

3 複數與複數平面

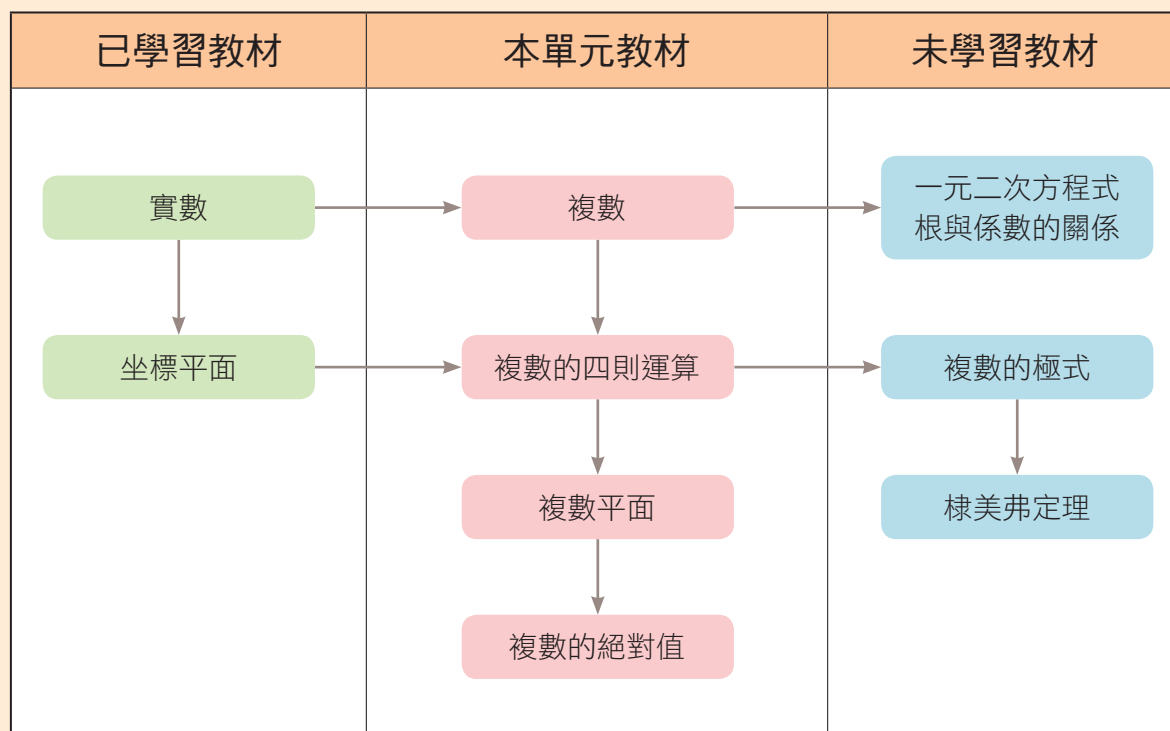
一 教材摘要

首先引進複數，由虛根定義出虛數後，介紹複數的四則運算。接著介紹複數平面、複數的絕對值，並說明複數絕對值的幾何意義。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 認識虛數 i 及複數 $a+bi$。 2. 能作複數的四則運算。 3. 了解複數平面的意義。 4. 了解複數的絕對值與其幾何意義。	12

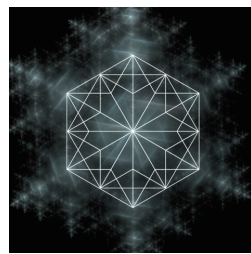
教材地位分析



3 複數與複數平面

高一階段我們介紹過實數系的概念，實數系由有理數和無理數所組成，本單元將實數系推廣到更大的數系——複數，並介紹複數的幾何表示方式。

對於自然界或是天文學中較複雜的幾何問題，常常會利用複數的幾何表示方式來進一步分析其架構，例如生活中常見的雪花，或是天文學中的拉格朗日點等。



▲圖 1

教學要點

- 1 介紹複數的定義及其四則運算。

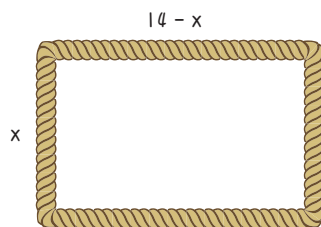
教學小提醒

- 1 此處可融入虛數數學史的內容。

甲 複數

(一) 複數的定義

假設一長方形的周長為 28，面積為 50，要怎麼求這個長方形的邊長呢？首先，我們設長方形的邊長分別為 x 與 $14-x$ ，如圖 2 所示。接著，利用其面積為 50，可得 $x^2 - 14x + 50 = 0$ ，這個方程式的解是什麼呢？



▲圖 2

利用國中學過的配方法，可將方程式 $x^2 - 14x + 50 = 0$ 配成 $(x-7)^2 = -1$ 。因為沒有任何實數的平方為 -1 ，所以 $(x-7)^2 = -1$ 沒有實數解，表示不存在滿足以上敘述的長方形。如果我們仍要繼續進行運算的話，會得到

$$x = 7 \pm \sqrt{-1}。$$

上式的 $\sqrt{-1}$ 是什麼呢？我們知道方程式 $x^2 = 1$ 的解為

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1,$$

於是我們仿照方程式 $x^2 = 1$ 解的表示方法，將 $x^2 = -1$ 的解規定為

$$x = \pm\sqrt{-1},$$

並用符號 i 來表示 $\sqrt{-1}$ 。

i 的規定

規定 $i = \sqrt{-1}$ ，且 i 滿足下列性質。

- (1) $i^2 = -1$ 。 (2) 當實數 $b > 0$ 時， $\sqrt{-b} = \sqrt{b}i$ 。

例如：(1) $x^2 = -1$ 的解為 $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ 。

(2) $x^2 = -2$ 的解為 $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$ 。

(3) $x^2 = -9$ 的解為 $x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}i = \pm 3i$ 。

隨堂練習

以 i 表示下列各方程式的解。

(1) $x^2 = -3$ 。

(2) $x^2 + 4 = 0$ 。

(3) $x^2 = -12$ 。

(1) $\pm\sqrt{3}i$ (2) $\pm 2i$ (3) $\pm 2\sqrt{3}i$

由以上的規定，可得 $x^2 - 14x + 50 = 0$ 的解為

$$x = 7 \pm \sqrt{-1} = 7 \pm i。$$

像 $7 \pm i$ 這種形式的數，稱為**複數**。

複數的定義

設 a, b 為實數，形如 $a + bi$ 的數稱為複數，其中 a 稱為 $a + bi$ 的實部， b 稱為 $a + bi$ 的虛部。

隨堂練習解答

- ① (1) $x^2 = -3$ 的解為 $x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}i$ 。
 (2) $x^2 + 4 = 0$ 的解為 $x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \pm 2i$ 。
 (3) $x^2 = -12$ 的解為 $x = \pm\sqrt{-12} = \pm\sqrt{12} \times \sqrt{-1} = \pm\sqrt{12}i = \pm 2\sqrt{3}i$ 。

對於複數 $a+bi$ (其中 a, b 為實數)，我們進一步說明如下。

(1) 形如 $a+(-b)i$ 的複數可以記為 $a-bi$ ，即 $a+(-b)i = a-bi$ ；形如 $a+0i$ 的複數可以記為 a ，即 $a+0i = a$ ；形如 $0+bi$ 的複數可以記為 bi ，即 $0+bi = bi$ ，且 $1i$ 可再簡記為 i 。

(2) 當虛部 $b=0$ 時， $a+bi = a+0i = a$ 相當於一個實數，也就是說，實數可視為虛部為 0 的複數。例如： $4, 0, \sqrt{2}, \pi$ 等都是實數，也是複數。

(3) 當虛部 $b \neq 0$ 時，稱 $a+bi$ 為**虛數**。例如：

$1+2i, 3i$ 等都是虛數，也是複數。

由此可知，實數是複數的一部分，因而我們把實數系擴張成一個較大的數系，稱為**複數系**。

複數

實數	虛數
$4, 0, \sqrt{2}, \pi, \dots$	$1+2i, 3i, \dots$

▲圖 3

例題 1

求下列各複數的實部與虛部。

- (1) $1-2i$ 。 (2) 4 。 (3) $3i$ 。

解

(1) 因為 $1-2i = 1+(-2)i$ ，所以 $1-2i$ 的實部為 1，虛部為 -2 。

(2) 因為 $4 = 4+0i$ ，所以 4 的實部為 4，虛部為 0。

(3) 因為 $3i = 0+3i$ ，所以 $3i$ 的實部為 0，虛部為 3。

隨堂練習

求下列各複數的實部與虛部。

- (1) $\sqrt{2}+3i$ 。 (2) $-\sqrt{5}i$ 。 (3) 0 。

- (1) 實部 $\sqrt{2}$ ，虛部 3
(2) 實部 0，虛部 $-\sqrt{5}$
(3) 實部 0，虛部 0

接下來，我們定義複數的相等。

複數的相等

當兩個複數的實部相等、虛部也相等時，稱這兩個複數相等。也就是說，當 a, b, c, d 為實數時， $a+bi = c+di$ 的意思是 $a=c$ 且 $b=d$ 。

教學小提醒

1 可延伸說明

$$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0, b=0。$$

隨堂練習解答

- 1 (1) $\sqrt{2}+3i$ 的實部為 $\sqrt{2}$ ，虛部為 3。
(2) 因為 $-\sqrt{5}i = 0-\sqrt{5}i$ ，所以 $-\sqrt{5}i$ 的實部為 0，虛部為 $-\sqrt{5}$ 。
(3) 因為 $0 = 0+0i$ ，所以 0 的實部為 0，虛部為 0。

練習一道複數相等的例題。

例題 2

已知實數 a, b 滿足 $(a-2)+4i=1+2bi$ ，求 a, b 的值。

解

根據複數相等的定義，得 $a-2=1$ 與 $4=2b$ ，解得 $a=3, b=2$ 。

隨堂練習

已知實數 a, b 滿足 $(a+b+4)+(a-2)i=0$ ，求 a, b 的值。

$$a=2, b=-6$$

(二) 複數的四則運算

有了複數後，我們希望複數的運算也能和實數一樣，滿足交換律、結合律與分配律，於是規定如下。

複數的加法、減法與乘法

設 a, b, c, d 為實數。

(1) 加法： $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ 。

(2) 減法： $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ 。

(3) 乘法： $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 。

上述複數的乘法運算是基於我們希望複數能如同實數一樣，具有乘法對加法的分配律，在此前提下，我們自然會得到

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (a+bi)c + (a+bi)di \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac + bci + adi - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

補充例題

1 已知 a, b 為實數且
 $a(1+2i)+b(1-i)$
 $= -3+6i$,

求 $3a-2b$ 的值。

解：

$$\begin{aligned}(a+b) + (2a-b)i \\ = -3 + 6i\end{aligned}$$

推得 $\begin{cases} a+b=-3 & \text{①} \\ 2a-b=6 & \text{②} \end{cases}$

解①②得 $a=1, b=-4$,

故 $3a-2b=11$ 。

隨堂練習解答

1 根據複數的相等，得 $a+b+4=0$ 與 $a-2=0$ ，解得 $a=2, b=-6$ 。

來看一道複數加法、減法與乘法的例題。

例題 3

已知複數 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 3i$, 求下列各式的值。

(1) $z_1 + z_2$ ° (2) $z_1 - z_2$ ° (3) $z_1 z_2$ °

解

$$(1) z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (5 - 3i) = (3 + 5) + (4 - 3)i = 8 + i °$$

$$(2) z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + (4 - (-3))i = -2 + 7i °$$

$$\begin{aligned} (3) z_1 z_2 &= (3 + 4i)(5 - 3i) = (3 + 4i) \times 5 + (3 + 4i)(-3i) \\ &= 15 + 20i - 9i - 12i^2 \\ &= 27 + 11i ° \end{aligned}$$

隨堂練習

已知複數 $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$, 求下列各式的值。

(1) $z_1 + z_2$ ° (2) $z_1 - z_2$ ° (3) $z_1 z_2$ °

(1) 4 (2) $2\sqrt{3}i$ (3) 7

由複數的加法與乘法規定，可以驗證下列運算性質皆成立。

基本性質

若 z_1, z_2, z_3 為三個任意的複數，則下列各性質成立。

(1) 交換律： $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ；

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 °$$

(2) 結合律： $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ；

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 °$$

(3) 分配律： $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ °

補充例題

- 1 已知複數 z_1 的虛部為 3，
複數 z_2 的實部為 1，且 $z_1 - z_2$ 的虛部為 2， $z_1 z_2$ 的實部為 4，求複數 z_1 的值。

解：

設 $z_1 = a + 3i$, $z_2 = 1 + bi$
(a, b 為實數)，

可得 $z_1 - z_2$
 $= (a - 1) + (3 - b)i$ ，

且 $z_1 z_2$
 $= (a + 3i)(1 + bi)$
 $= (a - 3b) + (ab + 3)i$ ，

依題意可得 $\begin{cases} 3 - b = 2 \\ a - 3b = 4 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} b = 1 \\ a = 7 \end{cases}$ °

故 $z_1 = 7 + 3i$ °

隨堂練習解答

- 1 (1) $z_1 + z_2 = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = (2 + 2) + (\sqrt{3} - \sqrt{3})i = 4$ °
(2) $z_1 - z_2 = (2 + \sqrt{3}i) - (2 - \sqrt{3}i) = (2 - 2) + (\sqrt{3} - (-\sqrt{3}))i = 2\sqrt{3}i$ °
(3) $z_1 z_2 = (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 2^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 - (-3) = 7$ °

根據以上的基本性質，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} &= (\sqrt{2}i) \times (\sqrt{3}i) = \sqrt{2} \times i \times \sqrt{3} \times i = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times i \times i \\ &= (\sqrt{2} \times \sqrt{3})(i \times i) = -\sqrt{6}.\end{aligned}$$

設 z 為複數，規定 $z^2 = zz$, $z^3 = z^2z$, ...。一般而言，設 n 為大於 1 的正整數，規定

$$z^n = z^{n-1}z.$$

例題 4

(1) 求 $i, i^2, \dots, i^8$ 的值。

(2) 求 $i + i^2 + \dots + i^8$ 的值。

解

$$(1) i^1 = i.$$

$$i^2 = -1.$$

$$i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i.$$

$$i^4 = i^3 \times i = (-i) \times i = -i^2 = 1.$$

$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i.$$

$$i^6 = i^4 \times i^2 = 1 \times (-1) = -1.$$

$$i^7 = i^4 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i.$$

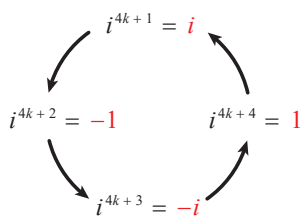
$$i^8 = i^4 \times i^4 = 1 \times 1 = 1.$$

$$(2) i + i^2 + \dots + i^8 = i + (-1) + (-i) + 1 + i + (-1) + (-i) + 1 = 0.$$

一般而言，當 n 為正整數時， i^n 只有 $i, -1, -i$ 與 1 四個可能的值，而且它們是依序循環不息的，如圖 4 所示，即

$$i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, i^{4k+4} = 1,$$

其中 k 為非負整數。



▲圖 4

補充例題

1 求

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-2} \times \sqrt{-3} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-6} \times \sqrt{-8} \text{ 的值。}$$

解：原式

$$\begin{aligned}&= i \times \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i \times 2i \times \sqrt{6}i \times 2\sqrt{2}i \\ &= 24\sqrt{2}i^6 = 24\sqrt{2}i^2 = -24\sqrt{2}.\end{aligned}$$

1

隨堂練習

求下列各式的值。

(1) i^{50} 。

(2) $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15}$ 。

(1) -1 (2) $-1-i$

教學小提醒

1 複數 z 的共軛複數記做 $\bar{z}$ 。

共軛複數的性質：

對於複數 z, w ，有以下的性質：

(1) $\overline{\bar{z}} = z$ 。

(2) $|\bar{z}| = |z|$ 。

(3) $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ ，其中 n 為整數。

(4) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ 。

(5) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$ 。

(6) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ 。

(7) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ，其中 $w \neq 0$ 。

2 複數相除時，分子、分母同乘分母的共軛複數，這裡可與學生過去學習有理化的經驗作連結。

在定義複數的除法 $\frac{a+bi}{c+di}$ （其中 $c+di \neq 0$ ）時，我們類比實數的分式有理化

運算，希望將 $\frac{a+bi}{c+di}$ 中原本為複數的分母化為實數，並說明如下。

首先，由於 $(c+di)(c-di) = c^2 + d^2$ 是一個實數，此時我們稱 $c+di$ 與 $c-di$ 互為共軛複數；於是，我們將 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的分子與分母同乘 $c-di$ ，可得

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}。$$

最後，將 $\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ 寫成複數的形式 $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$ 。

複數的除法

設 a, b, c, d 為實數，且 c, d 不同時為 0。

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i。$$

54

隨堂練習解答

1 (1) $i^{50} = i^{48} \times i^2 = (i^4)^{12} \times i^2 = -1$ 。

(2) $i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = ((-1) + (-i) + 1 + i) + (-1) + (-i) = -1 - i$ 。

練習複數的除法。

例題 5將下列各複數表示成 $a+bi$ (其中 a, b 為實數) 的形式。

$$(1) \frac{1}{3+4i} \quad (2) \frac{2+i}{1-i}$$

解

$$(1) \frac{1}{3+4i} = \frac{1 \times (3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2-(4i)^2} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} + \left(-\frac{4}{25}\right)i。$$

$$(2) \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i-1}{1^2-i^2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i。$$

事實上，複數的除法是乘法的反運算，以例題 5 (2) 為例，將所得的結果 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ 與原分式的分母 $1-i$ 相乘即可得到原分式的分子 $2+i$ ，也就是說，

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)(1-i) = \left(\frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2}(-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(-1) + \frac{3}{2} \times 1\right)i = 2+i。$$

隨堂練習將下列各複數表示成 $a+bi$ (其中 a, b 為實數) 的形式。

$$(1) \frac{1+3i}{-1+3i} \quad (2) \frac{2+i}{i}$$

$$(1) \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)i \quad (2) 1 + (-2)i$$

補充例題**1** 已知 a, b 為實數且

$$\frac{3}{a+bi} = 4-3i, \text{ 求 } a, b \text{ 的值。}$$

解：

$$\begin{aligned} a+bi &= \frac{3}{4-3i} \\ &= \frac{3}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i} \\ &= \frac{12+9i}{25}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{1} \quad a = \frac{12}{25}, b = \frac{9}{25}。$$

隨堂練習解答

$$\mathbf{1} (1) \frac{1+3i}{-1+3i} = \frac{(1+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-1-3i-3i+9}{(-1)^2-(3i)^2} = \frac{8-6i}{10} = \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)i。$$

$$(2) \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i) \times i}{i \times i} = \frac{2i-1}{-1} = 1 + (-2)i。$$

教學要點

- 1 介紹複數平面的定義與複數絕對值的幾何意涵。

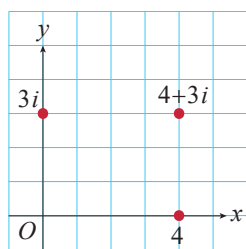
教學小提醒

- 1 數乙沒有複數的極式，也沒有主幅角的相關課題，且沒有棣美弗定理與 n 次方根。
- 2 除了理解每一個複數與複數平面的點形成一一對應的關係之外，也可說明原點到每一個複數的幾何位置等同於向量的幾何概念。

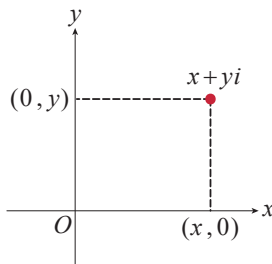
乙 複數平面

十九世紀初，一些數學家提出將複數表示在平面上的觀點，讓抽象的複數有了較為具體的形象，也進而讓複數的研究快速發展，其中較為知名的兩位為高斯與阿爾岡，圖 5 是為了紀念高斯而發行的複數平面郵票。接著，來介紹複數的幾何表示方式。

在圖 6 (a) 中，我們將坐標平面上的點 $(4, 3)$ 代表複數 $4+3i$ ，點 $(4, 0)$ 代表實數 4 ，點 $(0, 3)$ 代表虛數 $3i$ 。



(a)



(b)

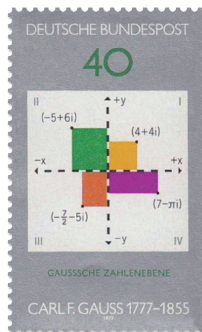
▲圖 6

一般而言，可將坐標平面上的點 (x, y) 對應到複數 $x+yi$ ，如圖 6 (b) 所示；反之，可將複數 $x+yi$ （其中 x, y 為實數）對應到坐標平面上的點 (x, y) 。如此一來，坐標平面上的每一點都可以代表一個複數，且每一個複數都可以在坐標平面上標出位置。我們把表示複數的坐標平面，稱為**複數平面**（又稱高斯平面或阿爾岡平面）。

(1) x 軸上的點 $(x, 0)$ 對應所有的實數 $x+0i$ ，而 x 軸又稱為**實軸**。

(2) y 軸上的點 $(0, y)$ 對應所有實部為 0 的虛數 $0+yi$ ，而 y 軸又稱為**虛軸**。

當坐標平面上的 P 點對應複數 $z = x+yi$ 時，稱 $z = x+yi$ 為 P 點的複數坐標，記為 $P(z)$ 或 $P(x+yi)$ 。



▲圖 5

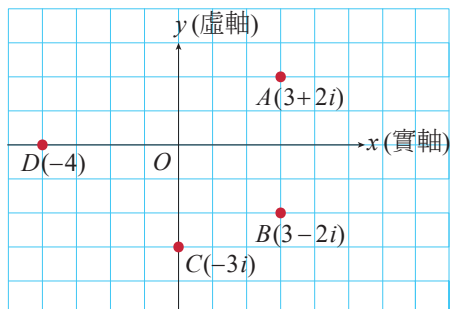
例題 6

在複數平面上標出下列複數所代表的點。

$$A(3+2i), B(3-2i), C(-3i), D(-4)。$$

解

各點的位置如下圖。



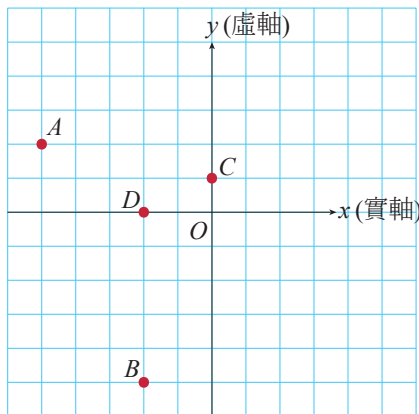
教學小提醒

- 1 老師可多說明各點的位置：本題中的 C 是純虛數，在 y 軸上； D 是實數，在 x 軸上。

例題 6 中的 $3+2i$ 與 $3-2i$ 在複數平面上的位置對稱於實軸。一般而言，複數 $a+bi$ 與其共軛複數 $a-bi$ 在複數平面上的位置會對稱於實軸。

隨堂練習

如右圖，分別寫出複數平面上 A, B, C, D 所代表的複數。



$$A(-5+2i), B(-2-5i), C(i), D(-2)$$

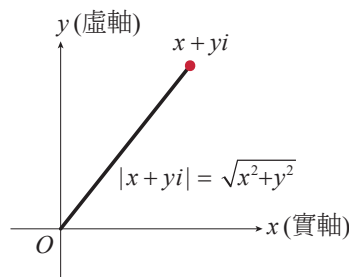
隨堂練習解答

- 1 各點所代表的複數為

$$A(-5+2i), B(-2-5i), C(i), D(-2)。$$

在數線上， $|x|$ 表示點 $P(x)$ 與原點的距離。在複數平面上，我們將複數 $z = x + yi$ 的**絕對值**規定為點 (x, y) 與原點 $(0, 0)$ 的距離，並表示成

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}。$$



▲圖 7

複數絕對值的定義

複數 $z = x + yi$ 的絕對值為 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

給定兩複數 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ ，其差為

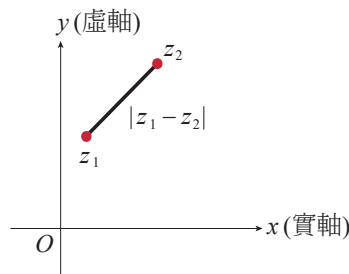
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i，$$

根據複數絕對值的定義，可得

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}。$$

因此， $|z_1 - z_2|$ 的幾何意涵為

複數平面上 z_1 與 z_2 兩點的距離。



▲圖 8

補充例題

1 求 $\left| \frac{(1+2i)^2(2+3i)^3}{(3-2i)^3(3+4i)^2} \right|$ 的值。

$$\begin{aligned} \text{解：} & \left| \frac{(1+2i)^2(2+3i)^3}{(3-2i)^3(3+4i)^2} \right| \\ &= \frac{|1+2i|^2 |2+3i|^3}{|3-2i|^3 |3+4i|^2} \\ &= \frac{(\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{13})^3}{(\sqrt{13})^3 \times 5^2} \\ &= \frac{1}{5}。 \end{aligned}$$

例題 7

在複數平面上，設 $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -3i$ 。

(1) 求 $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 - z_2|$ 的值。

(2) 求 z_1 與 z_2 兩點的距離。

解

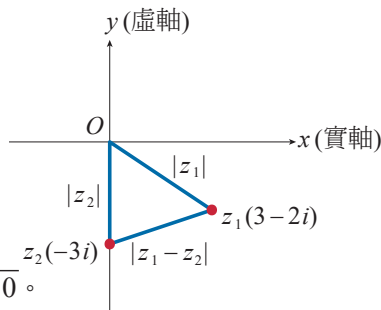
(1) 根據複數絕對值的定義，得

$$|z_1| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}；$$

$$|z_2| = |-3i| = |0 + (-3)i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3；$$

$$|z_1 - z_2| = |(3 - 2i) - (-3i)| = |3 + i| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}。$$

(2) 複數 z_1 與 z_2 兩點的距離為 $|z_1 - z_2| = \sqrt{10}$ 。



隨堂練習

已知 $z = 3 + 4i$ ，且 $\bar{z}$ 表複數 z 的共軛複數，求下列各絕對值。

(1) $|z|$ 。

(2) $|\bar{z}|$ 。

(3) $|z - \bar{z}|$ 。

(1) 5 (2) 5 (3) 8

一些以前學過的簡單幾何圖形也可以用複數與它的絕對值來表示，舉例如下。

例題 8

在複數平面上，所有滿足方程式 $|z - i| = |z + 1|$ 的複數 z 形成什麼圖形？

解

解法一

將方程式 $|z - i| = |z + 1|$ 改寫為

$$|z - (0 + i)| = |z - (-1 + 0i)|,$$

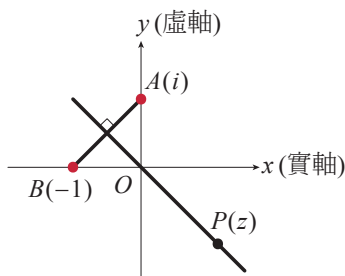
由此可知，複數平面上點 $P(z)$ 分別到點 $A(0 + i) = A(i)$ 與點 $B(-1 + 0i) = B(-1)$ 的距離相等；也就是說，

點 $P(z)$ 位在 $\overline{AB}$ 的中垂線上。

反之，位在 $\overline{AB}$ 中垂線上的點也都滿足此方程式。

因此，所有滿足方程式的複數 z 會形成 $\overline{AB}$ 的中垂線。

故其圖形為一直線。



教學小提醒

- 1 本題提供代數與幾何兩個觀點的解法，老師可以互相搭配說明。

隨堂練習解答

- 1 (1) 根據複數絕對值的定義，得 $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 。

(2) 因為 $\bar{z} = 3 - 4i$ ，所以 $|\bar{z}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ 。

(3) 因為 $z - \bar{z} = 8i$ ，所以 $|z - \bar{z}| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$ 。

解法二

設 $z = x + yi$ (x, y 為實數)。因為 $|z - i| = |z + 1|$ ，所以

$$|x + (y - 1)i| = |(x + 1) + yi|。$$

根據複數絕對值的定義，得

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}，$$

將等號兩邊平方後整理得

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2，$$

化簡得

$$x + y = 0。$$

反之，若 $x + y = 0$ ，則 $z = x + yi = x - xi$ 也滿足方程式 $|z - i| = |z + 1|$ 。

故所有滿足方程式的複數 z 所形成的圖形為一直線（即解法一中 $\overline{AB}$ 的中垂線）。

1

隨堂練習

在複數平面上，所有滿足方程式 $|z - 1 - i| = 2$ 的複數 z 形成什麼圖形？

一圓

隨堂練習解答

1 將方程式 $|z - 1 - i| = 2$ 改寫為 $|z - (1 + i)| = 2$ ，

由此可知，複數平面上點 $P(z)$ 到點 $A(1 + i)$ 的距離等於 2；

也就是說，點 $P(z)$ 位在以 A 為圓心、半徑為 2 的圓上。

反之，位在以 A 為圓心、半徑為 2 的圓上的點也都滿足此方程式。

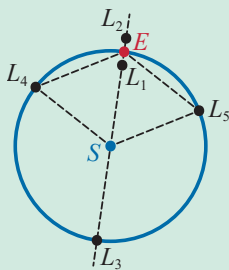
因此，所有滿足方程式的複數 z 會形成以 A 為圓心、半徑為 2 的圓。

故其圖形為一圓。

最後來看一道應用問題。

例題 9

如圖，假設行星 E 以圓形軌道環繞恆星 S ，在此軌道平面上，當物體被放在 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 、 L_5 這五點的任何一點時，兩星球作用在此物體上的引力剛好會互相抵銷，並使得物體與這兩星球的相對位置保持不變，這五個點稱為拉格朗日點。今將 S 置於複數平面的原點且已知 E 對應的複數為 $2+8\sqrt{3}i$ ，試回答下列各問題。



(1) 選出行星 E 軌道半徑的長度。(單選)

- ① 7 ② $7\sqrt{3}$ ③ 14 ④ $14\sqrt{2}$ ⑤ $14\sqrt{3}$ 。

(2) 已知 L_1 對應的複數為 $\frac{12}{7} + \frac{48}{7}\sqrt{3}i$ ，求 $\overline{L_1E}$ 的長度。

(3) 已知 L_3 與 E 的中點為 S ，求 L_3 所對應的複數。

解

(1) 軌道半徑為 $\overline{SE} = |2+8\sqrt{3}i| = \sqrt{2^2 + (8\sqrt{3})^2} = 14$ 。故選 ③。

(2) 根據複數絕對值的定義，得

$$\overline{L_1E} = \left| (2+8\sqrt{3}i) - \left(\frac{12}{7} + \frac{48}{7}\sqrt{3}i \right) \right| = \left| \frac{2}{7} + \frac{8}{7}\sqrt{3}i \right| = \sqrt{\left(\frac{2}{7} \right)^2 + \left(\frac{8}{7}\sqrt{3} \right)^2} = 2。$$

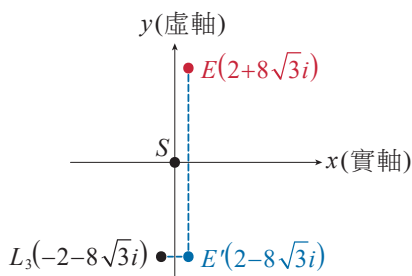
(3) 因為 L_3 與 E 的中點為 S ，所以可以

先將 E 對應的複數 $2+8\sqrt{3}i$ 對實軸做

對稱得到 $E'(2-8\sqrt{3}i)$ ，再將 $2-8\sqrt{3}i$

對虛軸做對稱，如圖所示，便可得到

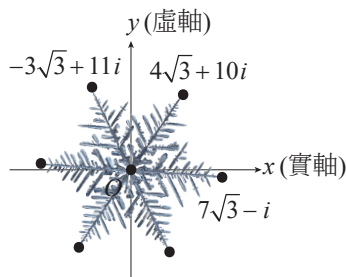
L_3 所對應的複數為 $-2-8\sqrt{3}i$ 。



1

隨堂練習

雪花是自然界中冰的一種結晶，其六個雪柱的頂點構成正六邊形。將此雪花的中心點貼合在複數平面的原點，如右圖所示。設其中相鄰的三個雪柱頂點所對應之複數分別為 $4\sqrt{3}+10i$ ， $-3\sqrt{3}+11i$ 與 $7\sqrt{3}-i$ 。



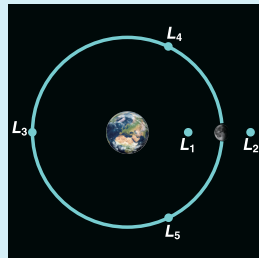
(1) 求此正六邊形的邊長。

(2) 求另外三個雪柱的頂點所對應之複數。

(1) $2\sqrt{37}$ (2) $-4\sqrt{3}-10i$, $3\sqrt{3}-11i$ 與 $-7\sqrt{3}+i$

數學超展開

拉格朗日點是天體力學中數學分析的應用，在 1767 年，數學家歐拉先推算出其中三個點（如圖中的 L_1 、 L_2 、 L_3 ），之後在 1772 年數學家拉格朗日推算出另外兩個點（ L_4 與 L_5 ），也就是說，總共有五個位置可以放入小物體，並使得該物體與這兩星球的相對位置保持不變。



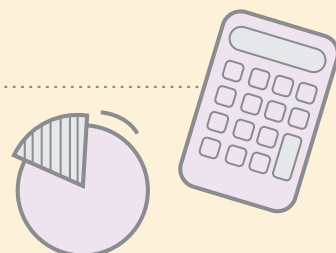
雖然在 18 世紀數學家們就已經推算出拉格朗日點，但直到 1906 年人類才透過天文觀測發現位於木星與太陽的拉格朗日點上之第 588 號小行星。近期，拉格朗日點被應用在太空望遠鏡上，例如月球與地球的拉格朗日點 L_2 已經被列入可能可以設置太空望遠鏡的點，此點位於月球背面，可協助我們探索月球背面的資訊。

在拉格朗日點上的太空望遠鏡不需要太多的燃料便可與月球與地球的相對位置保持不變，以穩定地進行長時間的觀測。

62

隨堂練習解答

- 1 (1) 正六邊形的邊長為 $\left| (7\sqrt{3}-i) - (4\sqrt{3}+10i) \right| = |3\sqrt{3}-11i| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-11)^2} = 2\sqrt{37}$ 。
 (2) 另外三個雪柱的頂點所對應之複數分別為 $-4\sqrt{3}-10i$ ， $3\sqrt{3}-11i$ 與 $-7\sqrt{3}+i$ 。



習題解答

觀念澄清

$$(1) \bigcirc : i^{17} = (i^4)^4 \times i = i \text{。}$$

$$(2) \times : \sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = \sqrt{3}i \times \sqrt{5}i = -\sqrt{15} \text{。}$$

$$(3) \bigcirc : |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \quad |-5i| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5 \text{。}$$

一、基礎題

$$1. \text{ 將原式整理成 } (3a+2b) + (2a-2b)i = 17-2i \text{，}$$

$$\text{根據複數的相等，得 } \begin{cases} 3a+2b=17 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}, \text{ 解得 } a=3, b=4 \text{。}$$

$$2. (1) (2-3i) - (-3+5i) = (2+3) + (-3-5)i = 5-8i \text{。}$$

$$(2) \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(2-1) + (-2-1)i}{1-i^2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{。}$$

$$(3) (i^3+1)(i^6-i^3+1) = (i^3)^3 + 1 = i^9 + 1 = 1 + i \text{。}$$

$$3. (1) B(-12+5i), C(-12-5i) \text{。}$$

$$(2) \overline{OA} = |z| = \sqrt{12^2+5^2} = 13 \text{。}$$

3 習題

觀念澄清

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) $i^{17} = i$ 。

☐ (2) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = \sqrt{15}$ 。

☐ (3) $|3+4i| = |-5i|$ 。



一、基礎題

(1) ○ (2) × (3) ○

- 1 已知實數 a, b 滿足 $(3+2i)a + (2-2i)b = 17-2i$ ，求 a, b 的值。

$a = 3, b = 4$

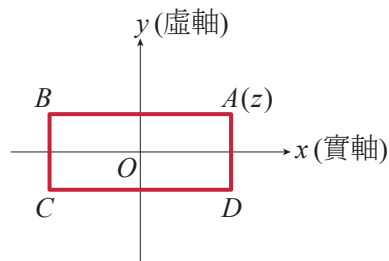
- 2 將下列複數化成 $a+bi$ （其中 a, b 為實數）的形式。

(1) $(2-3i) - (-3+5i)$ 。 (2) $\frac{2-i}{1+i}$ 。 (3) $(i^3+1)(i^6-i^3+1)$ 。

(1) $5-8i$ (2) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ (3) $1+i$

- 3 如右圖，矩形 $ABCD$ 的四邊平行坐標軸，中心在原點 O 。設 A 點所對應的複數為 $z = 12+5i$ 。

- (1) 求 B, C 兩點所對應的複數。
(2) 求 $\overline{OA}$ 的長度。

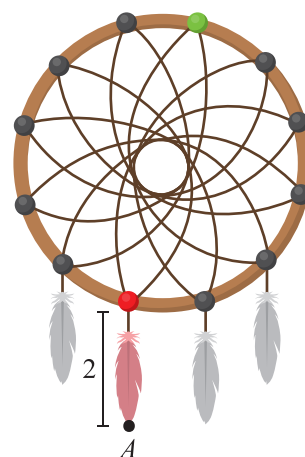


(1) $B(-12+5i), C(-12-5i)$ (2) 13

- 4 已知複數 z 滿足 $\frac{z-2}{z+2} = i$ ，求 $|z|$ 的值。

2

- 5 右圖的捕夢網為北美文化中常見的手工藝品，圓上的十二個珠子構成正十二邊形，圓形下方垂掛四根羽毛作為裝飾。今將此捕夢網的圓心貼合在複數平面的原點且設紅色羽毛末端為 A 點。設綠色珠子所對應的複數為 $1+7i$ ，且每根羽毛的長度均為 2。



- (1) 求紅色珠子所對應之複數。
(2) 求紅色羽毛末端 A 點所對應之複數。

(1) $-1-7i$ (2) $-1-9i$

二、進階題

- 6 設 a, b 為實數，且 $\frac{a-3i}{1+i}$ 的共軛複數為 $6+bi$ ，求 a, b 的值。

$a=15, b=9$

4. 因為將 $\frac{z-2}{z+2} = i$ 移項整理得 $z = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4i}{2} = 2i$,

所以 $|z| = 2$ 。

5. (1) 紅色珠子所對應之複數為 $-1-7i$ 。

(2) 紅色羽毛末端所對應之複數為 $(-1-7i)-2i = -1-9i$ 。

二、進階題

6. 因為 $\frac{a-3i}{1+i} = \frac{(a-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(a-3)-(a+3)i}{2}$ 的共軛複數為 $6+bi$,

所以 $\begin{cases} \frac{a-3}{2} = 6 & \text{①} \\ \frac{a+3}{2} = b & \text{②} \end{cases}$ 由①得 $a=15$, 代入②得 $b=9$ 。

7. 因為 $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 8 + 6i$,
 所以 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 & \text{①} \\ 2ab = 6 & \text{②} \end{cases}$ 由②得 $b = \frac{3}{a}$, 代入①得 $a^2 - \frac{9}{a^2} = 8$,
 整理得 $a^4 - 8a^2 - 9 = 0$, 因式分解得 $(a^2 - 9)(a^2 + 1) = 0$,
 解得 $a^2 = 9$ 或 -1 (-1 不合) , 即 $a = \pm 3$ 。

代入 $b = \frac{3}{a}$ 可得

- ① 當 $a = 3$ 時 , $b = 1$
 ② 當 $a = -3$ 時 , $b = -1$ 。
8. 設 $z = x + yi$, 其中 x, y 為實數。

因為 $|z-4|:|z+1| = 3:2$, 所以 $|(x-4) + yi|:|(x+1) + yi| = 3:2$ 。

由複數絕對值的定義 , 得 $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}:\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 3:2$,

整理得 $9((x+1)^2 + y^2) = 4((x-4)^2 + y^2)$,

展開得 $x^2 + 10x + y^2 = 11$, 可得 $(x+5)^2 + y^2 = 36$,

因為 $(x+5)^2 + y^2 = 36$ 的圖形為一圓 , 所以所有滿足方程式的複數 z 形成的圖形為一圓。

故選(3)。

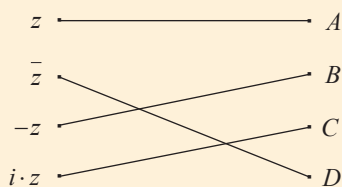
9. 設 $z = x + yi$, x, y 皆為正實數 , 且由圖可知 $\sqrt{x^2 + y^2} > 1$ 。

(1) 因為 $\bar{z} = x - yi$, 所以對應的點為 D 。

(2) 因為 $-z = -x - yi$, 所以對應的點為 B 。

(3) 因為 $i \cdot z = i \times (x + yi) = -y + xi$, 所以對應的點為 C 。

故對應的關係如下圖所示。



- 7 已知實數 a, b 滿足 $(a+bi)^2 = 8+6i$ ，求 a, b 的值。

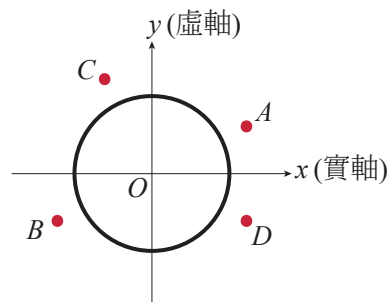
$a=3, b=1$ 或
 $a=-3, b=-1$

- 8 在複數平面上，所有滿足方程式 $|z-4|:|z+1|=3:2$ 的複數 z 形成什麼圖形？

(1) 點 (2) 直線 (3) 圓 (4) 拋物線。

(3)

- 9 在複數平面上，複數 z 所對應的 A 點在單位圓 O 外，如圖所示。連連看：分別將下列左邊的 3 個複數連到它們在複數平面上所對應的點。



z • ————— • A

$\bar{z}$ • • B

$-z$ • • C

$i \cdot z$ • • D

