

## 6

# 積分的應用



## 主題一

## 曲線間的面積

(搭配課本 P.182~P.188)

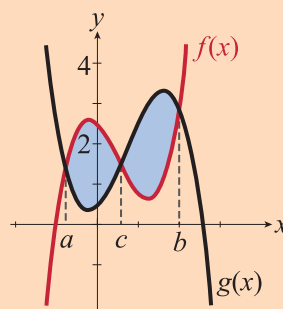
1. 設  $f(x)$  與  $g(x)$  為區間  $[a, b]$  上的兩個連續函數且滿足  $f(x) \geq g(x)$ 。則由  $f(x)$ ， $g(x)$  的圖形與  $x=a$ ， $x=b$  所圍成的區域為  $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ 。

2. 設  $f(x)$  與  $g(x)$  為區間  $[a, b]$  上的連續函數。

在區間  $[a, c]$  上， $f(x) \geq g(x)$ ；在區間  $[c, b]$  上， $g(x) \geq f(x)$ 。

如右圖，由  $f(x)$ ， $g(x)$  的圖形與  $x=a$ ， $x=b$  所圍成的區域面

積為  $\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$ 。



### 例題 1

【配合課本例 1】

求兩函數  $f(x) = x^2$ ， $g(x) = x - 2$  的圖形與  $x=0$ ， $x=2$  所圍成的區域面積。

解

 演練 1

求兩函數  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ， $g(x) = -x^2$  的圖形與  $x = -2$ ， $x = 1$  所圍成的區域面積。

 解



例題 2

【配合課本例 2】

求兩函數  $f(x) = -x^2 + 5x - 1$  與  $g(x) = 2x^2 - 7x + 8$  的圖形所圍成的區域面積。

 解

 演練 2

求兩函數  $f(x) = -x^2$  與  $g(x) = x^2 - 4x$  的圖形所圍成的區域面積。

解



## 例題 3

【配合課本例 3】

求兩函數  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$  與  $g(x) = -x^2 - 1$  的圖形所圍成的區域面積。

解

 演練 3

求兩函數  $f(x) = x^2$  與  $g(x) = x^3$  的圖形所圍成的區域面積。

 解

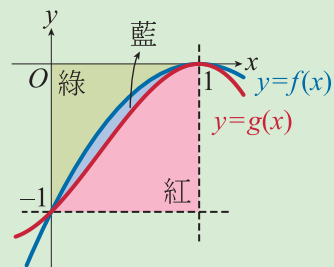


例題 4

【配合課本例 4】



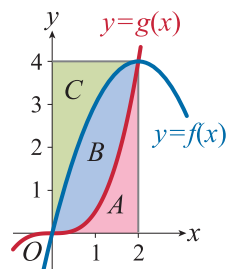
美術課讓同學在一面邊長為 1 公尺的正方形木板上色，其設計草圖如右。已知藍、紅曲線分別是用函數  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$  與  $g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$  在區間  $[0, 1]$  上的圖形描繪而成，求此草圖中的綠、藍、紅三塊區域的面積比。



 解

### 演練 4

- ★ 某店家計畫以粽葉為圖案的招牌，其設計草圖如右。已知粽葉  $B$  的上、下緣分別是用函數  $f(x) = -x^2 + 4x$  與  $g(x) = \frac{1}{2}x^3$  在區間  $[0, 2]$  上的圖形描繪而成，求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三塊區域的面積比。



解



## 主題二

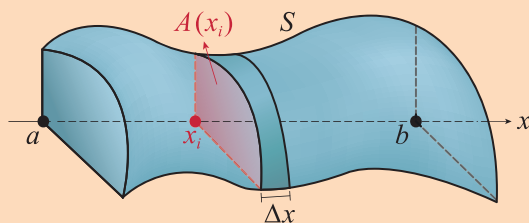
## 立體的體積

(搭配課本 P.188~P.198)

### 1. 立體的體積公式：

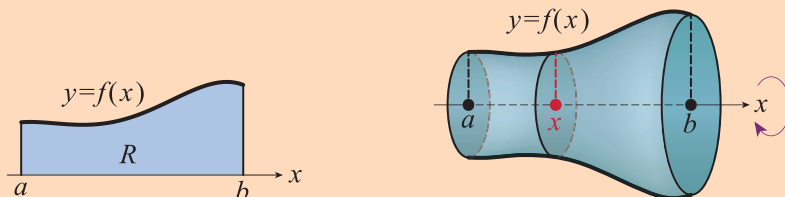
設立體  $S$  位於兩平行平面  $x=a$  與  $x=b$  ( $a < b$ ) 之間。若通過點  $(x, 0, 0)$  且垂直  $x$  軸的平面與  $S$  所截出的面積為連續函數  $A(x)$ ，則  $S$  的體積為

$$\int_a^b A(x) dx。$$

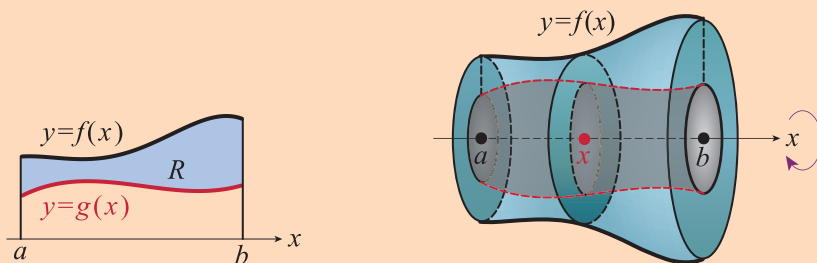


### 2. 旋轉體的體積公式。

(1) 設函數  $f(x)$  是區間  $[a, b]$  上的非負連續函數。將  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸、 $x=a$  及  $x=b$  所圍成的區域繞  $x$  軸所得的旋轉體體積為  $\int_a^b \pi (f(x))^2 dx$ 。



(2) 設  $f(x)$  與  $g(x)$  在區間  $[a, b]$  上為連續函數且滿足  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ，並令  $R$  為  $f(x)$  與  $g(x)$  的圖形與  $x=a$  及  $x=b$  所圍成的區域（如下圖），則區域  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積為  $\int_a^b \pi (f(x))^2 dx - \int_a^b \pi (g(x))^2 dx$ 。



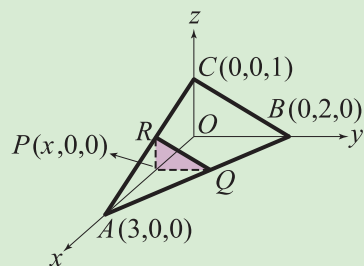


### 例題 5

【配合課本例 5】

在空間中，設  $S$  為平面  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$  與三個坐標平面圍成的錐體，如圖所示。

- (1) 已知通過點  $(x, 0, 0)$  且垂直  $x$  軸的平面與  $S$  所截出的圖形為直角三角形，其面積為  $A(x)$ ，求  $A(x)$ 。
- (2) 求  $S$  的體積。



解

### 演練 5

試證：四面體的體積等於其底面積與高之乘積的三分之一。

解



## 例題 6

【配合課本例 6】

已知  $R$  為函數  $f(x) = x^2 + 1$  的圖形與  $x$  軸、 $x=0$  及  $x=2$  所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積  $V$ 。

解



## 演練 6

已知  $R$  為函數  $f(x) = x^2 + 2$  的圖形與  $x$  軸、 $x=0$  及  $x=1$  所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積。

解

6



## 例題 7

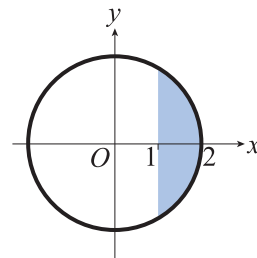
【配合課本例 7】

利用半徑為  $a$  之球體體積  $\int_{-a}^a \pi \left( \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{4}{3} \pi a^3$ 。證明方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  繞  $x$  軸旋轉所得之旋轉體的體積  $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$ 。(這個旋轉體的形狀像橄欖球)

解

 演練 7

已知有一半徑為 2（單位）的球體，今一離球心 1（單位）的平面鋼板恰將球面  $S$  分割成兩塊（鋼板厚度忽略不計），求這兩塊區域與平面所圍成的體積比。（小區塊：大區塊）



 解



例題 8

【配合課本例 8】

已知  $R$  為圓  $x^2 + y^2 = 1$  與函數  $g(x) = -x^2 + 1$  的圖形與  $x=0$ ,  $x=1$  所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積  $V$ 。

 解

 演練 8

已知  $R$  為兩函數  $f(x) = ax$  ( $a > 0$ ) 與  $g(x) = x^2$  的圖形所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積  $V$ 。(以  $a$  表示)

解



## 例題 9

【配合課本例 9】

設  $C$  是以點  $(0, 1)$  為圓心，半徑為 1 的圓。回答下列問題。

(1) 下列哪一個是圓  $C$  上半圓弧的方程式？（單選題）

①  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$     ②  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$     ③  $x = \sqrt{1 - (y - 1)^2}$     ④  $x = -\sqrt{1 - (y - 1)^2}$ 。

(2) 利用半徑為  $a$  的圓面積是  $2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^2$ ，求圓  $C$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積。

解

6

 演練 9

利用半徑為  $a$  之圓的面積  $2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^2$ 。求圓： $x^2 + (y - 2)^2 = 1$  的內部繞  $x$  軸旋轉所得之旋轉體的體積  $V$ 。

解



## 重要精選考題



(主：代表本單元對應的主題)

### 基礎題

- 1 求兩函數  $f(x) = x + 2$  與  $g(x) = -x^2 + 1$  的圖形與  $x = -1$ ， $x = 1$  所圍成的區域面積。

主一

解

- 2 求兩函數  $f(x) = x + 3$  與  $g(x) = x^2 + 1$  的圖形所圍成的區域面積。

主一

解

- 3 求兩函數  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1$  與  $g(x) = x^2 + 1$  的圖形所圍成的區域面積。

主一

解

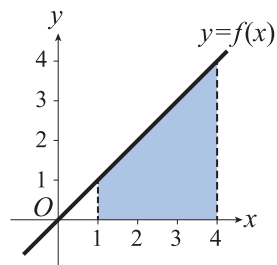
- 4 設函數  $f(x) = x^3 + ax^2$  的圖形與  $x$  軸所圍的區域面積為 3，試求實數  $a$  之值。

主一

解

- 5 設  $R$  為函數  $f(x) = x$  的圖形，與  $x$  軸， $x = 1$  及  $x = 4$  所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積。

解



主二

- 6 設  $R$  為函數  $f(x) = x^2 - 3x$  的圖形與  $x$  軸， $x = -1$  及  $x = 3$  所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積。

主二

解

- 7 設  $R$  為函數  $f(x) = x + 3$  與  $g(x) = x^2 + 1$  的圖形， $x = 0$  及  $x = 1$  所圍成的區域，求  $R$  繞  $x$  軸所得的旋轉體體積。

主二

解

### 進階題

- 1 若兩函數  $f(x) = x^3$  與  $g(x) = a^2x$  的圖形所圍成的區域面積為 8，求  $a$  之值。

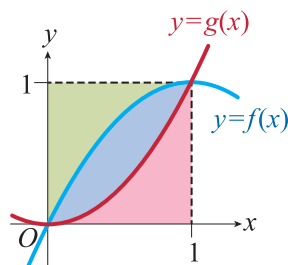
解



- 2 有一面邊長為 1 單位的正方形色板，其設計草圖如右。已知藍、紅曲線分別是用函數  $f(x) = -x^2 + 2x$  與  $g(x) = x^2$  在區間  $[0, 1]$  上的圖形描繪而成。

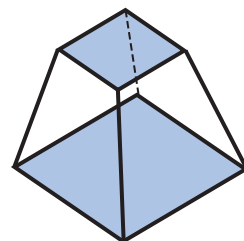
- (1) 求綠、藍、紅三塊區域的面積比。
- (2) 求將此色板繞  $x$  軸，綠、藍、紅三塊區域所得的體積比。

解



- 3 有一上下面邊長依次為 2 單位、4 單位的正方形梯形臺，其側面是四個全等的等腰梯形，且其高為 3 單位，求此梯形臺的體積。(提示：此梯形臺的側面的四個稜邊延長後，會交於一點，且圖形成為四角錐)

解



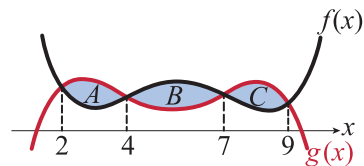


## 考前衝刺精華



1 已知兩函數  $f(x)$ 、 $g(x)$  的圖形如圖所示，封閉區域  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的面積依序為 2、3、2，則  $\int_2^9 (g(x) - f(x)) dx$  的值為何？

- (1) 7      (2) 3      (3) 1      (4) -1      (5) -3。



【臺中二中】

解



2 求曲線  $y = \frac{1}{2}x^3$  與直線  $y = 2x$  所圍成之區域面積 = \_\_\_\_\_。

【新北高中】

解



3 求兩函數  $f(x) = -x^2 + 5x - 1$  與  $g(x) = 2x^2 - x - 10$  的圖形所圍成的區域面積為下列哪個選項？

- (1) 4      (2) 16      (3) 22      (4) 26      (5) 32。

【安康高中】

解



4 兩函數  $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$  與  $g(x) = x^2 + 6x + 1$  的圖形所圍成的區域面積為\_\_\_\_\_。

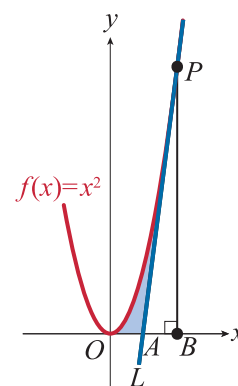
【屏東女中】

解



5 在圖中， $P$  為函數  $f(x) = x^2$  圖形上一點， $L$  為以  $P$  為切點的切線。已知  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸，直線  $L$  所圍成區域的面積為  $\frac{16}{3}$ ，試求  $P$  點的坐標為\_\_\_\_\_。

解



【武陵高中】



6 將半徑 5 公分的球滾入桌面上一個半徑 4 公分的圓洞中，求這個球在桌面以上部分的體積為\_\_\_\_\_立方公分。

【臺南女中】

解

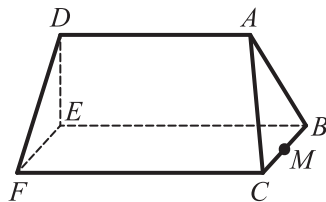




## 歷屆大考觀摩



- 1 有一積木(如圖), 其中  $ACFD$  和  $ABED$  是兩個全等的等腰梯形,  $BCFE$  是一個矩形。設  $A$  點在直線  $BC$  的投影為  $M$  且在平面  $BCFE$  的投影為  $P$ 。已知  $\overline{AD}=30$ 、 $\overline{CF}=40$ 、 $\overline{AP}=15$  且  $\overline{BC}=10$ 。將平面  $BCFE$  置於水平桌面上, 且將與  $BCFE$  平行的平面稱為水平面。



若水平面  $W$  介於  $A, P$  之間且與  $A$  的距離為  $x$ , 則  $W$  與此積木所截的矩形區域之面積為  $20x + \frac{4}{9}x^2$ 。將線段  $\overline{AP}$  的  $n$  等分點沿著向量  $\overrightarrow{AP}$  的方向依序設為  $A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = P$ 。在每一個分段  $\overline{P_{k-1}P_k}$ , 考慮以通過  $P_k$  的水平面與此積木所截的矩形為底、 $\overline{P_{k-1}P_k}$  為高, 所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和(不需化簡), 且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。

【111分科甲(修)】

解



- 2 坐標平面上, 以  $\Gamma$  表示多項式函數  $y = x^3 - 4x^2 + 5x$  的圖形, 且以  $L$  表示直線  $y = 2x$ 。在  $x \geq 0$  的範圍內,  $\Gamma$  與  $L$  有三個相異交點。試求  $\Gamma$  與  $L$  所圍有界區域面積的值。

【110 指甲(修)】

解



- 3 在坐標平面上以  $\Omega$  表曲線  $y = x - x^2$  與直線  $y = 0$  所圍的有界區域。

(1) 試求  $\Omega$  的面積。

(2) 若直線  $y = cx$  將  $\Omega$  分成面積相等的兩塊區域, 試求  $c$  之值。

【103 指甲】

解



4 設  $p(x)$  為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的  $t \geq 1$ ，函數  $y = p(x)$ 、 $y = -1 - x^2$  的圖形與直線  $x = 1$ 、 $x = t$  所圍成有界區域的面積為  $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$ （其中  $C$  為常數）。

(1) 試說明  $p(x) > -1 - x^2$  對所有的  $x \geq 1$  均成立。

(2) 設  $t \geq 1$ ，試求  $\int_1^t (-1 - x^2) dx$ 。

(3) 試求  $C$ 。

(4) 試求  $p(x)$ 。

【102 指甲】

解



5 求兩函數  $f(x) = x(2 - x)$  與  $g(x) = x$  及  $x$  軸所圍成的區域面積。

解



6 在拋物線  $y = -x^2 + 4x - 3$  上，分別以  $(0, -3)$  及  $(3, 0)$  兩點為切點作切線。試求由此二切線與拋物線所圍成區域之面積。

解





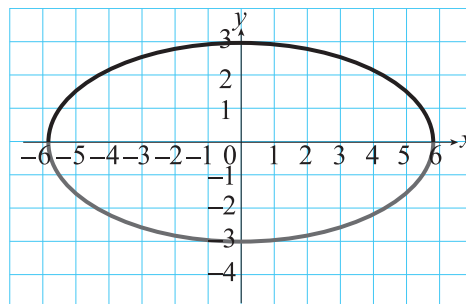
## 歷屆大考觀摩



7 如圖，設橢圓  $\Gamma$  之方程式為  $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$ 。設  $R$  為  $\Gamma$  內部而被  $x = -5$  及  $x = 5$  所夾之區域，將  $R$  繞  $\Gamma$  的長軸旋轉一周，而形成一酒桶狀立體區域。由積分定義知，此一立體區域之體積  $V$  可以表成  $\int_{-5}^5 f(x) dx$ 。

(1) 求  $f(x)$ 。 (2) 求  $V$  的值。

解



8 將一實心地球儀浸入水中，令其北極朝上，而北緯  $30^\circ$  緯線恰與水面齊，則浮出水面部分之體積，占全球體體積為何？（註：赤道緯度為  $0^\circ$ ，北極為北緯  $90^\circ$ ）

解

