4 函數性質的判定

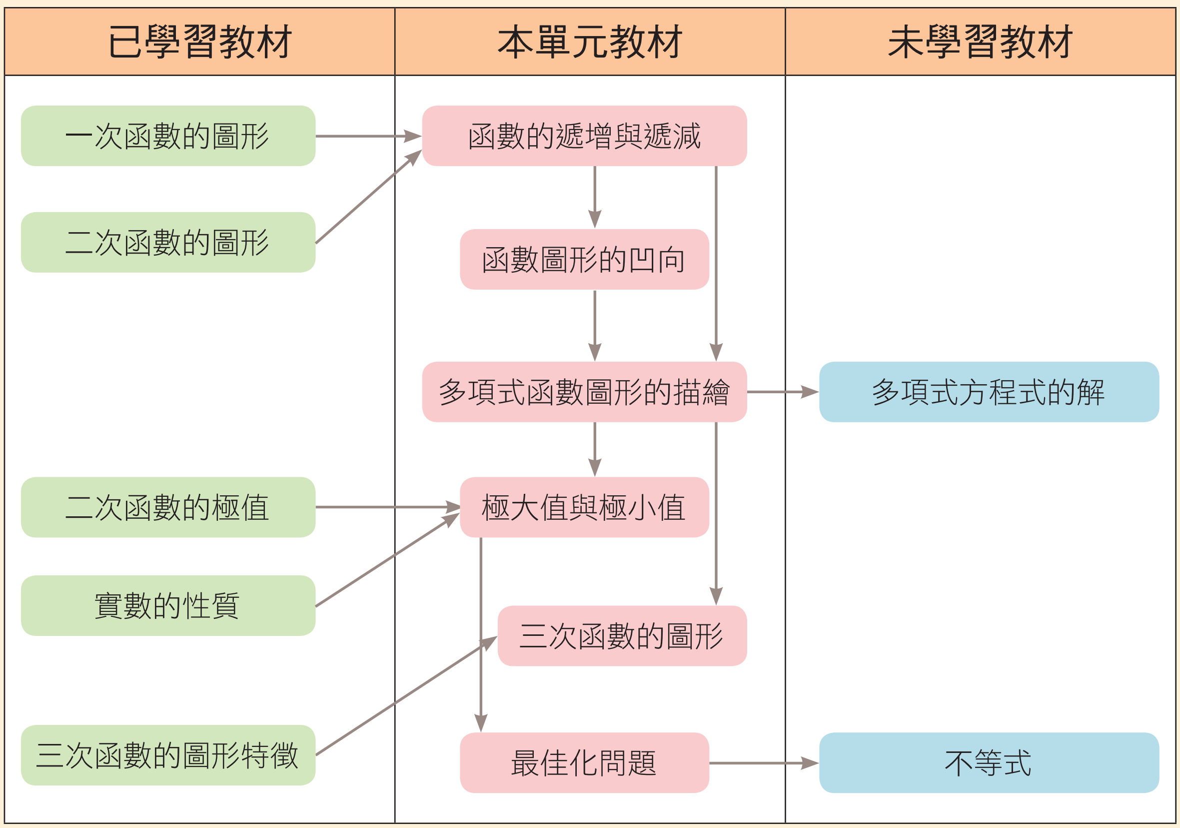
一 教材摘要

首先介紹函數的遞增與遞減及其判定，接著再介紹函數圖形的凹向及其判定，其次利用函數的遞增與遞減、凹向及反曲點等資料描繪多項式函數的圖形，並將三次函數的圖形做完整的介紹。最後，介紹極值的一階與二階檢定法及其應用。

二 教學目標與時數

教學目標	建議授課時數
1. 知道遞增函數與遞減函數的定義。 2. 了解函數導數的正負與函數遞增、遞減的關係。 3. 能判定函數圖形的凹向。 4. 了解反曲點的定義。 5. 能利用本單元所學的知識描繪多項式函數的圖形。 6. 知道最大值、最小值、極大值與極小值的定義。 7. 能分辨最大值與極大值，最小值與極小值的不同。 8. 能使用極值的一階與二階檢定法。 9. 了解 $f'(a)=0$ 並不能保證 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極值。 10. 了解三次函數恰有一個反曲點。 11. 知道三次函數圖形的反曲點就是對稱中心。 12. 能運用函數的極值解答相關的最佳化問題。	14

三 教材地位分析

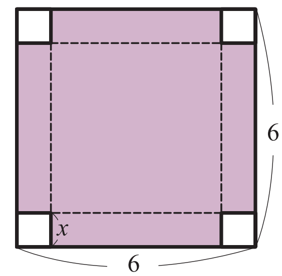


已學習教材
本單元教材
未學習教材
一次函數的圖形
二次函數的圖形
二次函數的極值
實數的性質
三次函數的圖形特徵
函數的遞增與遞減
函數圖形的凹向
多項式函數圖形的描繪
極大值與極小值
三次函數的圖形
最佳化問題
多項式方程式的解
不等式

4 函數性質的判定

將邊長為 6 公寸的正方形鐵片，四個角各截去一個面積相等的正方形，如圖 1 所示；然後再將各邊沿著虛線摺起來，做成一個無蓋的長方體容器。試問應截去邊長為多少公寸的正方形，才能使長方體的容積最大？

利用微分求函數極值是本單元主要的內容。



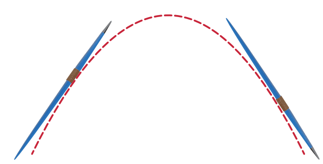
▲圖 1

教學要點

❶ 定義函數的遞增與遞減，並利用導數的正負，判定函數的遞增與遞減。

甲 函數的遞增與遞減 ❶

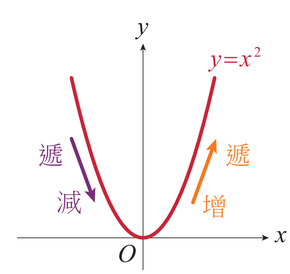
圖 2 中的虛線是選手將標槍擲出後，標槍的質量中心在空中的路徑。觀察標槍所在直線的斜率，可以發現：若斜率為正，則飛行的路徑是上升的；若斜率為負，則飛行的路徑是下降的。這發現有助於理解本節要介紹的函數遞增與遞減的判定。現在我們先定義遞增與遞減函數，再介紹這個判定方法。



▲圖 2

觀察二次函數 $y=x^2$ 的圖形，如圖 3 所示：

(1) 當 $x \geq 0$ 時，這段圖形由左往右逐漸上升，即 x 值愈大，所對應的 y 值也隨著增大，我們稱此函數在區間 $[0, \infty)$ 上為嚴格遞增函數。



▲圖 3

92

(2) 當 $x \le 0$ 時，這段圖形由左往右逐漸下降，即 x 值愈大，所對應的 y 值也隨著減小，我們稱此函數在區間 $(-\infty, 0]$ 上為嚴格遞減函數。

一般而言，我們有以下定義。

遞增與遞減函數

設函數 $f(x)$ 在區間 I 有定義。

(1) 若對區間 I 中任意兩數 $x_1 < x_2$ 恆有 $f(x_1) < f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**嚴格遞增函數**。

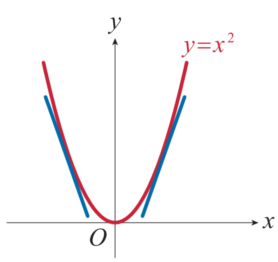
若對區間 I 中任意兩數 $x_1 < x_2$ 恆有 $f(x_1) \le f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**遞增函數**。

(2) 若對區間 I 中任意兩數 $x_1 < x_2$ 恆有 $f(x_1) > f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**嚴格遞減函數**。

若對區間 I 中任意兩數 $x_1 < x_2$ 恆有 $f(x_1) \ge f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**遞減函數**。

借助函數圖形可以知道函數在哪些區間上是遞增函數或遞減函數；可是有很多函數的圖形並不容易描繪出來，那該如何判定這些函數遞增或遞減的情形呢？

再次觀察二次函數 $y = f(x) = x^2$ 的圖形，如圖 4 所示：



▲圖 4

(1) 當 $x > 0$ 時，$f'(x) = 2x > 0$，即這段圖形上的每一點之切線斜率均為正數，此時 $f(x)$ 為嚴格遞增函數。

(2) 當 $x < 0$ 時，$f'(x) = 2x < 0$，即這段圖形上的每一點之切線斜率均為負數，此時 $f(x)$ 為嚴格遞減函數。

教學小提醒

1 常數函數既是遞增函數，也是遞減函數，但不需太強調。

93

函數性質的判定

教學小提醒

1 若 $f'(c)>0$，則 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$。也就是說，在 $x=c$ 附近，$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$。

① 當 $x>c$ 時，$f(x)-f(c)>0$，即 $f(x)>f(c)$。

② 當 $x<c$ 時，$f(x)-f(c)<0$，即 $f(x)<f(c)$。

因此，若 $f'(c)>0$，則在 $x=c$ 附近 $f(x)$ 為嚴格遞增函數。

同理，若 $f'(c)<0$，則在 $x=c$ 附近 $f(x)$ 為嚴格遞減函數。

事實上，函數在某區間上「導數為正數或負數」與「函數遞增或遞減」關係密切，敘述如下。

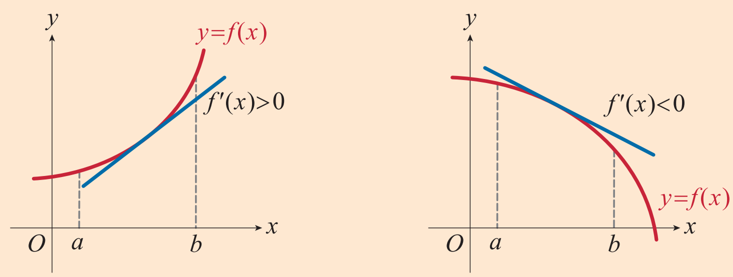
1

函數遞增與遞減的判定

設函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，且在區間 (a,b) 上可微分。

(1) 若 $f'(x)>0$ 在區間 (a,b) 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為嚴格遞增函數。

(2) 若 $f'(x)<0$ 在區間 (a,b) 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為嚴格遞減函數。



事實上，上述判定中的區間 $[a,b]$ 可以是無界的區間 $(-\infty, b]$, $[a,\infty)$ 或 $(-\infty,\infty)$，此時區間 (a,b) 則同步改為 $(-\infty,b)$, (a,∞) 或 $(-\infty,\infty)$ 即可。

使用這個判定法，討論函數遞增或遞減的情形。

例題 1

函數 $f(x)=x^3-3x+2$ 在下列哪些區間上為嚴格遞增函數？

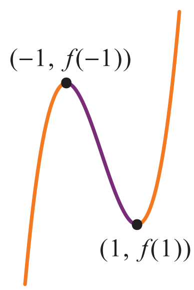
(1) $[-3,-2]$　(2) $[0,2]$　(3) $[2,3]$　(4) $[2,\infty)$。

解

首先，求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)。$$

接著，用方程式 $f'(x)=0$ 的實根將數線分成數個區間，再由各區間中導數 $f'(x)$ 的正或負討論 $f(x)$ 的遞增或遞減狀況，列表如下：



x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
增減變化	↗		↘		↗

由上表可得下面的結果。

(1) 在區間 $(-3,-2)$ 上，$f'(x)>0$ 都成立。

(2) 在區間 $(0,2)$ 上，$f'(x)$ 有負值。

(3) 在區間 $(2,3)$ 上，$f'(x)>0$ 都成立。

(4) 在區間 $(2,\infty)$ 上，$f'(x)>0$ 都成立。

最後，根據函數遞增與遞減的判定，得 $f(x)$ 在區間 $[-3,-2]$, $[2,3]$ 與 $[2,\infty)$ 上為嚴格遞增函數。

故選 (1)(3)(4)。

隨堂練習 1

函數 $f(x)=-x^3+6x$ 在下列哪些區間上為嚴格遞減函數？

(1) $[-5,-2]$　(2) $[-1,1]$　(3) $[1,2]$　(4) $[2,\infty)$。

(1)(4)

隨堂練習解答

1 首先，求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$f'(x)=-3x^2+6=-3\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$。

接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
增減變化	↘		↗		↘

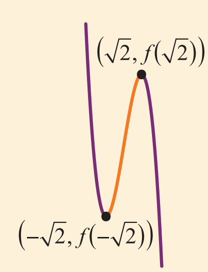
由上表可得下面的結果。

(1) 在區間 $(-5,-2)$ 上，$f'(x)<0$ 都成立。

(2) 在區間 $(-1,1)$ 上，$f'(x)$ 有正值。

(3) 在區間 $(1,2)$ 上，$f'(x)$ 有正值。

(4) 在區間 $(2,\infty)$ 上，$f'(x)<0$ 都成立。



最後，根據函數遞增與遞減的判定，

得 $f(x)$ 在區間 $[-5,-2]$ 與 $[2,\infty)$ 上為嚴格遞減函數。故選 (1)(4)。

延續例題 1 的方法，討論一個四次函數的遞增或遞減狀況。

例題 2

函數 $f(x)=x^4+4x^3+5$ 在下列哪些區間上為嚴格遞增函數？

(1) $[-4,-2]$　(2) $[-2,0]$　(3) $[0,3]$　(4) $[-2,3]$。

解

首先，先求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)。$$

接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
增減變化	↘		↗		↗

由上表可得下面的結果。

(1) 在區間 $(-4,-2)$ 上，$f'(x)$ 有負值。

(2) 在區間 $(-2,0)$ 上，$f'(x)>0$ 都成立。

(3) 在區間 $(0,3)$ 上，$f'(x)>0$ 都成立。

(4) 在區間 $(-2,3)$ 上，除了 $f'(0)=0$ 外，其餘的 $f'(x)$ 都是正值，即 $f(x)$ 在區間 $[-2,0]$ 與 $[0,3]$ 上都是嚴格遞增函數。因為多項式函數 $f(x)$ 是連續函數，所以 $f(x)$ 在區間 $[-2,3]$ 上為嚴格遞增函數。

最後，根據函數遞增與遞減的判定，得 $f(x)$ 在區間 $[-2,0]$, $[0,3]$ 與 $[-2,3]$ 上為嚴格遞增函數。

故選 (2)(3)(4)。

教學小提醒

1 將區間 $[-2,3]$ 以 0 為分界點拆成區間 $[-2,0]$ 與 $[0,3]$。因為 $f(x)$ 在區間 $[-2,0]$ 與 $[0,3]$ 上都是嚴格遞增函數，所以 $f(x)$ 在合併後的區間 $[-2,3]$ 上仍為嚴格遞增函數。

隨堂練習

函數 $f(x)=x^4+8x^3+18x^2+8$ 在下列哪些區間上為嚴格遞減函數？

(1) $[-5,-3]$　(2) $[-3,-1]$　(3) $[-5,-1]$　(4) $[-1,2]$。

(1)(2)(3)

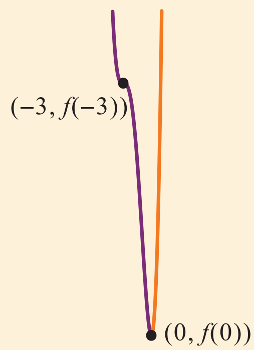
隨堂練習解答

1 首先，先求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$f'(x)=4x^3+24x^2+36x=4x(x^2+6x+9)=4x(x+3)^2$。

接著，將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
增減變化	↘		↘		↗



由上表可得下面的結果。

(1) 在區間 $(-5,-3)$ 上，$f'(x)<0$ 都成立。

(2) 在區間 $(-3,-1)$ 上，$f'(x)<0$ 都成立。

(3) 在區間 $(-5,-1)$ 上，除了 $f'(-3)=0$ 外，其餘的 $f'(x)$ 都是負值，即 $f(x)$ 在區間 $[-5,-3]$ 與 $[-3,-1]$ 上都是嚴格遞減函數。因為多項式函數 $f(x)$ 是連續函數，所以 $f(x)$ 在區間 $[-5,-1]$ 上為嚴格遞減函數。

(4) 在區間 $(-1,2)$ 上，$f'(x)$ 有正值。

故選 (1)(2)(3)。

補充例題

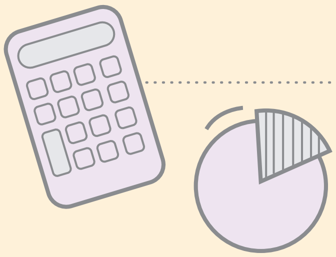
1 函數 $f(x)=x^3$ 在區間 $[-1,1]$ 上是否為嚴格遞增函數？

解：導函數 $f'(x)=3x^2$。

在區間 $(-1,1)$ 上，除了 $f'(0)=0$ 外，其餘的 $f'(x)$ 都是正值，

即 $f(x)$ 在區間 $[-1,0]$ 與 $[0,1]$ 上都是嚴格遞增函數。

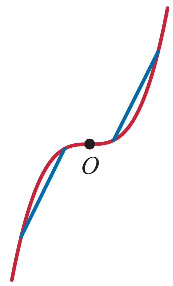
因為多項式函數 $f(x)$ 是連續函數，所以 $f(x)$ 在區間 $[-1,1]$ 上為嚴格遞增函數。



乙 函數圖形的凹向與反曲點

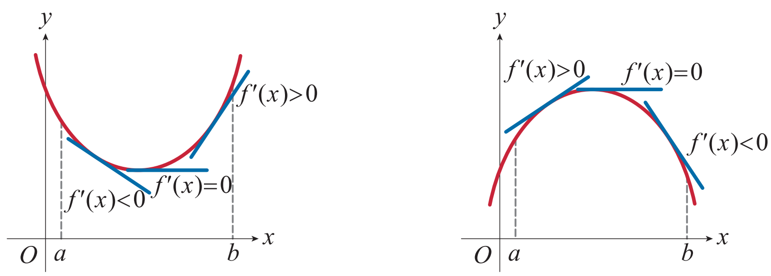
只了解函數的遞增或遞減狀況，還不足以掌握圖形的形狀。例如，在圖 5 中，O 點的左右兩邊雖同為遞增，可是這兩段圖形彎曲的方向卻有明顯的差異。

要如何描述圖形的彎曲方向呢？直觀來看，若圖形上任相異兩點所連成的線段恆在圖形的上方，則稱圖形**凹口向上**，如圖 5 中 O 點右邊的圖形；反之，若線段恆在圖形的下方，則稱圖形**凹口向下**，如 O 點左邊的圖形。



▲圖 5

然而，如果沒有函數圖形的幫助，我們要如何判定圖形的凹向呢？觀察圖 6 (a) 與圖 6 (b)：



(a) 凹口向上　(b) 凹口向下

▲圖 6

(1) 圖 6 (a) 中，切線的斜率由左往右逐漸增大，也就是說，圖形上愈往右邊的點其導函數 $f'(x)$ 的值愈大，即 $f'(x)$ 為嚴格遞增函數。

(2) 圖 6 (b) 中，切線的斜率由左往右逐漸減小，也就是說，圖形上愈往右邊的點其導函數 $f'(x)$ 的值愈小，即 $f'(x)$ 為嚴格遞減函數。

由上述的觀察可以了解，討論函數 $f(x)$ 圖形的凹向相當於討論導函數 $f'(x)$ 的遞增與遞減。又根據函數遞增與遞減的判定，導函數 $f'(x)$ 的遞增與遞減可由二階導函數 $f''(x)$ 函數值的正負來決定。我們將「二階導函數 $f''(x)$ 函數值的正負」與「函數 $f(x)$ 圖形的凹向」的關係敘述如下。

1

教學要點

1 定義函數圖形的凹向及反曲點，並利用二階導數的正負，判定函數的凹向及求反曲點。

1 **教學小提醒**

1 函數圖形凹向的性質：

(1) 若 $f(x)$ 在區間 (a, b) 的圖形是凹口向上，則 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} > f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$。

(2) 若 $f(x)$ 在區間 (a, b) 的圖形是凹口向下，則 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} < f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$。

97

函數圖形凹向的判定

設函數 $f(x)$ 在開區間 I 內每一數 x 的第二階導數 $f''(x)$ 都存在。

(1) 若 $f''(x)>0$ 在區間 I 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 I 的圖形是凹口向上。

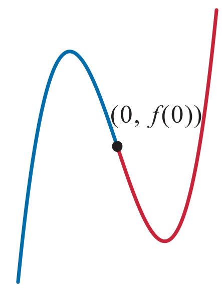
(2) 若 $f''(x)<0$ 在區間 I 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 I 的圖形是凹口向下。

使用這個判定法，討論函數圖形的凹向。

例題 3

討論函數 $f(x)=x^3-3x+2$ 圖形的凹向。

解



首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，

$$f'(x)=3x^2-3,$$

$$f''(x)=6x。$$

接著，將 $f''(x)$ 的正、負列表如下：

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
凹向變化			

最後，根據函數圖形凹向的判定，可得下面的結果。

① $f(x)$ 在區間 $(-\infty, 0)$ 的圖形是凹口向下。

② $f(x)$ 在區間 $(0, \infty)$ 的圖形是凹口向上。

隨堂練習

討論函數 $f(x)=x^2-4x+3$ 圖形的凹向。

$f(x)$ 的圖形恆為凹口向上

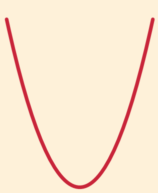
98

教學小提醒

1 設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$。
其導函數為 $f''(x)=2a$。
① 當 $a>0$ 時，$f''(x)$ 恆正，$f(x)$ 的圖形恆凹口向上。
② 當 $a<0$ 時，$f''(x)$ 恆負，$f(x)$ 的圖形恆凹口向下。
故二次函數的圖形只有一種凹向，且其凹向由二次項係數的正負決定。

隨堂練習解答

1 先求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$：
$f'(x)=2x-4$，
$f''(x)=2$。
因為 $f''(x)$ 恆為正數，所以根據函數圖形凹向的判定，得知 $f(x)$ 的圖形恆為凹口向上。



在例題 3 中，函數 $f(x)=x^3-3x+2$ 的圖形在點 $(0, f(0))$ 的左側和右側凹向相反，我們稱點 $(0, f(0))$ 是函數 $f(x)$ 圖形的**反曲點**，定義如下。介紹之前先做以下規定：「***a* 的附近**」是指「某個包含 a 的開區間」。

反曲點的定義

在 a 的附近，當 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，且 $f(x)$ 的圖形在 $x<a$ 與 $x>a$ 的凹向相反時，稱點 $(a, f(a))$ 為函數 $f(x)$ 圖形的反曲點。

現在，我們舉一實例求反曲點。

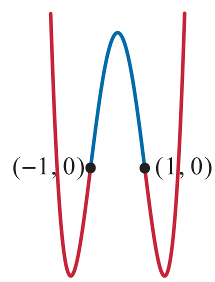
例題 4

討論函數 $f(x)=x^4-6x^2+5$ 圖形的凹向，並求其反曲點。

解

首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將 $f''(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=4x^3-12x,$$
$$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)。$$



接著，將 $f''(x)$ 的正、負列表如下：

x		-1		1	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
凹向變化					

最後，根據函數圖形凹向的判定，可得下面的結果。

① $f(x)$ 在區間 $(-\infty, -1)$ 與 $(1, \infty)$ 的圖形是凹口向上。

② $f(x)$ 在區間 $(-1, 1)$ 的圖形是凹口向下。

又因為 $f(x)$ 圖形的凹向在 $x=-1$ 與 $x=1$ 兩處都改變，所以點 $(-1, 0)$ 與點 $(1, 0)$ 都是反曲點。

隨堂練習

討論函數 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+5$ 圖形的凹向，並求其反曲點。

在區間 $(-\infty, 2)$ 的圖形是凹口向上；
在區間 $(2, \infty)$ 的圖形是凹口向下，
反曲點為 $(2, 3)$

教學小提醒

1 反曲點在口語上也有人稱之為「拐點」。

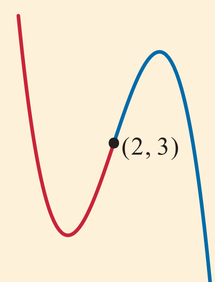
隨堂練習解答

1 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$：

$f'(x)=-3x^2+12x-9$,
$f''(x)=-6x+12$
$\quad=-6(x-2)$。

接著，將 $f''(x)$ 的正、負列表如下：

x		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
凹向變化			



根據函數圖形凹向的判定，可得下面的結果。

① $f(x)$ 在區間 $(-\infty, 2)$ 的圖形是凹口向上。

② $f(x)$ 在區間 $(2, \infty)$ 的圖形是凹口向下。

又因為 $f(x)$ 圖形的凹向在 $x=2$ 處發生變化，所以反曲點為 $(2, 3)$。

在上例中，反曲點附近的 $f''(x)$ 函數值由正轉負或由負轉正。一般而言，若 $(a,f(a))$ 為反曲點，且 $f''(x)$ 為連續函數，則在反曲點附近的 $f''(x)$ 函數值會由正轉負或由負轉正，因而 $f''(a)=0$。由於多項式函數的二階導函數仍是多項式函數（連續函數），於是我們有以下的結論。

反曲點的性質

若 $(a,f(a))$ 為多項式函數 $f(x)$ 圖形的一個反曲點，則 $f''(a)=0$。

練習這個性質。

1 **例題 5**

已知 $(1,2)$ 為四次函數 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 圖形的一個反曲點，求實數 a,b 的值。

解

函數 $f(x)$ 的導函數與二階導函數分別為

$$f'(x)=4x^3+2ax,\ f''(x)=12x^2+2a。$$

因為 $(1,2)$ 為圖形上一點且為反曲點，所以 $f(1)=2$ 且 $f''(1)=0$，即

$$\begin{cases}1+a+b=2\\12+2a=0\end{cases}。$$

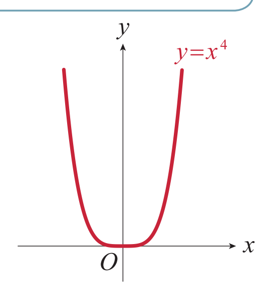
解得 $a=-6,\ b=7$。

1 **隨堂練習**

2 已知點 $P(1,3)$ 為三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 圖形的反曲點，且以 P 點為切點的切線斜率為 4，求實數 a,b,c 的值。

$a=-3,\ b=7,\ c=-2$

要注意的是：滿足 $f''(x)=0$ 的點不一定就是反曲點。例如，函數 $f(x)=x^4$ 滿足 $f''(x)=12x^2,\ f''(0)=0$，但點 $(0,f(0))$ 的左右兩邊都是凹口向上，如圖 7 所示，它不是反曲點。



▲圖 7

100

補充例題

1 已知 $(-1,5)$ 為函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 圖形的反曲點，且 $f'(0)=-2$，求實數 a,b,c 的值。

解：函數 $f(x)$ 的導函數與二階導函數分別為

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ f''(x)=6x+2a。$$

因為 $(-1,5)$ 為圖形的反曲點，所以 $f(-1)=5$ 且 $f''(-1)=0$。

又 $f'(0)=-2$，得

$$\begin{cases}-1+a-b+c=5\\-6+2a=0\\b=-2\end{cases}。$$

解得 $a=3,b=-2,c=1$。

2 已知四次函數 $f(x)$ 有兩個反曲點 $(0,0)$ 與 $(2,16)$，並且在反曲點 $(2,16)$ 的切線與 x 軸平行，求 $f(x)$。

解：因為 $f(x)$ 在 $x=0$ 與 $x=2$ 處有反曲點，所以 $f''(0)=f''(2)=0$。因此可

設 $f''(x)=a(x-0)(x-2)=ax^2-2ax$（$a\neq 0$）。根據微分公式，得

$$f'(x)=\frac{a}{3}x^3-ax^2+b,$$

$$f(x)=\frac{a}{12}x^4-\frac{a}{3}x^3+bx+c。$$

因為 $(0,0)$ 與 $(2,16)$ 在圖形上，且在 $x=2$ 處的切線與 x 軸平行，所以

$$\begin{cases}f(0)=c=0\\f(2)=\frac{4}{3}a-\frac{8}{3}a+2b+c=16\\f'(2)=\frac{8}{3}a-4a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\2a-3b=-24\\4a-3b=0\end{cases}，$$

解得 $a=12,b=16,c=0$。

故 $f(x)=x^4-4x^3+16x$。

隨堂練習解答

1 求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$：

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ f''(x)=6x+2a。$$

因為 $P(1,3)$ 為反曲點，所以 $f(1)=3$ 且 $f''(1)=0$。

又因為以 P 點為切點的切線斜率為 4，所以 $f'(1)=4$。

因此，可列得聯立方程式

$$\begin{cases}1+a+b+c=3\\6+2a=0\\3+2a+b=4\end{cases}。$$

解得 $a=-3,b=7,c=-2$。

補充例題

1 描繪函數 $f(x)=x^3-3x$ 的圖形。

解：首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

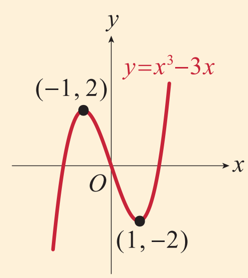
$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1),$$

$$f''(x)=6x。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負列表如下：

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		2		0		-2	

最後，在坐標平面上，描繪 $f(x)$ 的圖形如下：



丙 描繪多項式函數的圖形

我們來介紹如何將函數的遞增、遞減及凹向等資訊用於多項式函數圖形的描繪。

例題 6

描繪函數 $f(x)=x^3-3x+2$ 的圖形。

解

首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1),$$

$$f''(x)=6x。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負列表，再綜合遞增、遞減及凹向的資訊，得出各區間內圖形的大略形狀，列表如下：

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		4		2		0	

上表中的紅色曲線為各區間內圖形的大略形狀，那是綜合遞增、遞減及凹向的資訊得到的，說明如下。

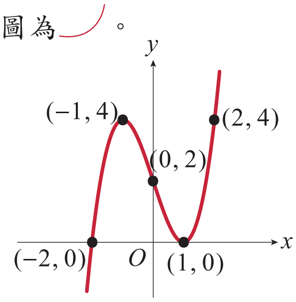
① 當 $x<-1$ 時，$f(x)$ 為嚴格遞增且凹口向下，其略圖為 。

② 當 $-1<x<0$ 時，$f(x)$ 為嚴格遞減且凹口向下，其略圖為 。

③ 當 $0<x<1$ 時，$f(x)$ 為嚴格遞減且凹口向上，其略圖為 。

④ 當 $x>1$ 時，$f(x)$ 為嚴格遞增且凹口向上，其略圖為 。

最後，在坐標平面上，點出 $(-1,4)$, $(1,0)$ 二點與反曲點 $(0,2)$，及描出一些其他點，如 $(-2,0)$, $(2,4)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=x^3-3x+2$ 的近似圖形如右。



教學要點

1 利用函數的遞增、遞減及凹向等資訊，描繪多項式函數的圖形。

101

1 **隨堂練習**

描繪函數 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+5$ 的圖形。

見解析

延續例題 6 的方法，描繪一個四次函數的圖形。

例題 7

描繪函數 $f(x)=x^4-6x^2+5$ 的圖形。

解

首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

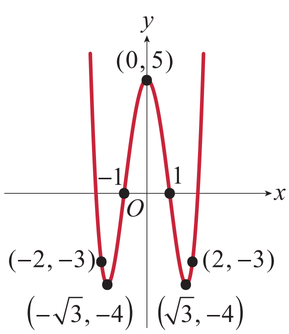
$$f'(x)=4x^3-12x=4x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right),$$

$$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)\text{。}$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	╰	-4	╯	0	╭	5	╮	0	╰	-4	╯

最後，在坐標平面上，點出 $\left(-\sqrt{3},-4\right)$, $(0,5)$, $\left(\sqrt{3},-4\right)$ 三點與反曲點 $(-1,0)$, $(1,0)$ 二點，及描出一些其他點，如 $(-2,-3)$, $(2,-3)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=x^4-6x^2+5$ 的近似圖形如右。



2 **隨堂練習**

描繪函數 $f(x)=x^4-2x^2+1$ 的圖形。

見解析

102

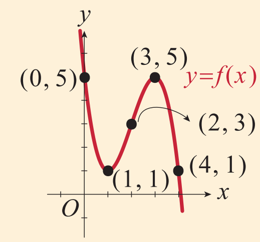
隨堂練習解答

1 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3),$$
$$f''(x)=-6x+12=-6(x-2)。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		1		2		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	◟	1	◞	3	◜	5	◝



最後，在坐標平面上，點出 $(1,1),(3,5)$ 二點與反曲點 $(2,3)$，及描出一些其他點，如 $(0,5),(4,1)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=-x^3+6x^2-9x+5$ 的近似圖形如右。

2 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1),$$
$$f''(x)=12x^2-4=4\left(\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}x+1\right)。$$

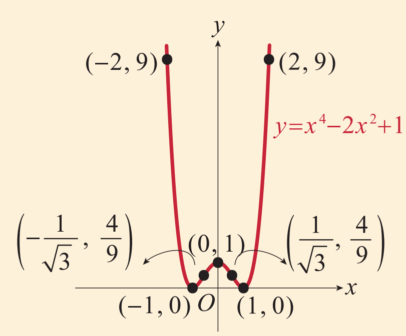
接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	◟	0	◞	$\frac{4}{9}$	◜	1	◝	$\frac{4}{9}$	◟	0	◞

最後，在坐標平面上，點出 $(-1,0),(0,1),(1,0)$ 三點與反曲點 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right)$ 二點，

及描出一些其他點，如 $(2,9),(-2,9)$ 等，

再以平滑曲線連接，可得 $y=x^4-2x^2+1$ 的近似圖形如右。



隨堂練習解答

1 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$：

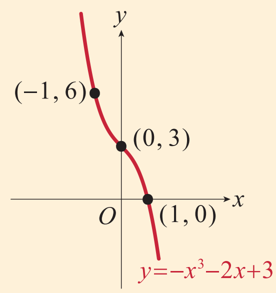
$$f'(x) = -3x^2 - 2,$$

$$f''(x) = -6x。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		0	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		3	

最後，在坐標平面上，點出反曲點 $(0, 3)$，及描出一些其他點，如 $(-1, 6), (1, 0)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y = -x^3 - 2x + 3$ 的近似圖形如右。



延續前面描繪多項式函數圖形的方法，描繪一個沒有遞減區間的三次函數圖形。

例題 8

描繪函數 $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ 的圖形。

解

首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，如下：

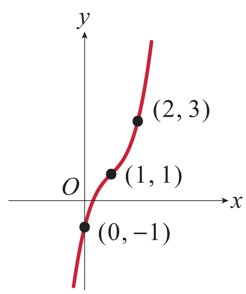
$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1\ (\text{恆正})，$$

$$f''(x)=6x-6=6(x-1)。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		1	
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$		1	

最後，在坐標平面上，點出反曲點 $(1,1)$，及描出一些其他點，如 $(2,3)$, $(0,-1)$ 等，再以平滑曲線連接，可得 $y=x^3-3x^2+4x-1$ 的近似圖形如右。



隨堂練習 1

描繪函數 $f(x)=-x^3-2x+3$ 的圖形。

見解析

103

第一冊介紹過三次函數圖形的特徵，現在有了微分後，藉助以上描繪三次函數圖形的經驗，我們將函數的遞增、遞減及凹向等性質作為輔助資料，完整討論三次函數所有可能的圖形。

設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）；其導函數與二階導函數分別為

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\text{ , }f''(x)=6ax+2b=6a\left(x+\frac{b}{3a}\right)\text{。}$$

因為 $f''(x)=0$ 恰有一實根 $x=-\dfrac{b}{3a}$，且 $f''(x)$ 的值在 $x=-\dfrac{b}{3a}$ 的左右兩邊異號，所以

三次函數 $f(x)$ 的圖形恰有一個反曲點 $\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$。

其次，因為 $f'(x)=0$ 是二次方程式，所以其解有二相異實根，二重根與無實根三種情形，討論如下。

(1) 二相異實根：此時圖形有兩條水平切線。設二相異實根為 α,β 且 $\alpha<\beta$，則 $f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)$。

①當 $a>0$ 時，在區間 (α,β) 上，$f'(x)<0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞減；在區間 $(-\infty,\alpha)$ 或 (β,∞) 上，$f'(x)>0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞增。

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗

②當 $a<0$ 時，在區間 (α,β) 上，$f'(x)>0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞增；在區間 $(-\infty,\alpha)$ 或 (β,∞) 上，$f'(x)<0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞減。

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘

(2) 二　重　根：此時圖形恰有一條水平切線，且 $f'(x)$ 為完全平方式。因此，

①當 $a>0$ 時，$f'(x)\geq 0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞增；

②當 $a<0$ 時，$f'(x)\leq 0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞減。

又由一元二次方程式的公式解，得知 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的二重根為

$$x=-\frac{2b}{2\times 3a}=-\frac{b}{3a}\text{。}$$

104

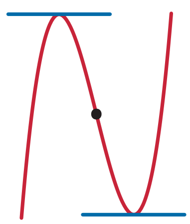
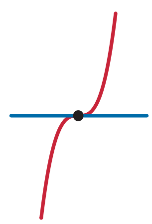
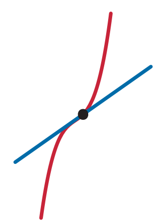
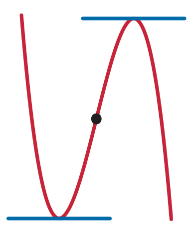
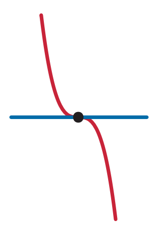
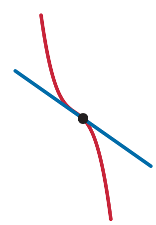
因為 $x=-\dfrac{b}{3a}$ 也是 $f''(x)=0$ 的實根，所以圖形唯一的水平切線恰好發生在反曲點處。

(3) 無　實　根：此時圖形沒有水平切線，且

①當 $a>0$ 時，$f'(x)>0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞增；

②當 $a<0$ 時，$f'(x)<0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞減。

綜合以上討論，將三次函數所有可能的圖形，分類如下：

$f'(x)=0$ 的根 \ a	二相異實根	二重根	無實根
$a>0$			
$a<0$			

上表的黑點為圖形之反曲點。

在第一冊時，我們知道：三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 可配三次方成 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式，其圖形是一條以點 (h,k) 為對稱中心的點對稱曲線，其中

$$h=-\frac{b}{3a},\ k=f\left(-\frac{b}{3a}\right)。$$

由上述的討論，得知：三次函數圖形的

反曲點就是對稱中心，

也就是說，三次函數的圖形都對稱於圖形的反曲點。

教學小提醒

1 當三次函數的圖形有兩條水平切線時，兩個切點對稱於反曲點，且此三點的 x 坐標由小而大依序成等差數列。

補充例題

1 已知 $f(x)=x^3-kx^2+3x+5$ 恆為嚴格遞增函數，求實數 k 的範圍。

解：函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2-2kx+3$。

因為 $f(x)$ 恆為嚴格遞增函數，所以 $f'(x)=3x^2-2kx+3=0$ 的根為二重根或無實根。

因此判別式 $(-2k)^2-4\times3\times3\le0\Rightarrow k^2-9\le0$，

解得 $-3\le k\le3$。

函數性質的判定 1

教學要點

1 定義函數的極值，並利用微分的方法求多項式函數的極值。

教學小提醒

1 求函數的最大值與最小值時，要考慮定義域中所有數的函數值。

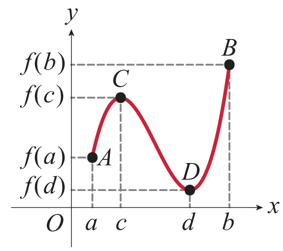
丁 多項式函數的極值

這裡，我們將利用微分的方法求多項式函數的極值。

(一) 極值的定義

設多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 的圖形，如圖 8 所示：

(1) 圖形上，在 C 點附近的點都比 C 點低，也就是說，C 點是局部範圍內的最高點，而 B 點是端點，也是局部範圍內的最高點，稱這兩點的 y 坐標 $f(c)$ 及 $f(b)$ 都是函數 $f(x)$ 的**極大值**。又 B 點是全部圖形中的最高點，我們也稱 $f(b)$ 為函數 $f(x)$ 的**最大值**。



▲圖 8

(2) 圖形上，在 D 點附近的點都比 D 點高，也就是說，D 點是局部範圍內的最低點，而 A 點是端點，也是局部範圍內的最低點，稱這兩點的 y 坐標 $f(d)$ 及 $f(a)$ 都是函數 $f(x)$ 的**極小值**。又 D 點是全部圖形中的最低點，我們也稱 $f(d)$ 為函數 $f(x)$ 的**最小值**。

延續之前的規定，「a 的附近」是指「某個包含 a 的開區間」。據此，我們有以下的定義。

極大值、極小值、最大值與最小值

設 $f(x)$ 為多項式函數，且 a, b, c, d 是區間 I 中的數。

(1) 當在 a 的附近且在 I 上的每一個數 x 都滿足 $f(a) \geq f(x)$ 時，稱 $f(a)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的一個**極大值**。

當區間 I 的每一個數 x 都滿足 $f(b) \geq f(x)$ 時，稱 $f(b)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的**最大值**。

(2) 當在 c 的附近且在 I 上的每一個數 x 都滿足 $f(c) \leq f(x)$ 時，稱 $f(c)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的一個**極小值**。

當區間 I 的每一個數 x 都滿足 $f(d) \leq f(x)$ 時，稱 $f(d)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的**最小值**。

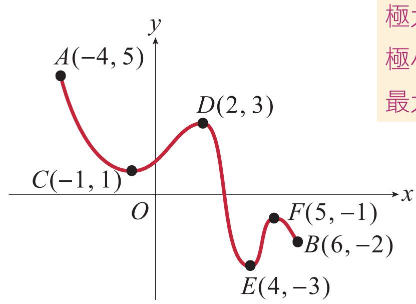
又當我們討論多項式函數的極值時，若未特別提及區間 I，是指在整個實數 $\mathbb{R}$ 討論。

1

我們將極大值與極小值統稱為**極值**。根據上述幾個名詞的定義可以知道，函數的最大值必定也是這個函數的一個極大值；函數的最小值必定也是這個函數的一個極小值。

隨堂練習

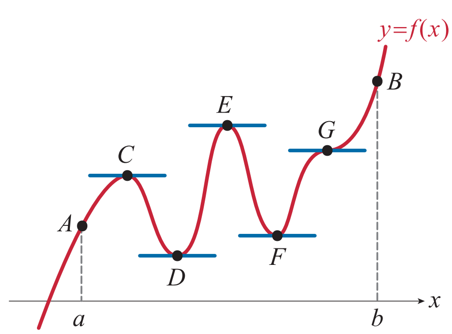
下圖是多項式函數 $f(x)$ 在閉區間 $[-4, 6]$ 的圖形，求 $f(x)$ 的極大值、極小值、最大值與最小值。



極大值有 $5, 3, -1$，
極小值有 $1, -3, -2$，
最大值為 5，最小值為 -3

(二) 極值可能發生的點

設圖 9 是多項式函數 $f(x)$ 的圖形。



▲圖 9

觀察圖 9，函數圖形的波峰（C, E 兩點）與波谷（D, F 兩點）是發生極值的點；這些點有一個共同的特性就是它們的切線都是水平切線（斜率為 0），也就是說，這四個發生極值的點其導數都為 0。一般而言，多項式函數的定義域為所有實數，並沒有受到限制，它的極值只會發生在導數為 0 的點；但是，若將定義域限制在閉區間 $[a, b]$ 上，則端點 A, B 也有可能是發生極值的點。

隨堂練習解答

❶ ❶根據定義，得
極大值有 $5, 3, -1$，
極小值有 $1, -3, -2$，
最大值為 5，
最小值為 -3。

107

綜合以上的討論，我們有以下的結論。

極值可能發生的點

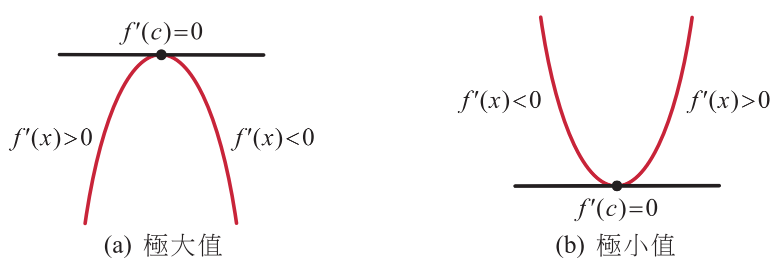
1. 多項式函數 $f(x)$ 的極值只會發生在導數為 0 的點。
2. 若將多項式函數 $f(x)$ 的定義域限制在閉區間 $[a, b]$ 上，則 $f(x)$ 的極值只可能發生在底下這二種點。
   (1) 導數為 0 的點，即滿足 $f'(x) = 0$ 的點。
   (2) 閉區間 $[a, b]$ 的端點。

要特別注意的是：圖 9 中的 G 點雖然有水平切線（導數為 0），但卻不是發生極值的點。因此，導數為 0 的點只是可能發生極值的「候選點」，並不一定是發生極值的點。

(三) 極值的一階檢定法

接下來我們想知道的是：如何判斷滿足 $f'(x) = 0$ 的「候選點」是否為發生極值的點？又如何區分一個極值是極大值或極小值？

當 $f'(c) = 0$ 時，觀察圖 10 (a) 與圖 10 (b)：



▲圖 10

(1) 圖 10 (a) 中，圖形由左往右，先嚴格遞增再嚴格遞減，即在 $x = c$ 處的左側 $f'(x) > 0$，右側 $f'(x) < 0$，此時 $f(c)$ 是極大值。

(2) 圖 10 (b) 中，圖形由左往右，先嚴格遞減再嚴格遞增，即在 $x = c$ 處的左側 $f'(x) < 0$，右側 $f'(x) > 0$，此時 $f(c)$ 是極小值。

108

綜合上述的討論，我們有底下的極值檢定法。

極值的一階檢定法

對於多項式函數 $f(x)$，先找出所有滿足 $f'(c)=0$ 的 c，再用下列方式針對這些 c 作檢定。

(1) 若 $x=c$ 的附近滿足「當 $x<c$ 時，$f'(x)>0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)<0$」，則 $f(c)$ 是極大值。

(2) 若 $x=c$ 的附近滿足「當 $x<c$ 時，$f'(x)<0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)>0$」，則 $f(c)$ 是極小值。

利用一階檢定法可以求多項式函數的極大值與極小值，舉例如下。

例題 9

求函數 $f(x)=x^4-6x^2+5$ 的極大值與極小值。

解

首先，求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=4x^3-12x=4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)。$$

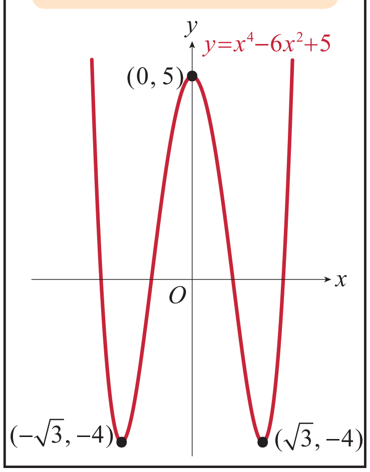
接著，解 $f'(x)=0$，得 $x=-\sqrt{3}$，0 或 $\sqrt{3}$。

將 $f'(x)$ 的正、負整理成下表：

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	5	↘	-4	↗

最後，利用上表及極值的一階檢定法，得極大值為 $f(0)=5$；極小值為 $f\left(-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=-4$。

電腦繪製的函數圖形



隨堂練習

求函數 $f(x)=x^3-12x+2$ 的極大值與極小值。

極大值為 18，極小值為 -14

隨堂練習解答

1 首先，求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$f'(x)=3x^2-12$
$=3(x-2)(x+2)$。

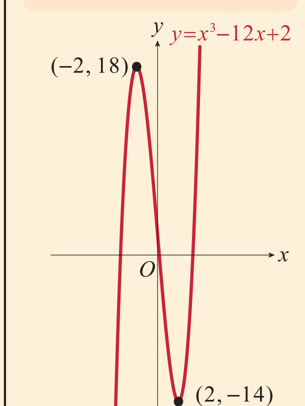
接著，當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=-2$ 或 2。

將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	18	↘	-14	↗

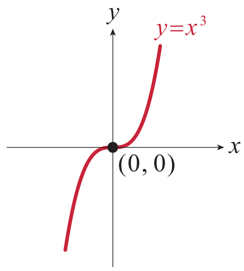
最後，利用極值的一階檢定法，得 $f(x)$ 的極大值為 18，極小值為 -14。

電腦繪製的函數圖形



109

再次提醒：滿足 $f'(x)=0$ 的點只是發生極值的「候選點」，不一定是發生極值的點。例如，$f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$。雖然 $f'(0)=0$，但就整個函數圖形而言，點 $(0,0)$ 不是局部最高點或最低點，如圖 11 所示，此時它不是發生極值的點。



▲圖 11

在圖 11 中，因為 $f(x)=x^3$ 的圖形既沒有最高點也沒有最低點，所以 $f(x)$ 既沒有最大值也沒有最小值。因此並非每個多項式函數都有最大值及最小值。

但是，當多項式函數被限制在閉區間上時，其圖形是一條含有兩端點的連續曲線（或線段）；又因為這樣的圖形必然有最高點與最低點，所以此時一定有最大值與最小值。那麼，該如何求這最大值與最小值呢？我們只要先求出函數所有的極值，則極大值中最大者就是最大值；極小值中最小者就是最小值。舉實例說明如下。

例題 10

求函數 $f(x)=x^3-3x+2$ 在閉區間 $[-3,3]$ 上的最大值與最小值。

解

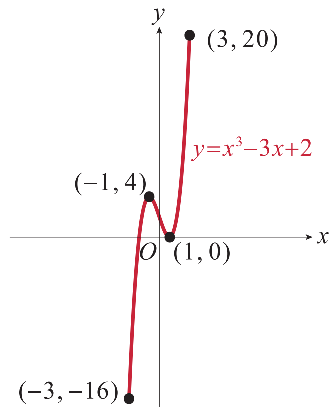
首先，求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)。$$

接著，解 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 1。

再加上閉區間 $[-3,3]$ 的兩個端點 -3 與 3，因此 $f(x)$ 的極值只可能發生在 $x=-3,-1,1$ 與 3 共四點。

電腦繪製的函數圖形



將 $f'(x)$ 的正、負整理成下表：

x	-3		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	↗	4	↘	0	↗	20

最後，利用上表，得

極大值有 $f(-1)=4$ 及 $f(3)=20$，極小值有 $f(-3)=-16$ 及 $f(1)=0$。

由於 $f(x)$ 在閉區間 $[-3,3]$ 上一定有最大值與最小值，因此極大值中最大者 $f(3)=20$ 為最大值，極小值中最小者 $f(-3)=-16$ 為最小值。

隨堂練習

求函數 $f(x)=-x^3-3x^2+9x+2$ 在閉區間 $[-4,2]$ 上的最大值與最小值。

最大值為 7，最小值為 -25

要注意的是：使用例題 10 解法的前提是「多項式函數被限制在閉區間上」。若是在一般的範圍討論，則此解法就不一定適用，縱使求出極值，還需要再配合討論才能得知函數是否有最大值或最小值。例如，例題 9 就不是在閉區間上討論，雖然 $f(0)=5$ 是極大值中最大者，但它並不是最大值（該函數沒有最大值）。

隨堂練習解答

1 首先，求出 $f(x)$ 的導函數，並將其因式分解如下：

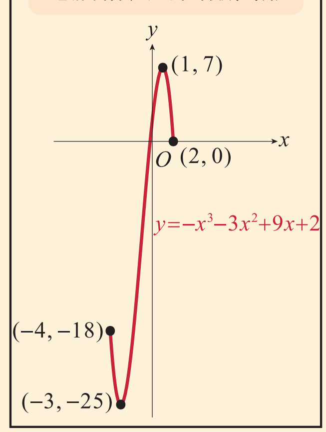
$$f'(x)=-3x^2-6x+9$$
$$=-3(x+3)(x-1)。$$

接著，當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=-3$ 或 1。

再加上閉區間 $[-4,2]$ 的兩個端點 -4 與 2，因此 $f(x)$ 的極值只可能發生在 $x=-4,-3,1$ 與 2 共四點。

1

電腦繪製的函數圖形



將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

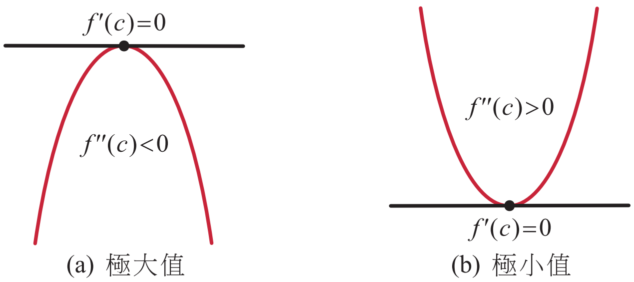
x	-4		-3		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-18	↘	-25	↗	7	↘	0

最後，由函數的遞增與遞減，得 $f(x)$ 在區間 $[-4,2]$ 上的最大值為 $f(1)=7$，最小值為 $f(-3)=-25$。

(四) 極值的二階檢定法

在多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f'(c)=0$ 的前提下，極值的一階檢定法是利用函數的增減情形來判定極值。現在，我們再介紹另一個利用函數的凹向來判定極值的方法。

當 $f'(c)=0$ 時，觀察圖 12 (a) 與圖 12 (b)：



▲圖 12

(1) 圖 12 (a) 中，$f(x)$ 在 $x=c$ 處附近的圖形是凹口向下，此時 $f(c)$ 是極大值。

(2) 圖 12 (b) 中，$f(x)$ 在 $x=c$ 處附近的圖形是凹口向上，此時 $f(c)$ 是極小值。

綜合上述的討論，我們有底下的極值檢定法。①

教學小提醒

① 當 $f'(c)=0$，$f''(c)\neq 0$ 時，不用列表就可判定 $f(c)$ 為極大值或極小值。

極值的二階檢定法

設 $f(x)$ 為多項式函數，且 $f'(c)=0$。

(1) 若 $f''(c)<0$，則 $f(c)$ 是極大值。

(2) 若 $f''(c)>0$，則 $f(c)$ 是極小值。

112

現在，我們利用二階檢定法求極值。

例題 11

求函數 $f(x)=-x^4+8x^2-3$ 的極大值與極小值。

解

首先，求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$f'(x)=-4x^3+16x=-4x(x-2)(x+2)$，

$f''(x)=-12x^2+16$。

接著，解 $f'(x)=0$，得 $x=-2, 0$ 或 2。

最後，利用極值的二階檢定法判定。

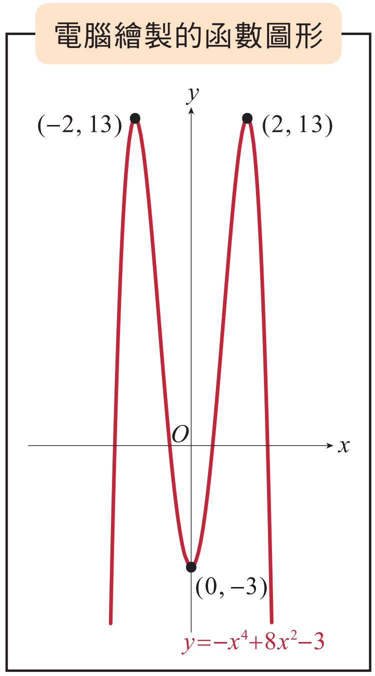
① 因為 $f''(-2)=-32<0$，所以 $f(-2)=13$ 是極大值。

② 因為 $f''(0)=16>0$，所以 $f(0)=-3$ 是極小值。

③ 因為 $f''(2)=-32<0$，所以 $f(2)=13$ 是極大值。

故 $f(x)$ 的極大值為 13，極小值為 -3。

電腦繪製的函數圖形



隨堂練習

求函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$ 的極大值與極小值。

極大值為 8，極小值為 4

極值的二階檢定法在使用上往往比一階檢定法簡潔些，但遇到 $f'(c)=f''(c)=0$ 的情形時，二階檢定法就不適用了，此時可改用一階檢定法來判定，舉例說明如下。

隨堂練習解答

1 首先，求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$f'(x)=3x^2-12x+9$
$=3(x-1)(x-3)$，

$f''(x)=6x-12$。

接著，當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=1$ 或 3，即 $f'(1)=f'(3)=0$。

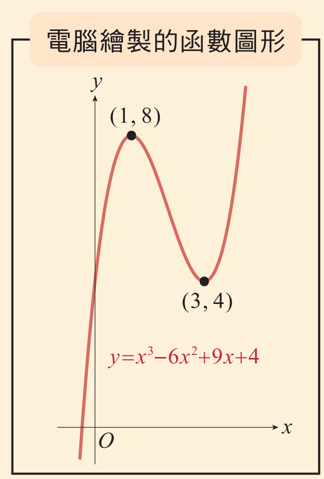
最後，利用極值的二階檢定法判定。

① 因為 $f''(1)=-6<0$，所以 $f(1)=8$ 是極大值。

② 因為 $f''(3)=6>0$，所以 $f(3)=4$ 是極小值。

故 $f(x)$ 的極大值為 8，極小值為 4。

電腦繪製的函數圖形



113

例題 12

求函數 $f(x)=x^4+4x^3+2$ 的極值。

解

首先，求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3),$$

$$f''(x)=12x^2+24x。$$

接著，解 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 0。最後，利用極值的二階檢定法判定。

① 因為 $f''(-3)=36>0$，所以 $f(-3)=-25$ 是極小值。

② 因為 $f''(0)=0$，所以二階檢定法不適用。此時，改用一階檢定法。

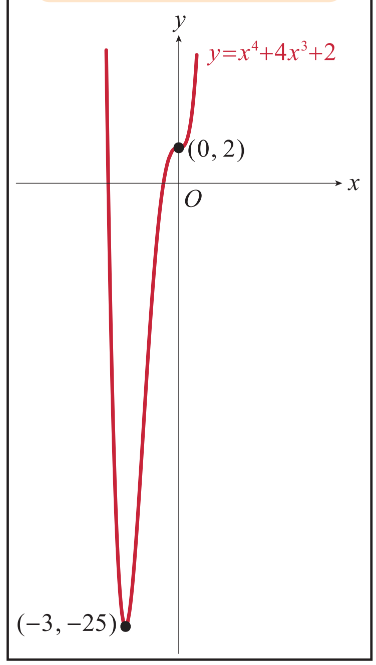
將 $f'(x)$ 的正、負整理成下表：

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-25	↗	2	↗

由上表得知，$f(x)$ 在 $x=0$ 處的左右兩邊都遞增。因此 $f(0)=2$ 不是極值。

故 $f(x)$ 有極小值 $f(-3)=-25$，沒有極大值。

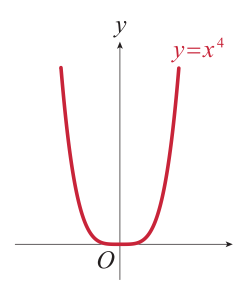
電腦繪製的函數圖形



在上例中，滿足 $f'(c)=f''(c)=0$ 的函數值 $f(c)$ 不是極值；但事實上，滿足一階導數與二階導數同時為 0 的點也有可能是發生極值的點。例如，

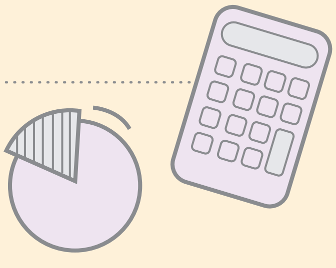
$$f(x)=x^4, f'(x)=4x^3, f''(x)=12x^2，$$

滿足 $f'(0)=f''(0)=0$。我們由 $y=x^4$ 的圖形得知，$f(0)=0$ 是極小值，如圖 13 所示。因此，遇到 $f'(c)=f''(c)=0$ 這種情況時，不可直接認定 $f(c)$ 不是極值，須再利用一階檢定法來確認。



▲圖 13

114



隨堂練習解答

1 首先，求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x+1)(x-1),$$
$$f''(x)=60x^3-30x。$$

接著，解 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 1 或 0（重根）。

最後，利用極值的二階檢定法判定。

① 因為 $f''(-1)=-30<0$，所以 $f(-1)=4$ 是極大值。

② 因為 $f''(1)=30>0$，所以 $f(1)=0$ 是極小值。

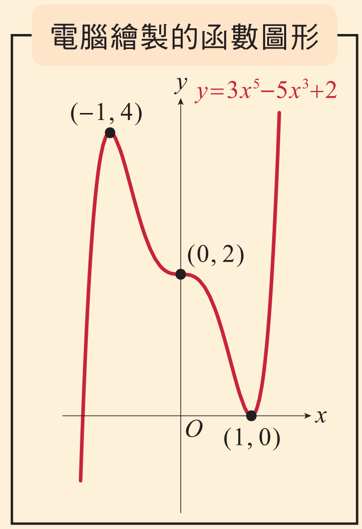
③ 因為 $f''(0)=0$，所以二階檢定法不適用。

此時，改用一階檢定法。將 $f'(x)$ 的正、負整理成下表：

x		-1		0		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗

由上表得知：$f(x)$ 在 $x=0$ 處的左右兩邊都遞減，因此 $f(0)=2$ 不是極值。

故 $f(x)$ 有極小值 $f(1)=0$，極大值 $f(-1)=4$。



2 導函數為 $f'(x)=3x^2+2ax+b$。

因為在 $x=1$ 處有極小值 3，所以 $f'(1)=0$ 且 $f(1)=3$，即

$$\begin{cases}3+2a+b=0\\1+a+b+5=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=-3\\a+b=-3\end{cases},$$

解得 $a=0,b=-3$。

補充例題

1 已知函數 $f(x)=2x^3+ax^2+bx-3$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 處有極值，求實數 a,b 的值。

解：函數 $f(x)$ 的導函數為

$$f'(x)=6x^2+2ax+b。$$

因為 $f(x)$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 處有極值，所以

$$\begin{cases}f'(1)=6+2a+b=0\\f'(2)=24+4a+b=0\end{cases}。$$

解得 $a=-9,b=12$。

2 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有極小值 -4，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-3$，求 $f(x)$。

解：設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq0$）；其導函數為 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$。

因為 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有極小值 -4，所以

$$\begin{cases}f(1)=-4\\f'(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c+d=-4\cdots\cdots①\\3a+2b+c=0\cdots\cdots②\end{cases}。$$

又因為 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-3$，且分母在 $x=0$ 的函數值為 0，

所以分子在 $x=0$ 的函數值為 0，即 $f(0)=d=0\cdots\cdots③$。

代入 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-3$，得 $-3=\lim\limits_{x\to0}\left(ax^2+bx+c\right)=c\cdots\cdots④$。

由 ①②③④ 解得 $a=5,b=-6,c=-3,d=0$。

故 $f(x)=5x^3-6x^2-3x$。

隨堂練習

❶ 求函數 $f(x)=3x^5-5x^3+2$ 的極值。

極大值為 4，極小值為 0

利用多項式函數的極值可以反求此函數，舉例如下。

例題 13

❶ 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 處有極大值 2，在 $x=2$ 處有極小值 -2，求 $f(x)$。

解

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）；其導函數為

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c。$$

因為 $f(x)$ 在 $x=0$ 與 $x=2$ 處有極值，所以

$$f'(0)=0 \text{ 且 } f'(2)=0。$$

又因為 $f(x)$ 在 $x=0$ 與 $x=2$ 時的函數值分別為 2 與 -2，所以

$$f(0)=2 \text{ 且 } f(2)=-2。$$

因此，可得聯立方程式

$$\begin{cases} f'(0)=c=0 \\ f'(2)=12a+4b+c=0 \\ f(0)=d=2 \\ f(2)=8a+4b+2c+d=-2 \end{cases}。$$

解得 $a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=2$。

故 $f(x)=x^3-3x^2+2$。

隨堂練習

❷ ❷ 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 在 $x=1$ 處有極小值 3，求實數 a, b 的值。

$a=0, b=-3$

115

函數性質的判定

教學要點

1 應用求多項式函數極值的方法，對實際的問題找出最佳的解決方案。

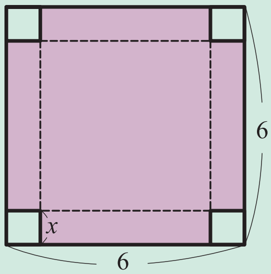
GGB 最大容積（請見享備課 / 教學光碟）

戊 最佳化問題

很多實際的問題都會牽涉到求函數的極值。這裡，我們將應用求多項式函數的極值之方法，找出解決問題的最佳方案，舉例如下。

例題 14

將邊長為 6 公寸的正方形鐵片，四個角各截去一個面積相等的正方形，如右圖所示；然後再將各邊沿著虛線摺起來，做成一個無蓋的長方體容器。設截去的正方形邊長為 x 公寸，且長方體的容積為 $f(x)$ 立方公寸（鐵片厚度不計）。



(1) 邊長 x 的範圍為________。

(2) 寫出函數 $f(x)$。

(3) 當 x 為多少時，長方體的容積達到最大？

解

(1) 因為截去的正方形邊長小於原正方形邊長的一半，且邊長為正數，所以

$$0<x<3。$$

(2) 因為長方體的底面積為 $(6-2x)^2$ 平方公寸，高為 x 公寸，所以長方體的容積為 $x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$ 立方公寸，即

$$f(x)=4x^3-24x^2+36x。$$

(3) 首先，求出 $f'(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=12x^2-48x+36=12\left(x^2-4x+3\right)=12(x-1)(x-3)。$$

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $(0,3)$ 的正、負整理成下表：

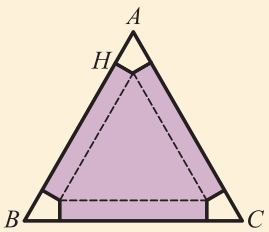
x	0		1		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	16	↘	

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 在區間 $(0,3)$ 上的最大值為 $f(1)=16$。故當 $x=1$ 時，長方體的容積最大。

116

補充例題

1 將一邊長為 12 公分的正三角形紙板，三個角各截去大小相同的四邊形，如圖所示；再將各邊摺起來，作成一無蓋的三角柱紙盒。設截去四邊形的邊長 $\overline{AH}=x$ 公分，紙盒的容積為 $f(x)$ 立方公分（紙板的厚度不計）。



(1) 求 x 的範圍。
(2) 寫出函數 $f(x)$。
(3) 當 x 為多少時，紙盒的容積達到最大？

解：(1) 因為 $\overline{AH}=x$ 小於原正三角形邊長的一半，且邊長為正數，所以 $0<x<6$。

(2) 因為底面三角形的邊長為 $(12-2x)$ 公分，高為 $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 公分，

所以容積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2\cdot\dfrac{x}{\sqrt{3}}=x^3-12x^2+36x$，即

$$f(x)=x^3-12x^2+36x。$$

(3) 首先，求出 $f'(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-24x+36=3(x-2)(x-6)。$$

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $(0,6)$ 的正、負整理成下表：

x	0		2		6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	32	↘	

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 在區間 $(0,6)$ 上的最大值為 $f(2)=32$。
故當 $x=2$ 時，紙盒的容積最大為 32 立方公分。

隨堂練習解答

1 ① 設截去的正方形邊長為 x 公寸，且長方體的容積為 $f(x)$ 立方公寸。

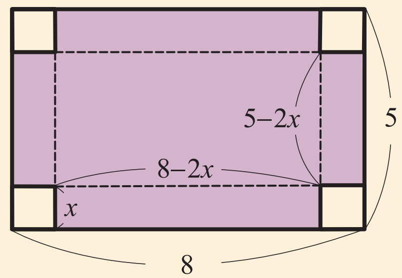
因為截去的正方形邊長必須小於 5 公寸的一半，且邊長為正數，所以

$$0<x<2.5。$$

② 因為長方體的底面積為 $(8-2x)(5-2x)$ 平方公寸，高為 x 公寸，所以其容積為

$x(8-2x)(5-2x)=4x^3-26x^2+40x$ 立方公寸，即

$$f(x)=4x^3-26x^2+40x。$$



③ 求出 $f'(x)$，並將其因式分解如下：

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2-52x+40 \\ &= 4\left(3x^2-13x+10\right) \\ &= 4(x-1)(3x-10)。\end{aligned}$$

將 $f'(x)$ 在區間 $(0, 2.5)$ 的正、負整理成下表：

x	0		1		2.5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	18	$\searrow$	

由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 在區間 $(0, 2.5)$ 上的最大值為 $f(1)=18$。

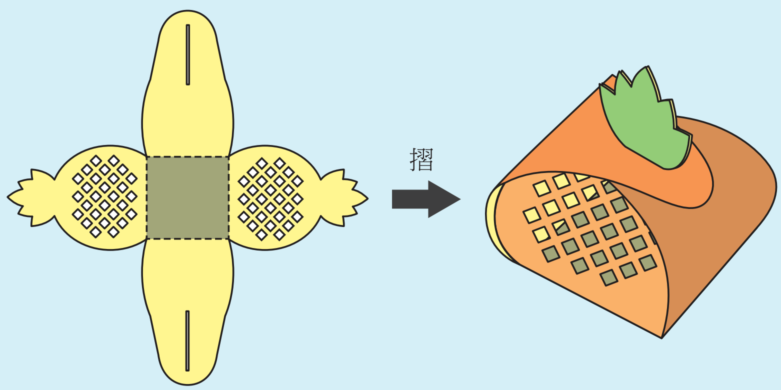
故當截去的正方形邊長為 1 公寸時，所得長方體的容積最大為 18 立方公寸。

隨堂練習

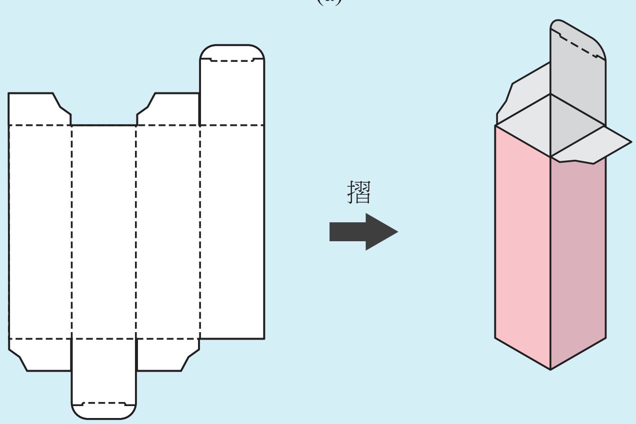
將長 8 公寸、寬 5 公寸的矩形鐵片，四個角各截去一個面積相等的正方形，然後再將各邊摺起來，做成一個無蓋的長方體容器。問：應截去邊長為多少公寸的正方形，才能使長方體的容積最大？ 1 公寸

數學超展開

在例題 14 中，我們只考慮體積的最佳化將一個正方形鐵片摺成一個盒子。生活中經常將一張平面的紙摺成立體狀的包裝盒，例如圖 (a) 的小蛋糕禮盒、圖 (b) 的有蓋包裝盒。它們的設計未必只考慮體積或表面積的最佳化，有時也須兼顧美觀、容易攜帶、容易堆疊、……等因素。



(a)



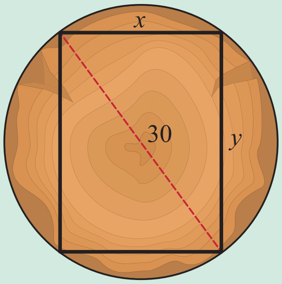
(b)

117

再舉一個極值應用在生活上的例題。

例題 15

要將一根直徑為 30 吋的圓柱形木材鋸成長方體的橫梁，截面是矩形，如圖所示。



設截面是寬為 x 吋、高為 y 吋的矩形，且橫梁的強度 S 和 xy^2 成正比，即

$$S=kxy^2，$$

其中 k 是一個固定的正數。請回答下列問題。

(1) 寫出 x 與 y 的關係式。

(2) 求 x 的範圍。

(3) 已知橫梁的強度 S 為 x 的函數 $f(x)$，求 $f(x)$。

(4) 當 x 與 y 分別為多少時，橫梁的強度 S 最大？

解

(1) 由畢氏定理，得 $x^2+y^2=900$。

(2) 因為矩形的寬比對角線短，且邊長為正數，所以

$$0<x<30。$$

(3) 因為 $y^2=900-x^2$，所以

$$S=kxy^2=kx\left(900-x^2\right)=-kx^3+900kx，$$

即 $f(x)=-kx^3+900kx$。

(4) 首先，求出 $f'(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=-3kx^2+900k=-3k\left(x+10\sqrt{3}\right)\left(x-10\sqrt{3}\right)。$$

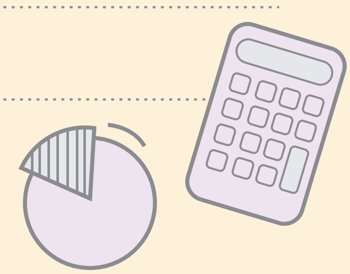
接著，將 $f'(x)$ 在區間 $(0,30)$ 的正、負整理成下表：

x	0		$10\sqrt{3}$		30
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$6000\sqrt{3}k$	$\searrow$	

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 在區間 $(0,30)$ 上的最大值為 $6000\sqrt{3}k$。

故當 $x=10\sqrt{3}$，$y=10\sqrt{6}$ 時，橫梁的強度 S 最大。

118



隨堂練習解答

1 (1) 因為玻璃區域的周長為 16 公尺，所以

$$2x+2y+\pi x=16 \Rightarrow (2+\pi)x+2y=16。$$

(2) 因為 $y=\dfrac{16-(2+\pi)x}{2}>0$，所以 $x<\dfrac{16}{2+\pi}$。

又 $x>0$，因此 $0<x<\dfrac{16}{2+\pi}$。

(3) 因為 $y=\dfrac{16-(2+\pi)x}{2}$，所以玻璃區域的面積為

$2xy+\dfrac{1}{2}\pi x^2=2x\cdot\dfrac{16-(2+\pi)x}{2}+\dfrac{1}{2}\pi x^2=16x-(2+\pi)x^2+\dfrac{1}{2}\pi x^2=-\left(2+\dfrac{1}{2}\pi\right)x^2+16x$（平方公分），

即 $f(x)=-\left(2+\dfrac{1}{2}\pi\right)x^2+16x$。

(4) 首先，求出 $f'(x)$：$f'(x)=-(4+\pi)x+16$。

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $\left(0,\dfrac{16}{2+\pi}\right)$ 的正、負整理成下表：

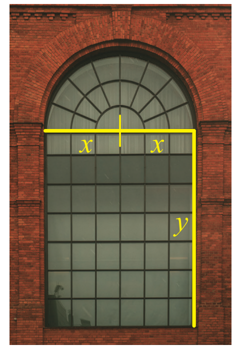
x	0		$\dfrac{16}{4+\pi}$		$\dfrac{16}{2+\pi}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\dfrac{16}{4+\pi}\right)$	$\searrow$	

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 在區間 $\left(0,\dfrac{16}{2+\pi}\right)$ 上的最大值為 $f\left(\dfrac{16}{4+\pi}\right)$。

故當 $x=\dfrac{16}{4+\pi}\approx 2.24$ 時，玻璃區域的面積達到最大。

隨堂練習

要設計一扇羅曼式建築的玻璃窗，玻璃所涵蓋區域的形狀是一個長方形及其上方的一個半圓，如圖所示。設長方形區域的寬（即圓的直徑）為 $2x$ 公尺、高為 y 公尺，且整個玻璃區域的周長為 16 公尺。請回答下列問題。



(1) 寫出 x 與 y 的關係式。

(2) 求 x 的範圍。

(3) 已知玻璃區域的面積為 x 的函數 $f(x)$，求 $f(x)$。

(4) 當 x 為多少時，玻璃區域的面積達到最大？（四捨五入至小數點第二位）

(1) $(2+\pi)x+2y=16$

(2) $0<x<\dfrac{16}{2+\pi}$

(3) $f(x)=-\left(2+\dfrac{1}{2}\pi\right)x^2+16x$

(4) 2.24

119

舉一個極值應用在經濟學上的例題。

例題 16

已知生產 x 件產品的收入函數為

$$f(x)=-x^3+186x^2+375x\text{（元）}，\text{其中 } 0\le x\le 160，$$

求收入達到最大時的產量，及此時的收入。

解

首先，求出 $f'(x)$，並將其因式分解如下：

$$\begin{aligned} f'(x)&=-3x^2+372x+375\\ &=-3\left(x^2-124x-125\right)\\ &=-3(x+1)(x-125)。\end{aligned}$$

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $[0,160]$ 的正、負整理成下表（因為 x 表示產量，所以 $x=-1$ 不予考慮。）：

x	0		125	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	0	↗	$f(125)$	↘

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 的最大值為 $f(125)$。

故當產量為 $x=125$ 件時，收入達到最大，此時的收入為

$$f(125)=-125^3+186\times125^2+375\times125=1000000\text{（元）}。$$

（上式的計算可借助計算機）

在例題 16 中，當產量超過 125 件時，工廠收入減少，可能是須付出較高的加班費及維護費用的緣故。

1

隨堂練習

已知銷售量為 x 單位時，利潤函數為

$$f(x)=-0.2x^3+240x-500\text{（元）}，$$

求利潤達到最大時的銷售量，及此時的利潤。 銷售量 20 單位，利潤 2700 元

120

隨堂練習解答

1 首先，求出 $f'(x)$，並將其因式分解如下：

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0.6x^2+240 \\ &= -0.6(x^2-400) \\ &= -0.6(x+20)(x-20)。\end{aligned}$$

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $[0, \infty)$ 的正、負整理成下表：

x	0		20	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(20)$	$\searrow$

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 的最大值為 $f(20)$。

故當銷售量為 20 單位時，利潤達到最大，此時的利潤為

$$f(20) = -0.2\times 20^3+240\times 20-500 = 2700（元）。$$

習題解答

觀念澄清

(1) ◯：由反曲點的性質，得知正確。

(2) ◯：由極值可能發生的點，得知正確。

(3) ×：若 $f(x)=(x-3)^3$，則 $f'(x)=3(x-3)^2$ 滿足 $f'(3)=0$。但 $f(3)$ 不是極值。

(4) ◯：多項式函數被限制在閉區間上時，一定有最大值與最小值。

(5) ◯：由極值的二階檢定法，得知正確。

一、基礎題

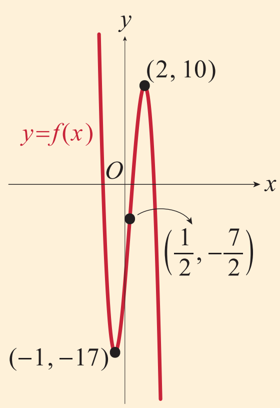
1. 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

$$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x-2)(x+1),$$
$$f''(x)=-12x+6=-6(2x-1)。$$

接著，將 $f(x)$ 的相關資料整理如下表：

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		-17		$-\frac{7}{2}$		10	

最後，根據上表得 $f(x)$ 的圖形如圖所示：



由 $f(x)$ 的圖形得知選項 (1)(2)(3) 正確，(4) 錯誤。

故選 (1)(2)(3)。

2. 導函數 $f'(x)=6x^2+2ax+b$。

由題意知，$f(x)$ 的增減情形在 $x=2$ 與 $x=5$ 處產生變化，得知方程式 $f'(x)=6x^2+2ax+b=0$ 的兩根為 $2, 5$。因此，

$$\begin{cases}24+4a+b=0\\150+10a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=-24\\10a+b=-150\end{cases},$$

解得 $a=-21, b=60$。

4 習題

觀念澄清

關於多項式函數 $f(x)$，下列敘述對的打「○」，錯的打「×」。

☐ (1) 若點 $(1,f(1))$ 為 $f(x)$ 圖形的反曲點，則 $f''(1)=0$。

☐ (2) 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 處有極值，則 $f'(2)=0$。

☐ (3) 若 $f'(3)=0$，則 $f(x)$ 在 $x=3$ 處有極值。

☐ (4) 函數 $f(x)$ 在閉區間 $[5,7]$ 上有最大值也有最小值。

☐ (5) 若 $f'(4)=0$ 且 $f''(4)<0$，則 $f(x)$ 在 $x=4$ 處有極大值。

一、基礎題

(1) ○　(2) ○　(3) ×　(4) ○　(5) ○

1. 關於函數 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-10$，選出所有正確的選項。

(1) $f(x)$ 在區間 $[-1,2]$ 上是遞增函數

(2) $f(x)$ 在區間 $[2,\infty)$ 上是遞減函數

(3) $f(x)$ 在區間 $(1,\infty)$ 的圖形是凹口向下

(4) $f(x)$ 圖形的反曲點為 $(1,3)$。

(1)(2)(3)

2. 已知 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$ 在區間 $[2,5]$ 上為遞減函數，在區間 $[-3,2]$ 與 $[5,8]$ 上為遞增函數，求實數 a, b 的值。

$a=-21$, $b=60$

3 已知點 $(1, 8)$ 為三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 圖形的反曲點，求實數 a, b 的值。

$a=-3, b=9$

4 描繪下列各函數的圖形。

(1) $f(x)=x^3-3x^2+2$。

(2) $f(x)=-x^4+8x^2-3$。

見解析

5 求下列各函數的極大值與極小值。

(1) $f(x)=x^3-9x^2+15x+7$。

(2) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+5$。

(1) 極大值為 14，極小值為 -18

(2) 極小值為 5，沒有極大值

6 求函數 $f(x)=-x^3+3x$ 在閉區間 $[0, 2]$ 上的最大值與最小值。

最大值為 2，最小值為 -2

3. 求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 如下：

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ f''(x)=6x+2a。$$

因為 $f(x)$ 的反曲點為 $(1,8)$，所以 $f''(1)=0$，即 $6+2a=0\Rightarrow a=-3$。

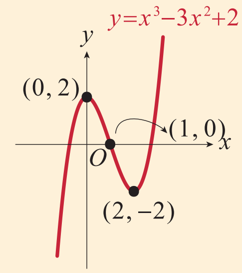
又因為點 $(1,8)$ 在 $f(x)$ 的圖形上，所以 $f(1)=8$，即 $1+a+b+1=8\Rightarrow a+b=6$。解得 $a=-3,\ b=9$。

4. (1) 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2),\ f''(x)=6x-6=6(x-1)。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		0		1		2	
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	╭	2	╮	0	╰	−2	╯



最後，根據上表繪圖。

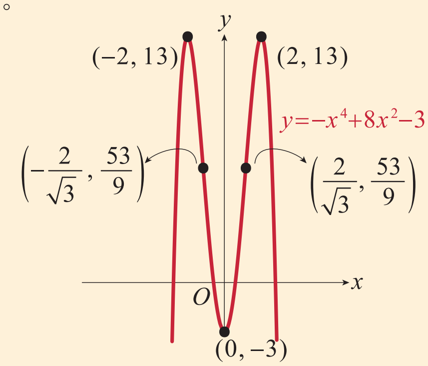
(2) 首先，求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，並將它們因式分解如下：

$$f'(x)=-4x^3+16x=-4x(x-2)(x+2),$$

$$f''(x)=-12x^2+16=-4\left(\sqrt{3}x-2\right)\left(\sqrt{3}x+2\right)。$$

接著，將 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的正、負及各區間的略圖列表如下：

x		-2		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2	
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f(x)$	╭	13	╮	$\frac{53}{9}$	╰	−3	╯	$\frac{53}{9}$	╭	13	╮



最後，根據上表繪圖。

5. (1) 求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5),$$

$$f''(x)=6x-18=6(x-3)。$$

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=1$ 或 5。利用極值的二階檢定法，可得下面的結果。

① 因為 $f''(1)=-12<0$，所以 $f(1)=14$ 是極大值。

② 因為 $f''(5)=12>0$，所以 $f(5)=-18$ 是極小值。

故 $f(x)$ 的極大值為 14，極小值為 -18。

(2) 求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2,$$

$$f''(x)=36x^2-48x+12。$$

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=0$ 或 1（重根）。利用極值的二階檢定法，可得下面的結果。

① 因為 $f''(0)=12>0$，所以 $f(0)=5$ 是極小值。

② 因為 $f''(1)=0$，所以二階檢定法不適用，改用一階檢定法來判定極值。將 $f'(x)$ 的正、負整理成下表：

x		0		1	
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	5	↗	6	↗

由上表得知：$f(x)$ 在 $x=1$ 處的左右兩側都遞增，因此 $f(1)=6$ 不是極值。

故 $f(x)$ 的極小值為 $f(0)=5$，沒有極大值。

6. 導函數為

$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)。$$

當 $f'(x)=0$ 時，解得 $x=-1$ 或 1。

再加上閉區間 $[0,2]$ 的兩個端點 0 與 2，因此 $f(x)$ 的極值只可能發生在 $x=0,1$ 與 2 共三點。

將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

x	0		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	2	↘	−2

由上表得知，$f(x)$ 的最大值為 2，最小值為 −2。

7. 導函數為 $f'(x)=6x^2+2ax+12$。

因為在 $x=1$ 處有極大值 3，所以 $f'(1)=0$ 且 $f(1)=3$，即

$$\begin{cases}6+2a+12=0\\2+a+12+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-9\\a+b=-11\end{cases},$$

解得 $a=-9,\ b=-2$。

8. 首先，求出 $f'(x)$，並將其因式分解如下：

$$f'(x)=-3x^2+12x+36=-3\left(x^2-4x-12\right)=-3(x+2)(x-6)。$$

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $[0,9]$ 的正、負整理成下表：

x	0		6		9
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	216	↘	81

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 的最大值為 216。

故當生產 6 件時，收入達到最大，此時的收入為 $f(6)=216$（百元）。

二、進階題

9. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq0$）。導函數為

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c。$$

依題意，可得聯立方程式

$$\begin{cases}f'(2)=0\\f(2)=-2\\f'(3)=9\\f(3)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12a+4b+c=0\\8a+4b+2c+d=-2\\27a+6b+c=9\\27a+9b+3c+d=2\end{cases},$$

解得 $a=1,\ b=-3,\ c=0,\ d=2$。

故 $f(x)=x^3-3x^2+2$。

7 已知函數 $f(x)=2x^3+ax^2+12x+b$ 在 $x=1$ 處有極大值 3，求實數 a, b 的值。

$a=-9$, $b=-2$

8 已知生產 x 件產品的收入函數為 $f(x)=-x^3+6x^2+36x$（百元），其中 $0\leq x\leq 9$，求收入達到最大時的產量及此時的收入。

生產 6 件，收入 216 百元

二、進階題

9 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處有極小值 -2，且此函數的圖形在 $(3,2)$ 與直線 $y=9x-25$ 相切，求 $f(x)$。

x^3-3x^2+2

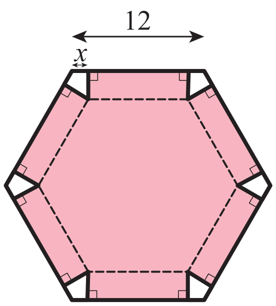
10 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 3，且 $(0,-1)$ 是其圖形的反曲點，求 $f(x)$。

$2x^3-6x-1$

11 已知函數 $f(x)=x^3-3x+k$ 的圖形與直線 $y=3$ 相切，求實數 k 的值（兩解）。

1 或 5

12 將一個邊長為 12 公寸的正六邊形紙張，六個角各截去一個相同的箏形，如圖所示；然後再將各邊沿著虛線摺起來，做成一個無蓋的正六角柱形狀的盒子。設箏形的短邊長度為 x 公寸，且盒子的容積為 $f(x)$ 立方公寸（紙張厚度不計），回答下列問題。



(1) 盒子的高度為________公寸。（以 x 表示）

(2) 寫出函數 $f(x)$。

(3) 當 x 為多少時，盒子有最大的容積？又最大容積為何？

(1) $\sqrt{3}x$
(2) $f(x)=18(x^3-12x^2+36x)$
(3) 當 $x=2$ 時，盒子有最大的容積 576 立方公寸

10. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq0$）。求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，得

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c,\ f''(x)=6ax+2b\text{。}$$

因為 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 3，所以 $f'(-1)=0$ 且 $f(-1)=3$。

又因為 $(0,-1)$ 是圖形的反曲點，所以 $f''(0)=0$ 且 $f(0)=-1$。

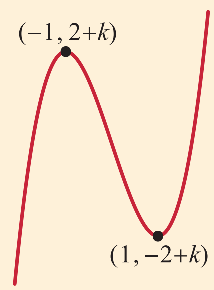
因此，可得聯立方程式

$$\begin{cases} f'(-1)=3a-2b+c=0 \\ f(-1)=-a+b-c+d=3 \\ f''(0)=2b=0 \\ f(0)=d=-1 \end{cases}\text{。}$$

解得 $a=2,b=0,c=-6,d=-1$。

故 $f(x)=2x^3-6x-1$。

11. 由 $f(x)$ 的導函數



$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)\text{，}$$

得 $f(x)$ 的兩個極值為 $f(-1)=2+k$ 及 $f(1)=-2+k$。

又因為 $f(x)$ 的三次項係數為正，所以 $f(x)$ 的圖形如圖所示。

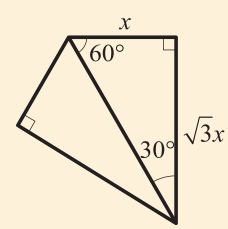
因為圖形與直線 $y=3$ 相切，所以

$$2+k=3 \text{ 或 } -2+k=3\text{。}$$

故 $k=1$ 或 5。

12. (1) 因為正六邊形的每一個內角為 120°，所以箏形的四個內角分別為 90°、120°、60°、90°。

因此，箏形的長對角線會將其分割成兩個 90°－60°－30° 的直角三角形，如右圖所示。



因為箏形的短邊長度為 x 公寸，即圖中 30° 角的對邊長為 x 公寸，

所以 60° 角的對邊長為 $\sqrt{3}x$ 公寸，也就是說，盒子的高度為 $\sqrt{3}x$ 公寸。

(2) 因為箏形的短邊長小於原正六邊形邊長的一半，且邊長為正數，所以

$$0<x<6\text{。}$$

盒子的底面仍為一個正六邊形，其邊長為 $12-2x$ 公寸，且其面積為

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(12-2x)^2=6\sqrt{3}(6-x)^2$$

平方公寸。又由 (1) 得知盒子的高為 $\sqrt{3}x$ 公寸，因此盒子的容積為

$$6\sqrt{3}(6-x)^2\times\sqrt{3}x=18x(6-x)^2=18\left(x^3-12x^2+36x\right)$$

立方公寸，即 $f(x)=18\left(x^3-12x^2+36x\right)$。

(3) 首先，求出 $f'(x)$，並將 $f'(x)$ 因式分解如下：

$$f'(x)=18\left(3x^2-24x+36\right)=54\left(x^2-8x+12\right)=54(x-2)(x-6)\text{。}$$

接著，將 $f'(x)$ 在區間 $(0,6)$ 的正、負整理成下表：

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	576	↘	

最後，由函數的遞增與遞減得知，$f(x)$ 在區間 $(0,6)$ 上的最大值為 $f(2)=576$。

故當 $x=2$ 時，盒子有最大的容積，且最大容積為 576 立方公寸。

13. 依題意，得利潤函數為

$$P(x)=20x-C(x)=20x-\left(x^2-10x+20\right)=-x^2+30x-20\text{（千元）。}$$

首先，求出 $P'(x)$，並將其因式分解如下：

$$P'(x)=-2x+30=-2(x-15)\text{。}$$

接著，將 $P'(x)$ 在區間 $[0,\infty)$ 的正、負整理成下表：

x	0		15	
$P'(x)$		+	0	−
$P(x)$	−20	↗	205	↘

最後，由函數的遞增與遞減得知，$P(x)$ 的最大值為 205。

故生產此產品 15 件利潤達到最大，此時的利潤為 205 千元。

14. (1) 因為 $C'(x)$ 為一次式，所以 $C(x)$ 為二次式。設 $C(x)=ax^2+bx+c$，則

$$C'(x)=2ax+b\text{，}$$

得 $2a=-0.2, b=10$，解得 $a=-0.1, b=10$。

又 $C(0)=c=10$，故 $C(x)=-0.1x^2+10x+10$。

(2) 因為利潤 ＝ 收入 － 成本，所以

$$P(x)=R(x)-C(x)=\left(20x-0.2x^2\right)-\left(-0.1x^2+10x+10\right)=-0.1x^2+10x-10\text{。}$$

(3) 首先，求出 $P'(x)$，並將其因式分解如下：

$$P'(x)=-0.2x+10=-0.2(x-50)\text{。}$$

接著，將 $P'(x)$ 在區間 $[0,\infty)$ 的正、負整理成下表：

x	0		50	
$P'(x)$		+	0	−
$P(x)$	−10	↗	240	↘

最後，由函數的遞增與遞減得知，$P(x)$ 的最大值為 240。

故生產此產品 50 件利潤達到最大，此時的利潤為 240 千元。

13 設生產 x 件產品的成本函數為

$$C(x)=x^2-10x+20\text{（千元）。}$$

若每件產品的銷售價為 2 萬元，則生產此產品多少件利潤最大？又最大利潤為何？

生產 15 件，利潤最大 205 千元

14 設生產 x 件產品的收入函數為 $R(x)=20x-0.2x^2$（千元），邊際成本函數為 $C'(x)=10-0.2x$（千元／件），且固定成本 $C(0)=10$（千元）。

(1) 已知成本函數 $C(x)=ax^2+bx+c$，求 a, b, c 的值。

(2) 利用利潤 ＝ 收入 － 成本，求利潤函數 $P(x)$。

(3) 試問生產此產品多少件利潤最大？又最大利潤為何？

(1) $a=-0.1, b=10, c=10$

(2) $P(x)=-0.1x^2+10x-10$

(3) 生產 50 件，利潤最大 240 千元

補充教材

● 函數的極值（補充多項式函數的極值）

若函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 有極值且可微分，則 $f'(c)=0$。

【證明】

若 $f'(c)>0$，則因為

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\text{，}$$

所以 x 在很靠近 c 但不等於 c 時，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 與其極限 $f'(c)$ 之間的差，可以小過給定的正數 $\frac{f'(c)}{2}$，亦即

$$-\frac{f'(c)}{2}<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)<\frac{f'(c)}{2}\text{，}$$

因此，

$$0<\frac{f'(c)}{2}<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<\frac{3f'(c)}{2}\text{。}$$

因為當 x 很靠近 c 但不等於 c 時，$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 為正，所以 x 在 c 附近且 $x<c$ 的時候，$f(x)<f(c)$，

同時 x 在 c 附近且 $x>c$ 的時候，$f(x)>f(c)$，這些與 f 在 $x=c$ 有極值矛盾。

同理，$f'(c)<0$ 也會得到矛盾。故 $f'(c)=0$。