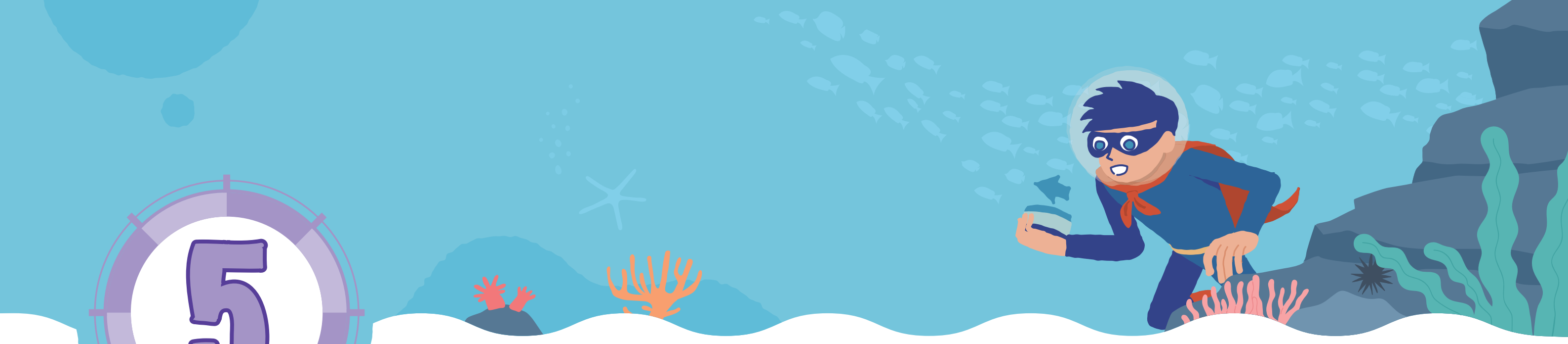


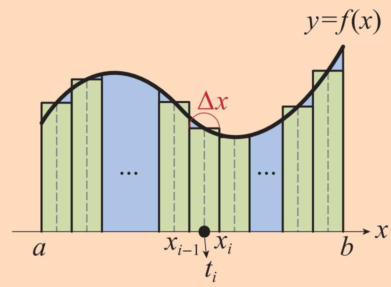
5 積分

主題一　函數圖形下的面積

（搭配課本 P.148～P.155）

1. 非負連續函數的黎曼和與面積：

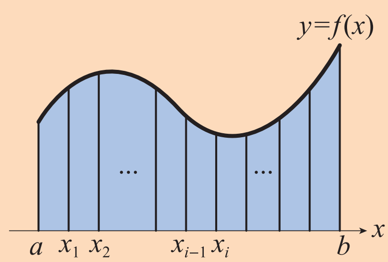
函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，且 $f(x)\geq 0$。函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域面積為 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$，其中 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是區間 $[a,b]$ 的一組分割，t_i 為區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中的任一點，$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$。



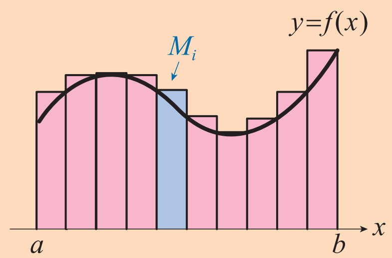
說明：

令 R 為 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域。

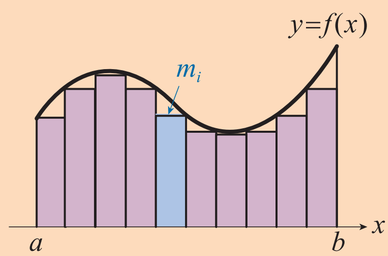
(1) **分割**：先將區間 $[a,b]$ 平分成 n 等分，每一等分長為 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，分割點為 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，再過這些等分點分別作 x 軸的垂直線，這些垂直線把 R 分割成 n 個區域（如下圖）。這些區域面積總和就是 R 的面積。



(2) **逼近**：因為 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，所以在每一等分區間上，$f(x)$ 都有最大值與最小值。令在區間 $[x_{i-1},x_i]$（$i=1,2,\cdots,n$）上的最大值為 M_i，最小值為 m_i，則（如下圖）。上和 $U_n=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x$，下和 $L_n=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x$。

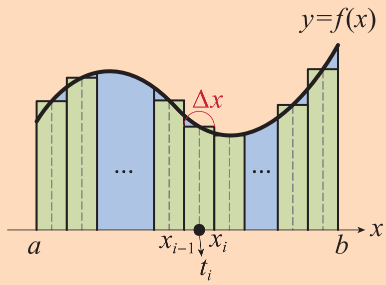


上和



下和

在區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中任取一點 t_i，以高為 $f(t_i)$、寬為 Δx 的長方形面積 $f(t_i)\cdot\Delta x$ 作為該區間區域面積的近似值（如下圖），此時圖中的 n 個矩形面積總和為 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$。



顯然可知 $L_n \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x \le U_n$，其中 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 稱為函數 $f(x)$ 對於分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 的黎曼和。

(3) **求極限**：當 $f(x)$ 在閉區間上連續時，上和、下和與黎曼和會有共同的極限，且該共同的極限為 R 的面積，即 R 的面積 $=\lim\limits_{n\to\infty} L_n=\lim\limits_{n\to\infty} U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$，其中 t_i 為區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中的任一點。

註：1.當每個 $f(t_i)$ 都是區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中的最大值時，黎曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 為上和 U_n。

2.當每個 $f(t_i)$ 都是區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中的最小值時，黎曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x$ 為下和 L_n。

5

例題 1

【配合課本例 1】

設函數 $f(x)=2x$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=3$ 所圍成之區域為 R，

(1)若將區間 $[0,3]$ 分成 6 等分，則區域 R 被分成 6 個長條形的區域，求這 6 個長條形區域的面積之上和 U_6 與下和 L_6。

(2)若將區間 $[0,3]$ 分成 n 等分，則區域 R 被分成 n 個長條形的區域，求這 n 個長條形區域的面積之上和 U_n 與下和 L_n。

(3)利用(2)的結果求區域 R 的面積。

(4)利用三角形的面積公式驗證(3)的結果。

解

演練 1

設函數 $f(x)=x+2$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=1$ 所圍成的區域為 R。將區間 $[0,1]$ 平分成 n 等分。

(1)求上和 U_n 與下和 L_n。

(2)利用(1)的結果求 R 的面積。

(3)利用梯形的面積公式驗證(2)的結果。

解

例題 2

【配合課本例 2】

已知 $b>0$，且 R 為函數 $f(x)=3x^2$ 的圖形與 x 軸、 $x=0$ 及 $x=b$ 所圍成的區域，回答下列問題。

(1)將區間 $[0,b]$ 平分成 n 等分，分割點為 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ ，令 $\Delta x=\dfrac{b}{n}$ ，在區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中取 $t_i=x_i=\dfrac{ib}{n}$ （右端點）， $i=1,2,\cdots,n$ ，得黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x=$______。

(2)求 R 的面積。

解

演練 2

已知 $b>0$，且 R 為函數 $f(x)=x$ 的圖形與 x 軸、$x=0$ 及 $x=b$ 所圍成的區域，回答下列問題。

(1)將區間 $[0,b]$ 平分成 n 等分，分割點為 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta x=\dfrac{b}{n}$，在區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中取 $t_i=x_i=\dfrac{ib}{n}$ （右端點）， $i=1,2,\cdots,n$ ，得黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x=$______。

(2)求 R 的面積。

解

主題二　定積分

（搭配課本 P.156～P.158）

1. 定積分的定義：

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是平分區間 $[a,b]$ 的分割，t_i 為區間 $[x_{i-1},x_i]$ 中的任一點，$\Delta x=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$。黎曼和的極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\cdot\Delta x$ 稱為函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的定積分，並記作 $\int_a^b f(x)dx$，其中 a 與 b 分別稱為該定積分的**下限**與**上限**，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta x$。

2. 定積分的符號：

定積分的符號 $\int$ 是萊布尼茲首先使用，這符號是由英文 Sum（和）的第一個字母 S 拉長而來，藉此表示定積分是由黎曼和（取極限）得出，是求和的一種推廣，如下所示。

$$\begin{array}{cccl}\sum\limits_{i=1}^{n} & f(t_i) & \Delta x & [\text{黎曼和}]\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \int_a^b & f(x) & dx & [\text{定積分}]\end{array}$$

註：「$\int$」為積分符號，表示離散和「$\sum$」在極限步驟下的連續和。

例題 3

【配合課本例 3】

求 $\int_0^3 (x^2-4)dx$ 的值。

解

演練 3

求 $\int_{0}^{3}\left(-x^2+2x\right)dx$ 的值。

解

主題三　多項式函數的反導函數　（搭配課本 P.158～P.159）

1. 反導函數原理：
   若多項式函數 $F(x)$ 與 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的反導函數，則 $G(x)=F(x)+c$（c 為常數）。
2. 多項式函數的反導函數公式：
   多項式函數 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的所有反導函數為
   $\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+c$（$c$ 為任意常數）。
3. 反導函數與不定積分：
   我們以符號 $\int f(x)dx$ 來表示函數 $f(x)$ 的所有反導函數，並稱 $\int f(x)dx$ 為 $f(x)$ 的不定積分。

   說例　$\int\left(a_2x^2+a_1x+a_0\right)dx=\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+c$（$c$ 為任意常數）。

例題 4

【配合課本例 4】

求 $3x^2+2x-1$ 的所有反導函數。

解

演練 4

已知 $F(x)$ 為 $f(x)=3x^2+6x-1$ 的一個反導函數且 $F(-2)=10$，求 $F(x)$。

解

5

主題四　微積分基本定理

（搭配課本 P.160～P.165）

1. 微積分基本定理：

設 $f(x)$ 為 $[a,b]$ 上的連續函數。若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，則

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

註：若將上式定積分的上限視為自變數 x，即 $\int_a^x f(t)dt=F(t)\Big|_a^x=F(x)-F(a)$，

則此定積分為 x 的函數。將函數 $\int_a^x f(t)dt$ 對 x 微分所得的函數就是 $f(x)$，

亦即 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=\left(F(x)\Big|_a^x\right)'=\left(F(x)-F(a)\right)'=F'(x)-F'(a)=f(x)-0=f(x)$。

2. 定積分的運算性質：

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數，$a\le c\le b$，且 k 是任意常數，則有下列性質。

(1) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$。

(2) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$。

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$。

(4) $\int_a^a f(x)dx=0$。

例題 5

【配合課本例 5】

求下列各式的值。

(1) $\int_{-1}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx$。　　(2) $\int_{1}^{3}\left(x^2-4x+3\right)dx$。

解

演練 5

求下列各式的值。

(1) $\int_{2}^{5}(x-3)^2\,dx$。　　(2) $\int_{-2}^{1}\left(x^2-x^3\right)dx$。

解

例題 6

【配合課本例 6】

已知 $\int_{-4}^{3}(ax+b)\,dx=-42$ 且 $\int_{0}^{3}(ax+b)\,dx=-6$，求實數 a 、 b 的值。

解

演練 6

已知 $\int_{-2}^{4}(3x^2+bx+c)\,dx=78$ 且 $\int_{-2}^{1}(3x^2+bx+c)\,dx=3$，求實數 b 、 c 的值。

解

5

例題 7

【配合課本例 7】

已知函數 $f(x)$ 滿足 $\int_{-4}^{0} f(x)dx=-36$ 且 $\int_{0}^{3} f(x)dx=-6$，求下列各式的值。

(1) $\int_{-4}^{3} f(x)dx$。　(2) $\int_{-4}^{3} 2f(x)dx$。　(3) $\int_{-4}^{3} (3f(x)-6x)dx$。

解

演練 7

已知函數 $f(x)$ 滿足 $\int_{-2}^{4} f(x)dx=78$ 且 $\int_{1}^{4} f(x)dx=75$，求下列各式的值。

(1) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$。　(2) $\int_{-2}^{1} 4f(x)dx$。　(3) $\int_{-2}^{1} (3f(x)+2)dx$。

解

例題 8

【配合課本例 8】

已知 a 為實數，且函數 $f(x)$ 滿足 $\int_{a}^{x} f(t)dt=x^2+x-12$。

(1)求 $f(x)$。　(2)求 a 的值。

解

演練 8

已知 a 為實數，且函數 $f(x)$ 滿足 $\int_a^x f(t)dt = 2x-3$。

(1)求 $f(x)$。　　(2)求 a 的值。

解

主題五　定積分與面積

（搭配課本 P.166～P.173）

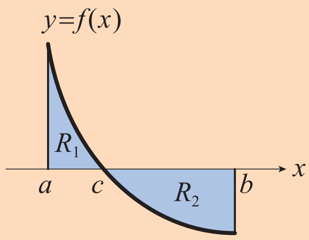
設函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成區域的面積為 R，其中在區間 $[a,c]$ 上滿足 $f(x)\geq 0$，在區間 $[c,b]$ 上滿足 $f(x)\leq 0$，又令 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=a$ 及 $x=c$ 所圍成區域的面積為 R_1；$f(x)$ 的圖形與 x 軸、$x=c$ 及 $x=b$ 所圍成區域的面積為 R_2，則

1. 面積以定積分表示：

面積 $R=$（面積 R_1）＋（面積 R_2）

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b(-f(x))dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx \text{。}$$

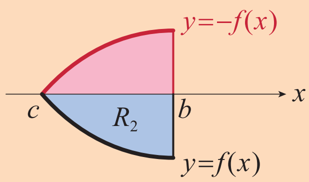


2. 定積分以面積表示：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b(-f(x))dx$$

＝（面積 R_1）－（面積 R_2）。



3. 圓面積以定積分表示：

設圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=r^2$，則此圓的圓心 $(0,0)$，半徑 r。因此可知圓 C 的周長為 $2\pi r$，圓 C 的面積 πr^2。(國中學過的結果)

(1) 對圓 C 作縱向分割、算黎曼和再取極限，可得以定積分表示圓 C 的面積為 $2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=\pi r^2$。

註：圓 C 的上半圓的方程式為 $y=\sqrt{r^2-x^2}$。

(2) 對圓 C 作環狀分割、算黎曼和再取極限，可得以定積分表示圓 C 的面積為 $\int_0^r 2\pi x dx=\pi r^2$。

例題 9

【配合課本例 9】

求下列各函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、 $x=-2$ 及 $x=1$ 所圍成區域的面積。

(1) $f(x)=x^2-9$ 。　　(2) $f(x)=x^3+1$ 。

解

演練 9

求下列各函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸、 $x=-1$ 及 $x=2$ 所圍成區域的面積。

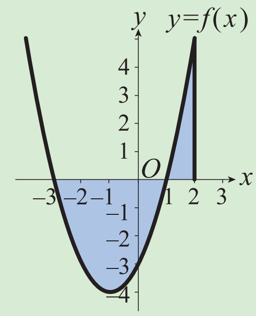
(1) $f(x)=x^2$ 。　　(2) $f(x)=-x^3$ 。

解

例題 10

【配合課本例 10】

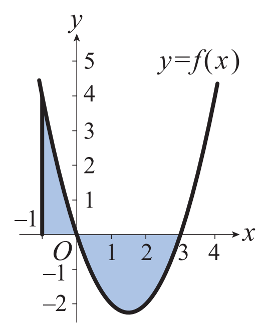
右圖鋪色區域是函數 $f(x)=x^2+2x-3$ 的圖形與 x 軸、 $x=2$ 所圍成的區域，求鋪色區域的面積。



解

演練 10

右圖鋪色區域是函數 $f(x)=x^2-3x$ 的圖形與 x 軸、 $x=-1$ 所圍成的區域，求鋪色區域的面積。



解

【配合課本例 11】

例題 11

求函數 $f(x)=-x^3-x^2+2x$ 的圖形與 x 軸所圍成的區域面積。

解

演練 11

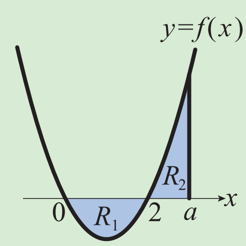
求函數 $f(x)=x^3-x$ 的圖形與 x 軸所圍成的區域面積。

解

【配合課本例 12】

例題 12

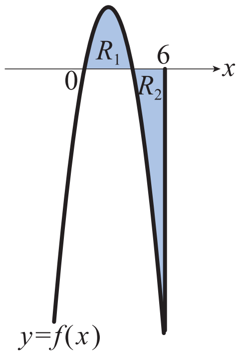
在右圖中，R_1 與 R_2 是函數 $f(x)=x^2-2x$ 的圖形與 x 軸、$x=a$（$a>2$）所圍成的兩個區域。已知 R_1 的面積與 R_2 的面積相等，求 a 的值。



解

演練 12

在右圖中，R_1與R_2是函數$f(x)=-x^2+ax$（$0<a<6$）的圖形與x軸、$x=6$所圍成的兩個區域。已知R_1的面積與R_2的面積相等，求a的值。



解

例題 13

【配合課本例 13】

已知$f(x)=|x-2|+|x-4|$，求$\int_0^5 f(x)\,dx$的值。

解

演練 13

求$\int_{-2}^{4}|x-2|dx$的值。

解

例題 14

【配合課本例 14】

求$\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}dx$的值。

解

演練 14

求$\int_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$的值。

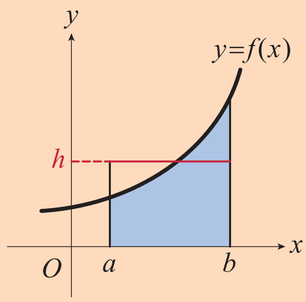
解

主題六　連續函數值的平均

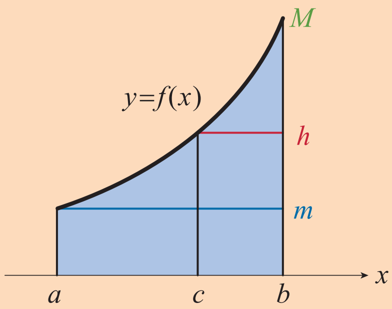
（搭配課本 P.174～P.177）

1. 連續函數值的平均：

設 $f(x)$ 為區間 $[a,b]$ 上的連續函數。我們將 $h=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 稱為 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 內函數值的平均。



2. 設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值為 M，最小值為 m，函數值的平均為 $h=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，且 $m\le h\le M$，由介值定理可知，在區間 $[a,b]$ 上至少可以找到一個實數 c，使得 $f(c)=h$，如右圖所示。



3. 定積分在運動學上的意義：
設某質點在時刻 t 時的位置函數為 $s(t)$，速度函數為 $v(t)$。因為速度函數為位移對時間的變化率，所以 $s'(t)=v(t)$，即 $s(t)$ 為 $v(t)$ 的一個反導函數。根據微積分基本定理得知，此質點從時刻 $t=a$ 到 $t=b$ 這段時間的位移為 $\int_a^b v(t)dt=s(b)-s(a)$。

例題 15

【配合課本例 15】

設函數 $f(x)=-x^2+6x$。

(1)求 $f(x)$ 在區間 $[2,5]$ 內函數值的平均 h。

(2)已知 $2\le c\le 5$，且 $f(c)=h$，求 c 的值。

解

演練 15

設函數 $f(x)=x^2-4x+5$。

(1)求 $f(x)$ 在區間 $[1,4]$ 內函數值的平均 h。

(2)已知 $1\le c\le 4$，且 $f(c)=h$，求 c 的值。

解

例題 16

【配合課本例 16】

素 甲、乙兩車在筆直的道路上行駛。當兩車同時通過 A 點後，甲車以速度 $v(t)=-\frac{1}{12}t^2-\frac{2}{3}t+23$（公尺／秒），乙車為等速行駛，過12秒兩車又同時通過 B 點。

(1)求 A、B 兩點的距離。　　(2)求乙車的速度。

解

演練 16

素 甲、乙兩車在筆直的道路上行駛。當兩車同時通過 A 點後，甲車以速度 $v(t)=-\frac{1}{9}t^2-\frac{2}{9}t+16$（公尺／秒），乙車為等速行駛，過 9 秒兩車又同時通過 B 點。

(1)求 A、B 兩點的距離。　　(2)求乙車的速度。

解

重要精選考題

（主：代表本單元對應的主題）

基礎題

1 設 $a>0$，已知 $\int_0^a x^3dx$ 的上和 $U_n=\frac{a^4}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$。

(1)求 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$。　(2)求下和 L_n。（以 a 及 n 表示）　主一

解

2 利用黎曼和之極限值的方法求 $\int_0^3(2x-4)dx$ 的值。　主二

解

5

3 已知 $F(x)$ 為函數 $f(x)=2x+b$ 的一個反導函數且 $F(1)=0$，$F(-1)=6$，求 $F(x)$。　主三

解

4 已知 $F(x)$ 為函數 $f(x)=3x^2+ax+b$ 的一個反導函數且 $F(0)=4$，$F(1)=2$，$F(2)=6$，求 $F(x)$。　主三

解

5 求 $\int_{-1}^2(-2x^2+2x+4)dx$ 的值。　主四

解

重要精選考題

6 已知$\int_{0}^{3}\left(ax^{2}-2x-1\right)dx=15$，求實數$a$的值。 主四

解

7 已知$\int_{0}^{a}\left(2x-4\right)dx=-3$，求實數$a$的值。 主四

解

8 已知函數$f\left(x\right)$滿足$\int_{-4}^{3}2f\left(x\right)dx=28$且$\int_{0}^{3}f\left(x\right)dx=2$，求$\int_{-4}^{0}f\left(x\right)dx$的值。 主四

解

9 求函數$f\left(x\right)=-3x^{2}+12x-9$的圖形與$x$軸、$x=0$及$x=3$所圍成的區域面積。 主五

解

10 求函數$f\left(x\right)=x^{3}-x^{2}-2x$的圖形與$x$軸所圍成的區域面積。 主五

解

11 求 $\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ 的值。 主五

解

12 一警察對空鳴槍，其子彈離開槍口 t（秒）後的速率可表成函數 $f(t)=-10t+300$（公尺／秒），$0\le t\le 30$，求子彈在時段 $0\le t\le 30$ 內的平均速率。 主六

素

解

進階題

1 已知 a 為實數，當 $\int_{0}^{a}(4-2x)\,dx$ 有最大值時，則 a 值為何？

解

2 已知 a 為正實數，且 $a<6$，若 $\int_{0}^{6}|2x-2a|\,dx=20$，求 a 的值。

解

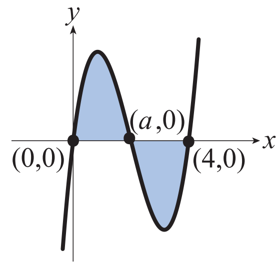
3 已知 a 為實數，函數 $f(x)$ 滿足 $\int_{a}^{x}f(t)\,dt=x^2+bx-5$，且 $f(3)=2$。

(1)求 $f(x)$。　　(2)求 a 的值。

解

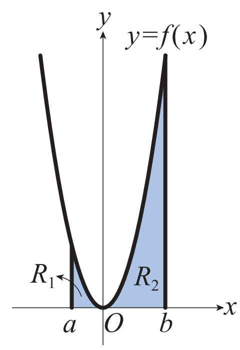
重要精選考題

4 設三次函數 $y=f(x)=x^3+bx^2+cx$ 的圖形通過點 $(0,0)$，$(a,0)$，$(4,0)$，其中 $0<a<4$。如圖，若兩陰影區域面積相等，試求 a、b、c 之值。



解

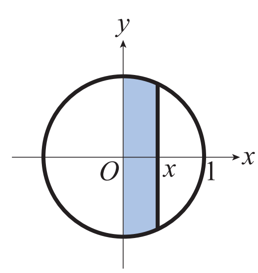
5 如右圖，函數 $f(x)=x^2$ 的圖形與 x 軸、$x=a$，$x=b$ 所圍成的兩個區域 R_1 及 R_2。若區域 R_2 的面積是區域 R_1 的面積之 8 倍，且 $a+b=2$，求實數 a、b 的值。



解

6 令 $f(x)$ 表右圖單位圓內鋪色部分的面積，$0<x<1$，則 $f'(x)=$

(1) $\sqrt{1-x^2}$　(2) $-\sqrt{1-x^2}$　(3) $2\sqrt{1-x^2}$　(4) $-2\sqrt{1-x^2}$　(5) π。



解

考前衝刺精華

1 由 $y=f(x)=-2x^2+10$、$x=0$、$x=2$ 及 x 軸圍成一個封閉區域 R，今將區間 $[0,2]$ 做 n 等分，將 R 分割成 n 個長條區域，並設在此分割下，長條面積之上和為 U_n，下和為 L_n，則：

(1) $U_n=$______，$L_n=$______，當 $n\to\infty$ 時，可得 R 的面積為______。

(2)滿足 $U_n-L_n<10^{-3}$ 的最小自然數 n 為______。 【臺中女中】

解

2 已知 a 為實數，且函數 $f(x)$ 滿足 $\int_a^x f(t)\,dt=2x^2-3x+6$，則 $f(x)=$？

(1) $4x-3$　(2) $2x^2-3x+6$　(3) $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

(4) $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x+c$，其中 c 為常數　(5) $2a^2-3a+6$。 【安康高中】

解

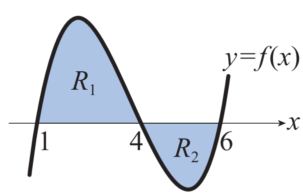
3 求 $\int_0^5\left(\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}\right)dx=$______。 【武陵高中】

解

4 下列哪些選項是正確的？

(1)設 $a<b$，$f(x)=c$，c 為常數，若 $y=f(x)$ 與 x 軸、$x=a$ 及 $x=b$ 所圍成的區域面積為 R，則 $R=\int_a^b f(x)\,dx=c(b-a)$

(2)右圖中，R_1 與 R_2 是函數 $f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成的區域，其中 R_1 的面積為 7，R_2 的面積為 3，則 $\int_1^6 5f(x)\,dx=20$



(3)設 $\int_0^{10} f(x)\,dx=a$，$\int_8^0 f(x)\,dx=b$，則 $\int_8^{10} f(x)\,dx=a-b$

(4) $\int_0^4|x-2|\,dx=\int_0^2(2-x)\,dx+\int_2^4(x-2)\,dx$

(5)已知 a 為實數，若 $\int_0^a(5-3x)\,dx$ 有最大值，則 $a=\frac{5}{3}$。 【新竹女中】

解

考前衝刺精華

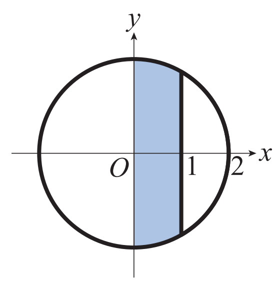
5 已知 $f(x)$ 為偶函數，$g(x)$ 為奇函數，$\int_0^7 f(x)dx=8$，$\int_0^7 g(x)dx=-2$，求

$\int_{-7}^{7}\left[8f(x)-3g(x)+299x^{101}+301x^5+3\right]dx=$ ？

(1) 96　(2) 110　(3) 140　(4) 165　(5) 170。　【臺南女中】

解

6 如右圖，有一圓的圓心在原點，半徑為 2，下列哪些定積分的值和鋪色區域的面積相等？



(1) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$　(2) $2\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$　(3) $\int_{-1}^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$　(5) $2\int_{-1}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx$。

【臺南二中】

解

7 睿睿與萱萱兩人參加臺北國際馬拉松路跑，路線上有甲、乙兩個休息點。當兩人同時通過甲休息點時，睿睿開始以速度函數 $v(t)=-t^2+2t+5$（公里/小時）前行，萱萱則仍然以等速度前行。已知經過 3 小時，兩人又同時通過乙站。若甲、乙兩休息點距離為 a（公里），萱萱的速度為 b（公里/小時），則 $a+b=$＿＿＿＿。　【屏東女中】

解

8 一個訓練有素的打字員，在10分鐘內打字的速度可以近似於 $W(t)=-3t^2+18t+280$（字/分），$0\le t\le 10$。試求其在第 2 分鐘到第 4 分鐘內，平均每分鐘大約打了多少字？【新北高中】

解

歷屆大考觀摩

1 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^{10}}{n^{10}}\left[1^9+2^9+3^9+\cdots+(2n)^9\right]$的值。

(1) 10^9　(2) $10^9\times\left(2^{10}-1\right)$　(3) $2^9\times\left(10^{10}-1\right)$　(4) $10^9\times 2^{10}$　(5) $2^9\times 10^{10}$。

【110 指甲】【答對率 18%】

解

2 坐標平面上，由 A、B、C、D 四點所決定的「貝茲曲線」(Bézier curve) 指的是次數不超過3的多項式函數，其圖形通過 A、D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B，在點 D 的切線通過點 C。令 $y=f(x)$ 是由 $A(0,0)$、$B(1,4)$、$C(3,2)$、$D(4,0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」。由上面條件可得 $f(x)=\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x$，求定積分 $\int_2^6\left|8f(x)\right|dx$ 之值。【109 指甲（修）】

解

3 設 $f(x)=-x^2+499$，且 $A=\int_0^{10}f(x)\,dx$，$B=\sum\limits_{n=0}^{9}f(n)$，$C=\sum\limits_{n=1}^{10}f(n)$，$D=\sum\limits_{n=0}^{9}\dfrac{f(n)+f(n+1)}{2}$，

試選出正確的選項。(多選題)

(1) A 表示在坐標平面上函數 $y=-x^2+499$ 的圖形與直線 $y=0$、$x=0$、$x=10$ 所圍成的有界區域的面積

(2) $B<C$

(3) $B<A$

(4) $C<D$

(5) $A<D$。

【107 指甲】【答對率 46%】

解

歷屆大考觀摩

4 在坐標平面上以 Ω 表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域，試求 Ω 的面積。

【103 指甲】

解

5 令 $f(x)=x(x-1)(x^3-2)$，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x)dx=0$？

(1) 1個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個。【指甲】【答對率 55%】

解

6 已知實係數三次多項式函數 $y=f(x)$ 的最高次項係數為 12，其圖形與水平線 $y=25$ 交於相異的三點 $(0,25)$，$(1,25)$ 及 $(2,25)$。試求定積分 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值。【指甲】

解

7 設拋物線 $\Gamma: y=x^2-ax+a$ 與 x 軸交於 $(p,0)$ 與 $(q,0)$ 兩點，其中 $0<p<q$。Γ 在第一象限與 x 軸、y 軸所夾區域的面積為 α，Γ 在第四象限與 x 軸所夾區域的面積為 β。若 $\alpha=\beta$，則 $q=$______，$a=$______。

解