frac{8}{15}$	$\frac{C_0^4\times C_2^2}{C_2^6}=\frac{1}{15}$

故期望值 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$ 。

2. 某超市推出購物滿千元抽折價券的活動，已知箱中有折價券面額 200 元 1 張、100 元 3 張、50 元 n 張。從箱中取出一張折價券，且每張折價券被取到的機會均等，並令隨機變數 X 表示取出一張折價券的面額。已知 X 的期望值為 80 元，則 n 的值為____________。

解答 6

解析 因為 X 表示取出一張折價券的面額，所以 X 所有可能的取值為 200、100、50（元），
而其折價券總張數為 $1+3+n=n+4$，得機率分布表如下。

面額 x	200	100	50
$P(X=x)$	$\frac{1}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{n}{n+4}$

又 X 的期望值為 80 元，即 $E(X)=200\times\frac{1}{n+4}+100\times\frac{3}{n+4}+50\times\frac{n}{n+4}=80$ ，
整理得 $3n=18$，解得 $n=6$。

3. 有一款走路運動賺點數的手機 APP，當走滿一萬步就可按按鍵得點數，已知出現的號碼有 2、4、6 此三種，且三種號碼出現的機會均等，而出現的號碼就是可獲得的點數。設隨機變數 X 表示按下按鍵出現的號碼而可獲得的點數，則 X 的標準差為_____________。

解答 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解析 因為 X 表示按下按鍵出現的號碼而可獲得的點數，所以 X 所有可能的取值為 2、4、6，

其機率分布表如下。

編號 x	2	4	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

可得期望值 $E(X)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=4$。

變異數 $\mathrm{Var}(X)=(2-4)^2\times\frac{1}{3}+(4-4)^2\times\frac{1}{3}+(6-4)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$，

故標準差 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$。

4. 投擲一粒不公正的四面體骰子，其四個面的點數分別為 1、2、3、4。若各點數出現的機率與該點數成正比。設隨機變數 X 表示擲一次骰子所出現的點數，

(1) 求 X 的變異數為_____________。

(2) 若 $Y=-2X+3$，求標準差 $\sigma(Y)=$ _____________。

解答 (1)1　(2)2

解析 因為 X 表示擲一次骰子所出現的點數，所以 X 所有可能的取值為 1、2、3、4，

又各點數出現的機率比為 1：2：3：4，可得其機率分布表如下。

點數 x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

所以期望值 $E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$。

(1) 變異數 $\mathrm{Var}(X)=(1-3)^2\times\frac{1}{10}+(2-3)^2\times\frac{2}{10}+(3-3)^2\times\frac{3}{10}+(4-3)^2\times\frac{4}{10}=\frac{10}{10}=1$。

(2) 標準差 $\sigma(Y)=\sigma(-2X+3)=|-2|\,\sigma(X)=2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=2\sqrt{1}=2$。