

6 積分的應用

一 教材摘要

首先，透過定積分定義連續函數值的平均，並計算其值。其次，介紹經濟學中的消費者剩餘、生產者剩餘及均衡點，並利用定積分計算消費者剩餘與生產者剩餘的值。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 理解將連續函數的定積分值除以區間長度，即為此區間內函數值的平均。 2. 能利用定積分求連續函數值的平均。 3. 能利用定積分表達並計算經濟學中邊際函數的總量。 4. 理解消費者剩餘等於需求曲線、價格線及 y 軸所圍成區域的面積。 5. 能利用定積分求消費者剩餘。 6. 能利用定積分求生產者剩餘。 7. 能求均衡點。	12

教材地位分析

已學習教材	本單元教材	未學習教材
函數圖形 定積分	連續函數值的平均	
導數的邊際意涵	剩餘意涵	

6 積分的應用

生活中，民眾去市場買雞蛋時，常覺得蛋價昂貴；另一方面，雞農將雞蛋運到市場販賣時，常覺得蛋價便宜。這現象並不令人驚訝，消費者總是希望價格愈低愈好，而生產者總是希望價格愈高愈好。那麼，該如何決定產品的價格才能使買賣雙方合起來的福利最大呢？

介紹經濟學中衡量消費者與生產者福利的重要指標，是本單元學習的重點。



▲圖 1

教學要點

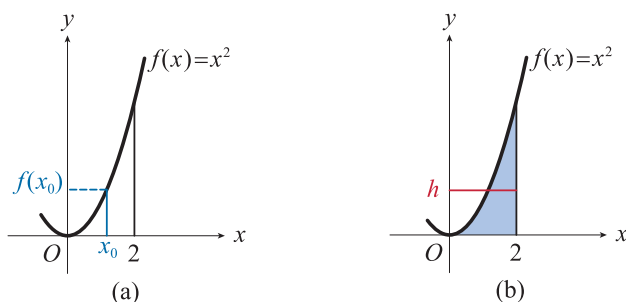
- 1 介紹連續函數值的平均，及利用定積分計算總變化量。

甲 連續函數值的平均

我們知道： n 個數值 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的平均等於所有數值的總和除以個數，即

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}。$$

現在要來討論：連續函數在閉區間內函數值的平均。先看這個例子，在圖 2 (a) 中， x_0 是區間 $[0, 2]$ 內的一數， $f(x_0) = x_0^2$ 是其對應的函數值。因為區間 $[0, 2]$ 內有無窮多個數，所以對應的函數值也有無窮多個。



▲圖 2

因此，上述有限個數值平均的定義不適用於計算這些函數值的平均，那麼要如何定義這種無窮多個函數值的平均呢？再以此例說明如下。

(1) 定義的構想：如圖 2 (b)，在區間 $[0, 2]$ 內，找一個底為 $2 - 0 = 2$ ，高為 h 的矩形，使得此矩形的面積 $2h$ 等於函數 $f(x)$ 圖形下的面積（即鋪色區域的面積）。

(2) 以定積分表示：在區間 $[0, 2]$ 內，因為函數 $f(x)$ 圖形下的面積為 $\int_0^2 f(x)dx$ ，且等於矩形的面積 $2h$ ，所以

$$2h = \int_0^2 f(x)dx,$$

移項得

$$h = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx.$$

我們將矩形的高 h 定義為函數值的平均。

(3) 計算平均：因為

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3},$$

所以 $f(x)$ 在區間 $[0, 2]$ 內函數值的平均為 $\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ 。

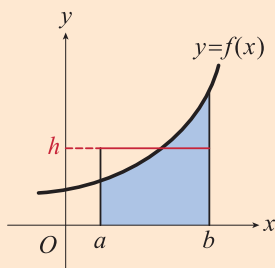
一般而言，將連續函數的定積分值除以區間長度，即為此區間內函數值的平均，定義如下。

連續函數值的平均

設 $f(x)$ 為區間 $[a, b]$ 上的連續函數。我們將

$$h = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

稱為 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內函數值的平均。



補充例題

1 設函數 $f(x) = -x^2 + 8x$ 。

(1) 求 $f(x)$ 在區間 $[2, 8]$ 內函數值的平均 h 。

(2) 已知 $2 \leq c \leq 8$,

且 $f(c) = h$, 求 c 的值。
解:

(1) 根據定義, 得函數值的平均

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{8-2} \int_2^8 f(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \int_2^8 (-x^2 + 8x) dx \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 \right) \Big|_2^8 \\ &= 12。 \end{aligned}$$

(2) 由 $f(c) = h$, 得

$$-c^2 + 8c = 12,$$

整理得

$$c^2 - 8c + 12 = 0,$$

$$\text{即 } (c-2)(c-6) = 0,$$

解得 $c = 2$ 或 6 。

練習求連續函數值的平均。

例題 1

求函數 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 在區間 $[1, 4]$ 內函數值的平均。

解

根據定義, 得函數值的平均為

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-1} \int_1^4 f(x) dx &= \frac{1}{3} \int_1^4 (3x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{3} (x^3 + x^2 + x) \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{3} ((4^3 + 4^2 + 4) - (1^3 + 1^2 + 1)) \\ &= 27。 \end{aligned}$$

隨堂練習

求函數 $f(x) = x^2 + 2x$ 在區間 $[0, 3]$ 內函數值的平均。

6



隨堂練習解答

1 根據定義, 得函數值的平均為

$$\frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^3 (x^2 + 2x) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (18 - 0) = 6。$$

利用連續函數值的平均，求平均溫度。

例題 2

設某日在上午 6 點到 12 點之間，學校在時間 t （時）的溫度可表成函數

$$f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 6t - 4 \text{ (}^\circ\text{C)} , 6 \leq t \leq 12 .$$

- (1) 求學校在上午 6 點到 12 點之間的平均溫度。
- (2) 已知在上午 6 點到 12 點之間，時間 t_0 （時）的溫度恰好等於平均溫度，求 t_0 的值。（四捨五入至小數第一位）

解

- (1) 根據定義，得 $f(t)$ 在區間 $[6, 12]$ 內函數值的平均為

$$\begin{aligned} \frac{1}{12-6} \int_6^{12} f(t) dt &= \frac{1}{6} \int_6^{12} \left(-\frac{1}{4}t^2 + 6t - 4 \right) dt \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{12}t^3 + 3t^2 - 4t \right) \Big|_6^{12} \\ &= \frac{1}{6} (240 - 66) \\ &= 29 . \end{aligned}$$

故學校在上午 6 點到 12 點之間的平均溫度為 29°C 。

- (2) 令

$$-\frac{1}{4}t^2 + 6t - 4 = 29 ,$$

整理得 $t^2 - 24t + 132 = 0$ ，解得 $t = \frac{24 \pm \sqrt{48}}{2} = 12 \pm 2\sqrt{3}$ 。

因為 $6 \leq t \leq 12$ ，所以 $t_0 = 12 - 2\sqrt{3} \approx 8.5$ 。

隨堂練習解答

- 1 (1) 根據定義，得 $f(t)$ 在區間 $[0, 5]$ 內函數值的平均為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5-0} \int_0^5 f(t) dt \\ &= \frac{1}{5} \int_0^5 (0.3t^2 + 2t) dt \\ &= \frac{1}{5} (0.1t^3 + t^2) \Big|_0^5 \\ &= \frac{1}{5} (37.5 - 0) \\ &= 7.5。 \end{aligned}$$

故該機器運轉 5 日的二氧化碳平均排放量為 7.5 公斤。

- (2) 令 $0.3t^2 + 2t = 7.5$ ，

整理得

$$3t^2 + 20t - 75 = 0，解得$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{-20 \pm 10\sqrt{13}}{6} \\ &= \frac{-10 \pm 5\sqrt{13}}{3}。 \end{aligned}$$

因為 $0 \leq t \leq 5$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } t_0 &= \frac{-10 + 5\sqrt{13}}{3} \\ &\approx 2.7。 \end{aligned}$$

隨堂練習

設某機器啟用後連續運轉 5 日，運轉時間 t （日）的二氧化碳排放量可表成函數

$$f(t) = 0.3t^2 + 2t \text{（公斤）}，0 \leq t \leq 5。$$

- (1) 求該機器運轉 5 日的二氧化碳平均排放量。
(2) 已知該機器運轉 5 日中，時間 t_0 （日）的二氧化碳排放量恰好等於平均排放量，求 t_0 的值。（四捨五入至小數第一位）

(1) 7.5 公斤

(2) 2.7

延續微分單元中邊際意涵的概念，當 $F(x)$ 為生產 x 件產品的成本函數，且 $F(x)$ 為可微分函數時，我們稱其導函數 $F'(x) = f(x)$ 為**邊際成本函數**。根據定積分的定義，產量從 a 件增加到 b 件所增加的成本 $F(b) - F(a)$ 等於定積分 $\int_a^b f(x) dx$ ，即

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx。$$

因此，我們可以透過邊際成本函數的定積分，求得某段期間所需的成本，舉例如下。

例題 3

設生產 x 件產品的邊際成本函數為

$$f(x) = 200 - 0.4x \text{ (元)}。$$

當產量從 20 件增加到 80 件時，回答下列問題。

- (1) 求增加這 60 件產品所需的成本。
- (2) 求增加這 60 件產品每件的平均成本。

解

(1) 由上述的結論，得增加的成本為

$$\int_{20}^{80} f(x) dx = \int_{20}^{80} (200 - 0.4x) dx = \left(200x - 0.2x^2 \right) \Big|_{20}^{80} = 10800 \text{ (元)}。$$

(2) 因為共增加 $80 - 20 = 60$ 件，所以每件的平均成本為

$$\frac{\text{增加的成本}}{\text{件數}} = \frac{10800}{60} = 180 \text{ (元)}。$$

或由函數值的平均之定義也可得每件的平均成本為

$$\frac{1}{80 - 20} \int_{20}^{80} f(x) dx = \frac{1}{60} \times 10800 = 180 \text{ (元)}。$$

隨堂練習

設生產 x 件產品的邊際利潤函數為

$$f(x) = 0.3x^2 + 500 \text{ (元)}。$$

當產量從 10 件增加到 30 件時，回答下列問題。

- (1) 求增加這 20 件產品所增加的利潤。
- (2) 求增加這 20 件產品每件的平均利潤。

(1) 12600 元

(2) 630 元

隨堂練習解答

1 (1) 增加的利潤為

$$\begin{aligned} & \int_{10}^{30} f(x) dx \\ &= \int_{10}^{30} (0.3x^2 + 500) dx \\ &= \left(0.1x^3 + 500x \right) \Big|_{10}^{30} \\ &= 12600 \text{ (元)}。 \end{aligned}$$

(2) 因為共增加 $30 - 10 = 20$ 件，所以每件的平均利潤為

$$\begin{aligned} \frac{\text{增加的利潤}}{\text{件數}} &= \frac{12600}{20} \\ &= 630 \text{ (元)}。 \end{aligned}$$

或由函數值的平均之定義也可得每件的平均利潤為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{30 - 10} \int_{10}^{30} f(x) dx \\ &= \frac{1}{20} \times 12600 \\ &= 630 \text{ (元)}。 \end{aligned}$$

由於導數 $F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$ 是函數 $F(x)$ 在 $x = a$ 處的瞬時變化率，於是導函數 $F'(x) = f(x)$ 代表 $F(x)$ 的變化率函數。根據定積分的定義，我們可以利用變化率函數 $f(x)$ 的定積分，求得從 $x = a$ 到 $x = b$ 時 $F(x)$ 的變化量，即

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)。$$

教學要點

- 1 介紹經濟學中的消費者剩餘、生產者剩餘、及均衡點的意涵，及利用定積分計算消費者剩餘與生產者剩餘的值。

教學小提醒

- 1 本小節的內容著重在使用定積分計算消費者剩餘與生產者剩餘，至於它們在經濟學上的意涵，教師可視教學現況作適時補充。
- 2 此處可多舉一些生活實例說明消費者剩餘。例如，夜市拍賣一水瓶，某人以 500 元購得，可是他認為這水瓶的價值應為 600 元，亦即他覺得自己「賺到」 $600 - 500 = 100$ 元。此時消費者剩餘為 100 元。

例如，例題 3(1) 中，因為邊際成本函數 $f(x)$ 為成本對產量的變化率，所以產量從 20 件增加到 80 件這段期間成本的變化量為 $\int_{20}^{80} f(x)dx$ 。

乙 剩餘意涵

(一) 消費者剩餘

這裡我們要介紹經濟學中的「消費者剩餘」，它是衡量消費者福利的重要指標，介紹如下。

商品的**需求量**是指消費者願意且有能力購買的數量。影響需求量的因素有很多，其中最為關鍵的是商品的價格。例如，有 4 人想各買某款機車一輛，他們願意出的最高價格如下表所示：

消費者	甲	乙	丙	丁
願意出的最高價格（千元）	60	58	55	50

根據上表，在其他條件相同下，

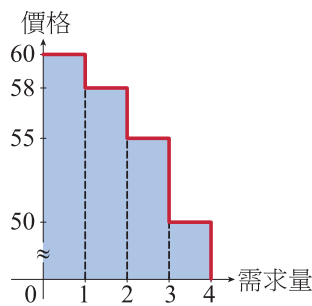
若價格為 58 千元，則甲、乙會買，丙、丁不會買，需求量为 2 輛；

若價格為 50 千元，則甲、乙、丙、丁都會買，需求量为 4 輛。

顯示：若價格降低，則需求量增大。我們將價格與需求量的關係，整理成表一，並圖示成圖 3：

價格 p 千元	消費者	需求量（輛）
$60 < p$	無	0
$58 < p \leq 60$	甲	1
$55 < p \leq 58$	甲、乙	2
$50 < p \leq 55$	甲、乙、丙	3
$0 < p \leq 50$	甲、乙、丙、丁	4

▲表一



▲圖 3

假設機車的價格從 60 千元逐漸降低至 50 千元，並依照 4 人願意出的最高價格一輛一輛賣給他們。此時，4 人支付的總金額為

$$60 + 58 + 55 + 50 = 223 \text{（千元）}，$$

等於圖 3 中紅色折線下的面積（即 4 個矩形面積的總和）。

當消費者很多、需求量很大時，圖 3 中紅色折線的階與階之高度差就會變得很小，為了方便討論，我們將它視為一條平滑曲線。事實上，這條曲線就是此款機車**需求函數**的圖形。將需求函數的定義敘述如下。

需求函數

將某商品的價格 y （元）與需求量 x （件）建立函數關係，記作 $y = D(x)$ ，稱 $D(x)$ 為該商品的**需求函數**。

如圖 4 (a)，設 $D(x)$ 為某商品的需求函數，且該商品在價格 p_1 時的需求量為 x_1 。當商品依照每個人願意出的最高價格一件一件賣給他們，直到出價降至 p_1 時，消費者支付的總金額等於區間 $[0, x_1]$ 內函數 $D(x)$ 圖形下的面積

$$\int_0^{x_1} D(x) dx。$$

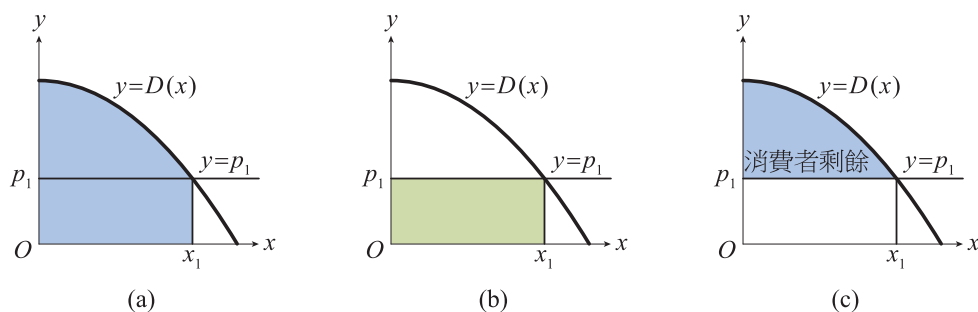
現實生活中，商品並不會依照每個人願意出的最高價格一件一件賣給他們，而是以同一個價格賣給消費者。如圖 4 (b)，當價格一律為 p_1 時，消費者實際支付的總金額等於區間 $[0, x_1]$ 內函數 $y = p_1$ 圖形（水平線）下的矩形面積

$$p_1 x_1。$$

如圖 4 (c)，我們將上述兩塊面積的差

$$\int_0^{x_1} D(x) dx - p_1 x_1，$$

稱為**消費者剩餘**。它是消費者覺得自己「賺到」的錢，也是消費者購買商品所感受到的好處。



▲圖 4

例題 4

在市場上，設某商品需求量 x 件的價格為

$$D(x) = -0.3x^2 + 200 \text{ (元)},$$

即 $D(x)$ 為該商品的需求函數。已知該商品的價格為 80 元，回答下列問題。

- (1) 求需求量。
- (2) 求消費者剩餘。

解

(1) 令

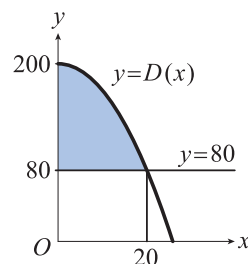
$$-0.3x^2 + 200 = 80,$$

整理得 $x^2 = 400$ ，解得 $x = 20$ （因為 $x > 0$ ）。

故該商品在價格 80 元時的需求量為 20 件。

- (2) 該商品在價格 80 元時的消費者剩餘等於右圖鋪色區域的面積，即

$$\begin{aligned} & \int_0^{20} (-0.3x^2 + 200) dx - 80 \times 20 \\ &= \left(-0.1x^3 + 200x \right) \Big|_0^{20} - 1600 \\ &= 3200 - 1600 = 1600 \text{ (元)}. \end{aligned}$$



隨堂練習

在市場上，設某商品需求量 x 件的價格為

$$D(x) = -0.2x + 50 \text{ (元)},$$

即 $D(x)$ 為該商品的需求函數。已知該商品的價格為 30 元，回答下列問題。

- (1) 求需求量。
- (2) 求消費者剩餘。

(1) 100 件
(2) 1000 元

隨堂練習解答

1 (1) 令

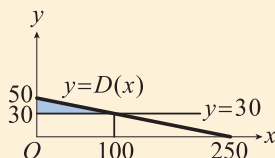
$$-0.2x + 50 = 30,$$

解得 $x = 100$ 。

故該商品在價格 30 元時的需求量為 100 件。

- (2) 該商品在價格 30 元時的消費者剩餘等於右圖鋪色區域的面積，即

$$\begin{aligned} & \int_0^{100} (-0.2x + 50) dx - 30 \times 100 \\ &= \left(-0.1x^2 + 50x \right) \Big|_0^{100} - 3000 \\ &= 4000 - 3000 = 1000 \text{ (元)}. \end{aligned}$$



(二) 生產者剩餘

現在我們轉向市場的另一邊，考慮生產者參與市場所獲取的利益。如同之前將消費者的需求量與價格建立函數關係，我們也將生產者的供給量與他願意出售的價格建立函數關係，並稱之為**供給函數**，敘述如下。

供給函數

將某商品的價格 y （元）與供給量 x （件）建立函數關係，記作 $y = S(x)$ ，稱 $S(x)$ 為該商品的**供給函數**。

如圖 5 (a)，設 $S(x)$ 為某商品的供給函數，且該商品在價格 p_2 時的供給量為 x_2 。當商品依照生產者願意出售的價格一件一件賣出，直到售價升至 p_2 時，生產者收到的總金額等於區間 $[0, x_2]$ 內函數 $S(x)$ 圖形下的面積

$$\int_0^{x_2} S(x) dx。$$

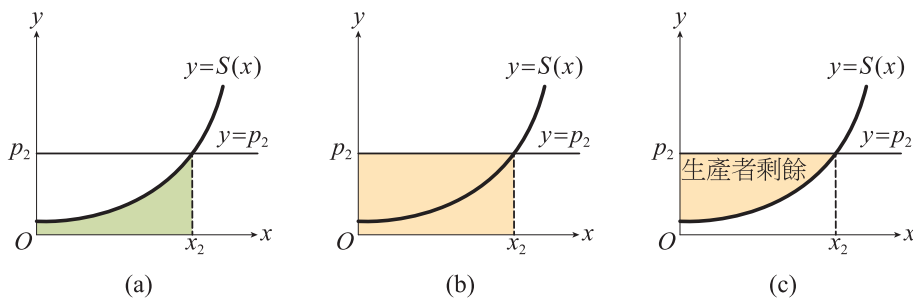
現實生活中，商品並不會依照生產者願意出售的價格一件一件售出，而是以同一個價格賣給消費者。如圖 5 (b)，當價格一律為 p_2 時，生產者實際收到的總金額等於區間 $[0, x_2]$ 內函數 $y = p_2$ 圖形（水平線）下的矩形面積

$$p_2 x_2。$$

如圖 5 (c)，我們將上述兩塊面積的差

$$p_2 x_2 - \int_0^{x_2} S(x) dx，$$

稱為**生產者剩餘**。它是衡量生產者參與市場的利益。

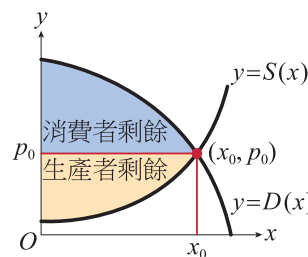


▲圖 5

教學小提醒

- 1 此處可多舉一些生活實例說明生產者剩餘。例如，老闆願意賣出每杯奶茶的最低價格為 20 元，而實際卻以 30 元的價格賣出，那麼生產者剩餘就是 $30 - 20 = 10$ 元。

當需求函數 $D(x)$ 與供給函數 $S(x)$ 的交點為 (x_0, p_0) 時，稱點 (x_0, p_0) 為均衡點， x_0 為均衡數量， p_0 為均衡價格，如圖 6 所示。



▲圖 6

例題 5

在市場上，已知某商品 x 件的需求函數與供給函數分別為

$$D(x) = -0.1x^2 + 285 \text{ (元)}, S(x) = 0.05x^2 + 3x + 60 \text{ (元)},$$

回答下列問題。

- (1) 均衡點為_____。
- (2) 求在均衡價格的生產者剩餘。

解

- (1) 令 $D(x) = S(x)$ ，則

$$-0.1x^2 + 285 = 0.05x^2 + 3x + 60, \text{ 即 } 0.15x^2 + 3x - 225 = 0,$$

化簡得

$$x^2 + 20x - 1500 = 0, \text{ 即 } (x - 30)(x + 50) = 0,$$

解得 $x = 30$ 或 -50 (不合)。

因此均衡數量 $x_0 = 30$ ，

且均衡價格 $p_0 = D(x_0) = -0.1 \times 30^2 + 285 = 195$ 。

故所求均衡點 (x_0, p_0) 為 $(30, 195)$ 。

- (2) 在均衡價格的生產者剩餘為

$$\begin{aligned} p_0 x_0 - \int_0^{x_0} S(x) dx &= 195 \times 30 - \int_0^{30} (0.05x^2 + 3x + 60) dx \\ &= 5850 - \left(0.05 \times \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 60x \right) \Big|_0^{30} \\ &= 5850 - 3600 = 2250 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

隨堂練習

在市場上，已知某商品 x 件的需求函數與供給函數分別為

$$D(x) = -3x^2 + 648 \text{ (元)}, S(x) = 5x^2 \text{ (元)},$$

回答下列問題。

- (1) 均衡點為_____。
- (2) 求在均衡價格的生產者剩餘。

(1) (9, 405)

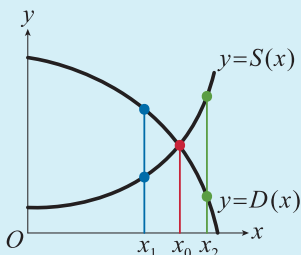
(2) 2430 元

在市場上，即使消費者與生產者只關心自己的福利，但市場價格就像一隻看不見的手，仍會引導市場達到供需平衡的狀態，使資源有效率地配置。

數學超展開

經濟學家將消費者剩餘與生產者剩餘的總和，稱為**總剩餘**，並用它作為衡量社會經濟福利的指標。我們想知道的是：當商品的產量為何時，總剩餘達到最大？

如右圖，需求曲線 $y = D(x)$ 的高度是消費者（買方）願意出的最高價格、供給曲線 $y = S(x)$ 的高度是生產者（賣方）願意出售的價格，數值 x_0 代表均衡數量。分成二種情形討論如下。



- (1) 當產量小於均衡數量 x_0 時（如圖中的 x_1 ），消費者願意出的價格高於生產者願意出售的價格，意味著產量過少，此時增加產量，可以提升總剩餘，直到產量增加到均衡數量為止。
- (2) 當產量大於均衡數量 x_0 時（如圖中的 x_2 ），消費者願意出的價格低於生產者願意出售的價格，意味著產量過多，此時減少產量，可以提升總剩餘，直到產量減少到均衡數量為止。

因此，讓市場自由運作，在產量為均衡數量時，總剩餘達到最大。

隨堂練習解答

- 1 (1) 令 $D(x) = S(x)$ ，
則 $-3x^2 + 648 = 5x^2$ ，
即 $x^2 = 81$ ，
解得 $x = 9$ 或 -9 （不合）。
因此均衡數量 $x_0 = 9$ ，
且均衡價格 $p_0 = D(x_0)$
 $= -3 \times 9^2 + 648 = 405$ 。
故所求均衡點 (x_0, p_0)
為 $(9, 405)$ 。

- (2) 在均衡價格的生產者剩餘為

$$\begin{aligned} p_0 x_0 - \int_0^{x_0} S(x) dx \\ &= 405 \times 9 - \int_0^9 5x^2 dx \\ &= 3645 - \left(\frac{5}{3} x^3 \right) \Big|_0^9 \\ &= 3645 - 1215 \\ &= 2430 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

教學小提醒

- 1 此處可作以下補充：
因為需求與供給是兩個相對的概念，物價變動時對消費者剩餘與生產者剩餘的影響也相反，當一方增加時，另一方就會減少。當消費者剩餘與生產者剩餘的總和愈大時，資源配置就愈有效率，因此政策制定者通常會根據兩者的總和到底是增加還是減少來調整政策方向。

6 習題

觀念澄清

函數 $f(x) = x^2$ 在區間 $[0, 2]$ 內函數值的平均等於下列哪一小題，對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) $f(1)$ 。

☐ (2) $\frac{f(0)+f(2)}{2}$ 。

☐ (3) $\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$ 。



一、基礎題

(1)× (2)× (3)○

- 1 求函數 $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$ 在區間 $[1, 3]$ 內函數值的平均。

16

- 2 已知某人騎單車出發後 t (秒) 的速率可表成函數

$$f(t) = -\frac{1}{12}t^2 + 2t \text{ (公尺/秒)}, 0 \leq t \leq 12,$$

求此人騎單車在時段 $0 \leq t \leq 12$ 內的平均速率。

8 公尺/秒

習題解答

觀念澄清

函數值的平均為 $\frac{1}{2-0} \int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$ 。

(1) ×：因為 $f(1) = 1 \neq \frac{4}{3}$ 。

(2) ×：因為 $\frac{f(0)+f(2)}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \neq \frac{4}{3}$ 。

(3) ○：由定義得知此小題正確。

一、基礎題

1. 根據定義，得函數值的平均為

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x)dx &= \frac{1}{2} \int_1^3 (-3x^2 + 12x + 5)dx \\ &= \frac{1}{2} (-x^3 + 6x^2 + 5x) \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{2} (42 - 10) \\ &= 16。 \end{aligned}$$

2. 根據定義，得 $f(t)$ 在區間 $[0, 12]$ 內函數值的平均為

$$\begin{aligned} \frac{1}{12-0} \int_0^{12} f(t)dt &= \frac{1}{12} \int_0^{12} \left(-\frac{1}{12} t^2 + 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{36} t^3 + t^2 \right) \Big|_0^{12} \\ &= \frac{1}{12} (96 - 0) \\ &= 8。 \end{aligned}$$

故在時段 $0 \leq t \leq 12$ 內的平均速率為 8（公尺／秒）。

3. (1) 增加的成本為

$$\int_{10}^{30} f(x)dx = \int_{10}^{30} (50 - 0.2x)dx = (50x - 0.1x^2) \Big|_{10}^{30} = 920 \text{ (元)}。$$

- (2) 因為共增加 $30 - 10 = 20$ 件，所以每件的平均成本為

$$\frac{\text{增加的成本}}{\text{件數}} = \frac{920}{20} = 46 \text{ (元)}。$$

或由函數值的平均之定義也可得每件的平均成本為

$$\frac{1}{30 - 10} \int_{10}^{30} f(x)dx = \frac{1}{20} \times 920 = 46 \text{ (元)}。$$

4. (1) 令

$$-2x + 500 = 300，$$

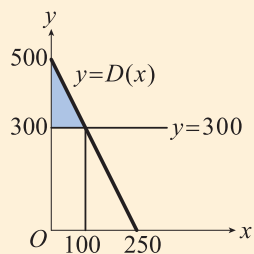
解得 $x = 100$ 。

故該商品在價格 300 元時的需求量為 100 件。

- (2) 該商品在價格 300 元時的消費者

剩餘等於右圖鋪色區域的面積，即

$$\begin{aligned} & \int_0^{100} (-2x + 500)dx - 300 \times 100 \\ &= \left(-x^2 + 500x \right) \Big|_0^{100} - 30000 \\ &= 40000 - 30000 = 10000 \text{ (元)}。 \end{aligned}$$



- 3 設生產 x 件產品的邊際成本函數為

$$f(x) = 50 - 0.2x \text{ (元)}。$$

當產量從 10 件增加到 30 件時，回答下列問題。

- (1) 求增加這 20 件產品所需的成本。
(2) 求增加這 20 件產品每件的平均成本。

(1) 920 元
(2) 46 元

- 4 在市場上，設某商品需求量 x 件的價格為

$$D(x) = -2x + 500 \text{ (元)}，$$

即 $D(x)$ 為該商品的需求函數。已知該商品的價格為 300 元，回答下列問題。

- (1) 求需求量。
(2) 求消費者剩餘。

(1) 100 件
(2) 10000 元



- 5 在市場上，已知某商品 x 件的需求函數與供給函數分別為

$$D(x) = -0.32x + 7 \text{ (元)}, S(x) = 0.18x + 2 \text{ (元)},$$

回答下列問題。

- (1) 求均衡點。
(2) 求在均衡價格的生產者剩餘。

(1) (10, 3.8)

(2) 9 元

二、進階題

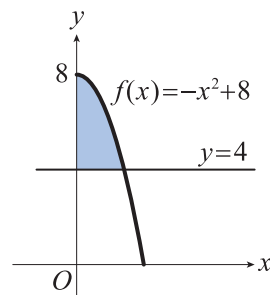
- 6 設某處在時間 t (時) 的溫度可表成函數

$$f(t) = -t^2 + 8t \text{ (}^\circ\text{C)}, 3 \leq t \leq 6。$$

已知在時段 $3 \leq t \leq 6$ 內，時間 t_0 (時) 的溫度恰好等於平均溫度，求 t_0 的值。

3 或 5

- 7 右圖的鋪色區域是函數 $f(x) = -x^2 + 8$ 的圖形與 y 軸，
 $y = 4$ 所圍成的區域，求此鋪色區域的面積。



$\frac{16}{3}$

5. (1) 令 $D(x) = S(x)$ ，則

$$-0.32x + 7 = 0.18x + 2, \text{ 即 } 0.5x = 5,$$

解得 $x = 10$ 。

因此均衡數量 $x_0 = 10$ ，且均衡價格 $p_0 = D(x_0) = -0.32 \times 10 + 7 = 3.8$ 。

故所求均衡點 (x_0, p_0) 為 $(10, 3.8)$ 。

(2) 在均衡價格的生產者剩餘為

$$\begin{aligned} p_0 x_0 - \int_0^{x_0} S(x) dx &= 3.8 \times 10 - \int_0^{10} (0.18x + 2) dx \\ &= 38 - \left(0.09x^2 + 2x \right) \Big|_0^{10} \\ &= 38 - 29 = 9 \text{ (元)}。 \end{aligned}$$

二、進階題

6. 根據定義，得 $f(t)$ 在區間 $[3, 6]$ 內函數值的平均為

$$\begin{aligned} \frac{1}{6-3} \int_3^6 f(t) dt &= \frac{1}{3} \int_3^6 (-t^2 + 8t) dt \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 \right) \Big|_3^6 \\ &= \frac{1}{3} (72 - 27) \\ &= 15。 \end{aligned}$$

故在時段 $3 \leq t \leq 6$ 內的平均溫度為 15°C 。

令

$$-t^2 + 8t = 15,$$

整理得 $t^2 - 8t + 15 = 0$ ，解得 $t = 3$ 或 5 。

因為 $3 \leq t \leq 6$ ，所以 $t_0 = 3$ 或 5 。

7. 令 $-x^2 + 8 = 4$ ，整理得 $x^2 - 4 = 0$ ，

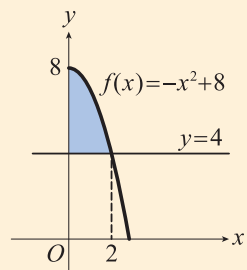
解得 $x = \pm 2$ 。因此， $f(x)$ 的圖形與 $y = 4$

在第一象限的交點為 $(2, 4)$ 。

再由定積分與函數圖形下的面積，

得鋪色區域的面積為

$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2 + 8) dx - 2 \times 4 \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 8x \right) \Big|_0^2 - 8 \\ &= \frac{40}{3} - 8 = \frac{16}{3}。 \end{aligned}$$



8. (1) 令 $D(x) = S(x)$ ，則

$$-0.1x^2 + 20000 = 0.06x^2 + 16x + 800, \text{ 即 } 0.16x^2 + 16x - 19200 = 0,$$

同除以 0.16，得

$$x^2 + 100x - 120000 = 0, \text{ 即 } (x - 300)(x + 400) = 0,$$

解得 $x = 300$ 或 -400 （不合）。

因為 $D(300) = -0.1 \times 300^2 + 20000 = 11000$ ，所以均衡點為 $(300, 11000)$ 。

(2) 在均衡價格的消費者剩餘為

$$\begin{aligned} & \int_0^{300} (-0.1x^2 + 20000) dx - 11000 \times 300 \\ &= \left(-\frac{1}{30}x^3 + 20000x \right) \Big|_0^{300} - 3300000 \\ &= 5100000 - 3300000 \\ &= 1800000 \text{ (元) }。 \end{aligned}$$

(3) 在均衡價格的生產者剩餘為

$$\begin{aligned} & 11000 \times 300 - \int_0^{300} (0.06x^2 + 16x + 800) dx \\ &= 3300000 - \left(0.02x^3 + 8x^2 + 800x \right) \Big|_0^{300} \\ &= 3300000 - 1500000 \\ &= 1800000 \text{ (元) }。 \end{aligned}$$

- 8 在市場上，已知某商品 x 件的需求函數與供給函數分別為

$$D(x) = -0.1x^2 + 20000 \text{ (元)}, S(x) = 0.06x^2 + 16x + 800 \text{ (元)},$$

回答下列問題。

- (1) 求均衡點。
- (2) 求在均衡價格的消費者剩餘。
- (3) 求在均衡價格的生產者剩餘。

(1) (300, 11000)

(2) 1800000 元

(3) 1800000 元

