4 函數性質的判定

主題一　函數的遞增與遞減　（搭配課本 P.110～P.114）

1. 遞增與遞減函數：

   設函數 $f(x)$ 在區間 I 有定義。

   (1) 若對區間 I 中任意兩數 $x_1<x_2$ 恆有 $f(x_1)<f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**嚴格遞增函數**。

   若對區間 I 中任意兩數 $x_1<x_2$ 恆有 $f(x_1)\le f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**遞增函數**。

   (2) 若對區間 I 中任意兩數 $x_1<x_2$ 恆有 $f(x_1)>f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**嚴格遞減函數**。

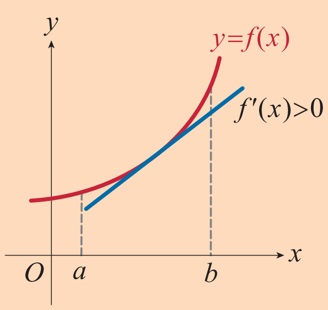
   若對區間 I 中任意兩數 $x_1<x_2$ 恆有 $f(x_1)\ge f(x_2)$，則稱 $f(x)$ 在區間 I 上為**遞減函數**。

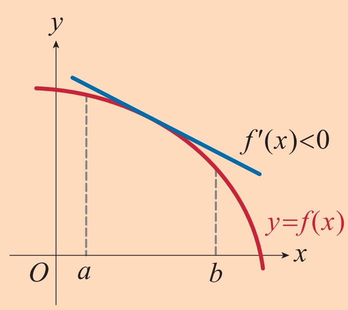
2. 函數遞增與遞減的判定：

   設函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續，且在區間 (a,b) 上可微分。

   (1) 若 $f'(x)>0$ 在區間 (a,b) 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為**嚴格遞增函數**。

   (2) 若 $f'(x)<0$ 在區間 (a,b) 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上為**嚴格遞減函數**。





   事實上，上述判定中的區間 $[a,b]$ 可以是無界的區間 $(-\infty,b]$，$[a,\infty)$ 或 $(-\infty,\infty)$，此時區間 (a,b) 則同步改為 $(-\infty,b)$，(a,∞) 或 $(-\infty,\infty)$ 即可。

例題 1

【配合課本例 1】

函數 $f(x)=x^3-12x+4$ 在下列哪些區間上為嚴格遞增函數？

(1) $[-4,-3]$　(2) $[-3,-1]$　(3) $[-1,1]$　(4) $[1,3]$　(5) $[3,\infty)$。

解

演練 1

函數 $f(x)=x^3+4x^2+4x+4$ 在下列哪些區間上為嚴格遞增函數？

(1) $[-5,-2]$　(2) $[-2,-1]$　(3) $[-1,1]$　(4) $[1,2]$　(5) $[2,\infty)$。

解

例題 2

【配合課本例 2】

多項式函數 $f(x)=x^4+4x^3+2$ 在下列哪些區間上為嚴格遞增函數？

(1) $[-4,-2]$　(2) $[-2,0]$　(3) $[0,3]$　(4) $[-2,3]$　(5) $[-1,\infty)$。

解

演練 2

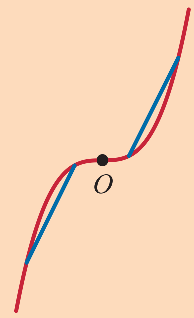
多項式函數 $f(x)=3x^4-8x^3+5$ 在下列哪些區間上為嚴格遞減函數？

(1) $[-2,-1]$　(2) $[-1,1]$　(3) $[1,3]$　(4) $[3,5]$　(5) $[5,\infty)$。

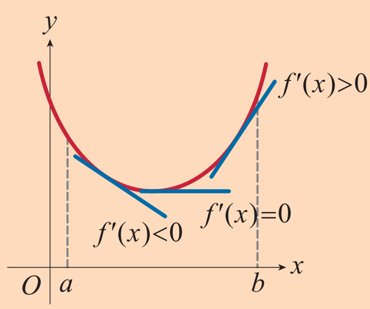
解

主題二　函數圖形的凹向與反曲點（搭配課本 P.115～P.119）

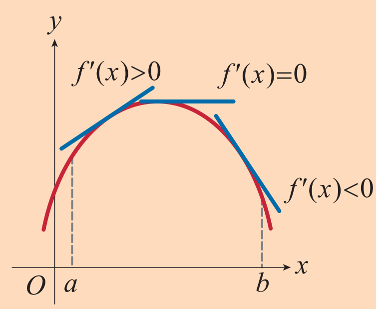
1. 凹向的定義：
若圖形上任相異兩點所連成的線段恆在圖形的上方，則稱圖形**凹口向上**，如右圖中 O 點右邊的圖形；反之，若線段恆在圖形的下方，則稱圖形**凹口向下**，如 O 點左邊的圖形。



2. 函數圖形凹向的判定：
設函數 $f(x)$ 在開區間 I 內每一數 x 的第二階導數 $f''(x)$ 都存在。
(1) 若 $f''(x)>0$ 在區間 I 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 I 的圖形是凹口向上。
(2) 若 $f''(x)<0$ 在區間 I 上都成立，則 $f(x)$ 在區間 I 的圖形是凹口向下。



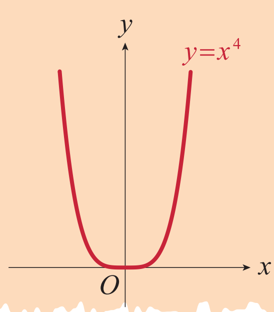
(a) 凹口向上



(b) 凹口向下

3. 反曲點的定義：
在 a 的附近，當 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，且 $f(x)$ 的圖形在 $x<a$ 與 $x>a$ 的凹向相反時，稱點 $(a,f(a))$ 為函數 $f(x)$ 圖形的反曲點。

4. 反曲點的性質：
若 $(a,f(a))$ 為多項式函數 $f(x)$ 圖形上的一個反曲點，則 $f''(a)=0$。
〔注意〕
滿足 $f''(x)=0$ 的點不一定就是反曲點。
例如，$f(x)=x^4$，$f''(x)=12x^2$，$f''(0)=0$，
但點 $(0,f(0))$ 的左右兩邊都是凹口向上，如圖所示，它不是反曲點。



例題 3

【配合課本例 3】

討論函數 $f(x)=x^3-6x^2+9$ 圖形的凹向。

解

演練 3

討論函數 $f(x)=x^2-2x+2$ 圖形的凹向。

解

例題 4

【配合課本例 4】

討論函數 $f(x)=x^4-4x^3+x+3$ 圖形的凹向，並求其反曲點。

解

演練 4

討論函數 $f(x)=-x^3-3x^2+4x+5$ 圖形的凹向，並求其反曲點。

解

例題 5

【配合課本例 5】

已知 $(-1,2)$ 為三次函數 $f(x)=2x^3+ax^2+7x+b$ 圖形的一個反曲點，求實數 a 、 b 的值。

解

演練 5

已知 $P(-1,3)$ 為三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 圖形的反曲點，且以 P 點為切點的切線斜率為 2 ，求實數 a 、 b 、 c 的值。

解

例題 6

【常考題】

已知 $(-1,2)$ 和 $(1,2)$ 都是四次函數 $f(x)$ 圖形的反曲點，且函數 $f(x)$ 的圖形在點 $(-1,2)$ 和點 $(1,2)$ 處的切線斜率分別為 1 和 -1，求 $f(x)$。

解

4

演練 6

已知 $(0,0)$ 和 $(1,-3)$ 都是四次函數 $f(x)$ 圖形的反曲點，且函數 $f(x)$ 的圖形在點 $(0,0)$ 處的切線為水平線，求 $f(x)$。

解

主題三　描繪多項式函數的圖形（搭配課本 P.119～P.122）

描繪多項式函數 $y=f(x)$ 圖形的步驟。

(1) 求出 $f'(x)$ 與 $f''(x)$，並將它們因式分解。

(2) 製作一個表格，表格中包含遞增、遞減與凹向區間及反曲點。

(3) 根據表格中的資料描繪函數圖形。

例題 7

【配合課本例 6】

描繪函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 的圖形。

解

演練 7

描繪函數 $f(x)=-x^3+3x-2$ 的圖形。

解

例題 8

【配合課本例 7】

描繪函數 $f(x)=x^4-6x^2-8x+11$ 的圖形。

解

演練 8

描繪函數 $f(x)=-x^4+6x^2-5$ 的圖形。

解

【配合課本例 8】

例題 9

描繪函數 $f(x)=x^3+3x^2+4x+3$ 的圖形。

解

演練 9

描繪函數 $f(x)=-x^3+6x^2-13x+11$ 的圖形。

解

主題四　三次函數的圖形

（搭配課本 P.122～P.124）

1. 圖形的分類：

設三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$a\neq 0$）；其導函數與第二階導函數為

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c，\ f''(x)=6ax+2b=6a\left(x+\frac{b}{3a}\right)。$$

因為 $f''(x)=0$ 恰有一實根 $x=-\frac{b}{3a}$，且 $f''(x)$ 的值在 $x=-\frac{b}{3a}$ 的左右兩邊異號，所以

三次函數 $f(x)$ 的圖形恰有一個反曲點 $\left(-\frac{b}{3a},f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$。

其次，因為 $f'(x)=0$ 是二次方程式，所以其解有二相異實根、二重根與無實根三種情形，討論如下。

(1) 二相異實根：此時圖形有兩條水平切線。設二相異實根為 α，β 且 $\alpha<\beta$，則 $f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)$。

當 $a>0$ 時，在區間 (α,β) 上，$f'(x)<0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞減；

在區間 $(-\infty,\alpha)$ 或 (β,∞) 上，$f'(x)>0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞增。

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$

當 $a<0$ 時，在區間 (α,β) 上，$f'(x)>0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞增；

在區間 $(-\infty,\alpha)$ 或 (β,∞) 上，$f'(x)<0$ 都成立，$f(x)$ 嚴格遞減。

x		α		β	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$

(2) 二重根：此時圖形恰有一條水平切線，且 $f'(x)$ 為完全平方式。因此，

當 $a>0$ 時，$f'(x)\geq 0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞增；

當 $a<0$ 時，$f'(x)\leq 0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞減。

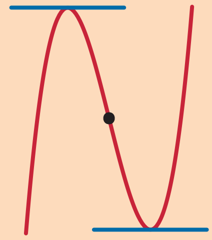
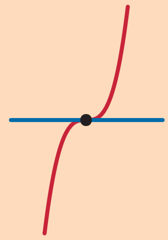
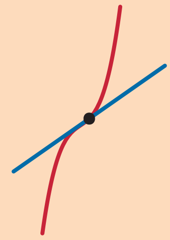
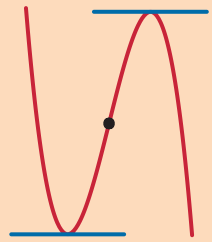
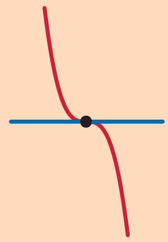
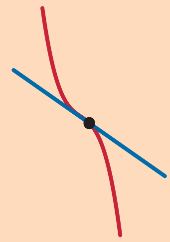
又因為 $f'(x)=0$ 的二重根 $x=-\frac{b}{3a}$ 也是 $f''(x)=0$ 的實根，所以圖形唯一的水平切線恰好發生在反曲點處。

(3) 無實根：此時圖形沒有水平切線，且

當 $a>0$ 時，$f'(x)>0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞增；

當 $a<0$ 時，$f'(x)<0$ 恆成立，$f(x)$ 恆嚴格遞減。

綜合以上討論，將三次函數所有可能的圖形，分類如下：

$f'(x)=0$ 的根 ＼ a	二相異實根	二重根	無實根
$a>0$			
$a<0$			

上表的黑點為圖形的反曲點。

2. 圖形都對稱於反曲點：

在第一冊時，將三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 配三次方成 $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式，其圖形是一條以點 (h,k) 為對稱中心的點對稱曲線，其中

$$h=-\frac{b}{3a}\text{，}k=f\left(-\frac{b}{3a}\right)\text{。}$$

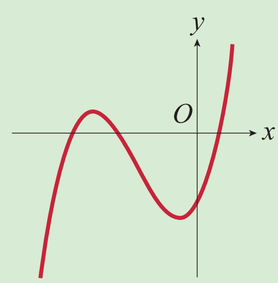
由上述的討論，得知：三次函數圖形的**反曲點就是對稱中心**。

例題 10

【常考題】

右圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，選出所有正確的選項。

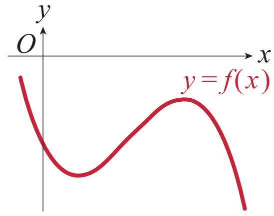
(1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $c>0$　(4) $d>0$　(5) $b^2-3ac>0$。



解

演練 10

右圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，下列哪些選項大於 0 ？



(1) a　(2) b　(3) c　(4) d　(5) b^2-3ac 。

解

例題 11

【常考題】

已知三次函數 $f(x)=kx^3+3(k+2)x^2-3x+2$ 恆為遞減函數，求實數 k 的範圍。

解

演練 11

已知三次函數 $f(x)=x^3-kx^2+3x+5$ 恆為遞增函數，求實數 k 的範圍。

解

主題五　多項式函數的極值　（搭配課本 P.124～P.133）

1. 極值的定義：

設 $f(x)$ 為多項式函數，且 a,b,c,d 是區間 I 中的數。

(1) 當在 a 的附近且在 I 上的每一個數 x 都滿足 $f(a)\geq f(x)$ 時，稱 $f(a)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的一個**極大值**。

當區間 I 的每一個數 x 都滿足 $f(b)\geq f(x)$，稱 $f(b)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的**最大值**。

(2) 當在 c 的附近且在 I 上的每一個數 x 都滿足 $f(c)\leq f(x)$ 時，稱 $f(c)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的一個**極小值**。

當區間 I 的每一個數 x 都滿足 $f(d)\leq f(x)$，稱 $f(d)$ 為 $f(x)$ 在區間 I 上的**最小值**。

註：又當我們討論多項式函數的極值時，若未特別提及區間 I，是指在整個實數 $\mathbb{R}$ 討論。

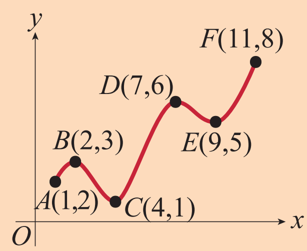
2. 極大值與極小值統稱為**極值**。

說例　若函數 $f(x)$ 在閉區間 $[1,11]$ 的圖形如右所示，則 $f(x)$ 的

(1) 極大值為 3、6 或 8。　(2) 極小值為 1、2 或 5。

(3) 最大值為 8。　(4) 最小值為 1。

(5) 極小值 5 比極大值 3 大。



3. 極值可能發生的點。

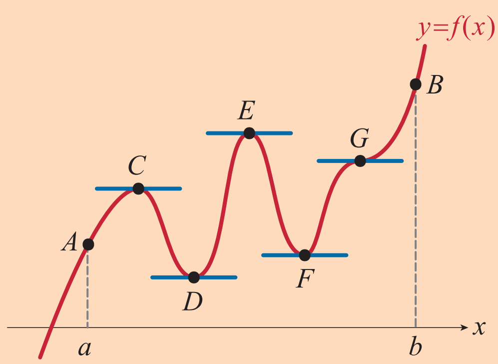
(1) 多項式函數 $f(x)$ 的極值只會發生在導數為 0 的點。

(2) 若將多項式函數 $f(x)$ 限制在閉區間 $[a,b]$ 上，則 $f(x)$ 的極值只可能出現在底下這二種點。

① 導數為 0 的點，即滿足 $f'(x)=0$ 的點。

② 閉區間 $[a,b]$ 的端點。

說例　設下圖是多項式函數 $f(x)$ 的圖形。



(1) 圖形的波峰（C、E 兩點）與波谷（D、F 兩點）是發生極值的點。

(2) 波峰與波谷的切線都是水平切線（斜率為 0），即這四個點的導數都為 0。

(3) 若將定義域限制在閉區間 $[a,b]$ 上，則端點 A、B 也會是發生極值的點。

(4) G 點雖然有水平切線（導數為 0），但卻不是發生極值的點。

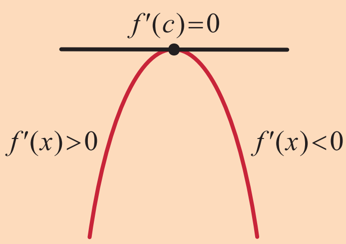
(5) 導數為 0 的點只是可能發生極值的「候選點」，並不一定是發生極值的點。

4. 極值的一階檢定法：

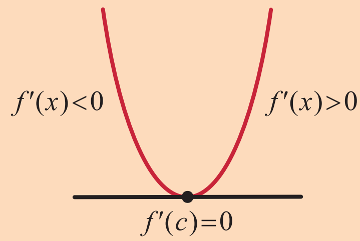
   對於多項式函數 $f(x)$，先找出所有滿足 $f'(c)=0$ 的 c，再用下列方式針對這些 c 作檢定。

   (1) 若 $x=c$ 的附近滿足「當 $x<c$ 時，$f'(x)>0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)<0$」，則 $f(c)$ 是極大值。

   (2) 若 $x=c$ 的附近滿足「當 $x<c$ 時，$f'(x)<0$；當 $x>c$ 時，$f'(x)>0$」，則 $f(c)$ 是極小值。



(1) 極大值



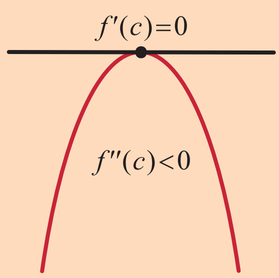
(2) 極小值

5. 極值的二階檢定法：

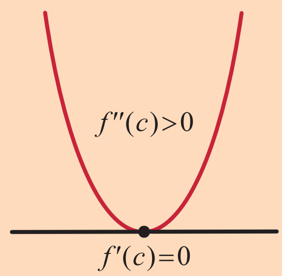
   設 $f(x)$ 為多項式函數，且 $f'(c)=0$。

   (1) 若 $f''(c)<0$，則 $f(c)$ 是極大值。

   (2) 若 $f''(c)>0$，則 $f(c)$ 是極小值。



(1) 極大值



(2) 極小值

例題 12　【配合課本例 9】

求函數 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 的極大值與極小值。

解

演練 12

求函數 $f(x)=x^3-3x+5$ 的極大值與極小值。

解

例題 13

【配合課本例 10】

求函數 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 在閉區間 $[-2,4]$ 上的最大值與最小值。

解

演練 13

求函數 $f(x)=-x^3+12x+4$ 在閉區間 $[-3,3]$ 上的最大值與最小值。

解

4

【配合課本例 11】

例題 14

求函數 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+3$ 的極大值與極小值。

解

演練 14

求函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ 的極大值與極小值。

解

例題 15

【配合課本例 12】

求函數 $f(x)=-x^4+4x^3+2$ 的極值。

解

演練 15

求函數 $f(x)=-x^4$ 的極值。

解

例題 16

【配合課本例 13】

已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有極大值 9，在 $x=-1$ 處有極小值 1，求 $f(x)$。

解

演練 16

已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 處有極大值 2，在 $x=1$ 處有極小值 1，求 $f(x)$。

解

例題 17

【常考題】

已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-2$ 處有極值，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$，求實數 a 、 b 、 c 的值。

解

演練 17

已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有極值 1，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求 $f(x)$。

解

【常考題】

例題 18

已知三次函數 $f(x)=kx^3-3x^2+(k+2)x+5$ 沒有極值，求實數 k 的範圍。

解

演練 18

已知三次函數 $f(x)=x^3+3kx^2+3(k+2)x+5$ 有極值，求實數 k 的範圍。

解

主題六　極值的應用

（搭配課本 P.134～P.139）

解有關極值的應用問題時，可依下列的步驟。

(1) 了解題意後，適當的假設未知數 x ，並列出所求的函數 $f(x)$ 。

(2) 找出 x 的範圍（即求 $f(x)$ 的定義域）。

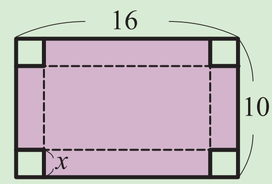
(3) 計算 $f'(x)$ ，解方程式 $f'(x)=0$ 。

(4) 在 x 的範圍內列表得到 $f(x)$ 遞增遞減的情形，找出 $f(x)$ 的極值。

例題 19　【配合課本例 14】

素

將邊長16公寸，寬10公寸的矩形鐵片，四個角各截去一個面積相等的正方形，如圖所示；然後再將各邊沿著虛線摺起來，做成一個無蓋的長方體容器。



設截去的正方形邊長為 x 公寸，且長方體的容積為 $f(x)$ 立方公寸（鐵片厚度不計），回答下列問題。

(1)邊長 x 的範圍為______。

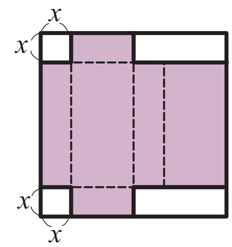
(2)寫出函數 $f(x)$。

(3)當 x 為多少時，長方體的容積達到最大？

解

演練 19

素 將邊長 24 公分的正方形鐵片，截去四個矩形，如圖所示；然後再將各邊沿著虛線摺起來，做成一個有蓋的長方體容器。



設截去的正方形邊長為 x 公分，且長方體的容積為 $f(x)$ 立方公分（鐵片厚度不計），回答下列問題。

(1)邊長 x 的範圍為______。

(2)寫出函數 $f(x)$。

(3)當 x 為多少時，長方體的容積達到最大？

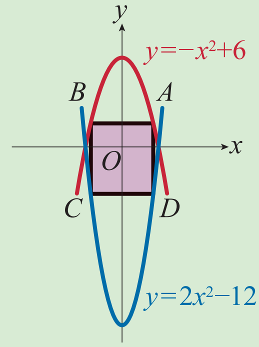
解

4

例題 20

【配合課本例 15】

如圖，在兩拋物線 $y=-x^2+6$ 與 $y=2x^2-12$ 所圍成的區域中，作一內接矩形 $ABCD$，其一組對邊 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 分別平行於 x 軸，且兩頂點 A，B 在 $y=-x^2+6$ 的圖形上，而另兩頂點 C，D 在 $y=2x^2-12$ 的圖形上。已知 A 點的坐標為 $\left(x,-x^2+6\right)$，矩形 $ABCD$ 的面積為 $f(x)$，回答下列問題。



(1) x 的範圍為______。

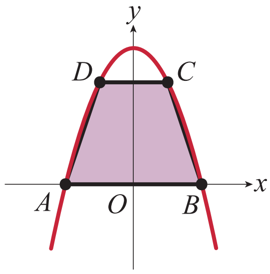
(2)寫出函數 $f(x)$。

(3)當 x 為多少時，矩形 $ABCD$ 的面積有最大值？又最大值為何？

解

演練 20

如圖，已知 $A(-2,0)$、$B(2,0)$、C、D 是拋物線 $y=4-x^2$ 上的四點，且 $ABCD$ 形成一個梯形。設 C 點的坐標為 $(x,4-x^2)$，梯形 $ABCD$ 的面積為 $f(x)$，回答下列問題。



(1) x 的範圍為______。

(2)寫出函數 $f(x)$。

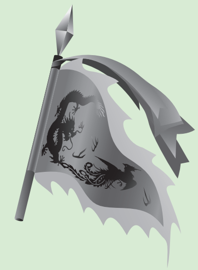
(3)當 x 為多少時，梯形 $ABCD$ 的面積有最大值？

解

例題 21　【配合課本例 16】

素

某村宋江陣開旗表演的旗子是一直角三角形的布料，其中斜邊及一股鑲有金邊，而另一股則固定在旗桿上，如圖所示。



已知該村神明指示，鑲金邊的總長度須恰為 6 公尺，且鑲有金邊的股長為 x 公尺。回答下列問題。

(1) x 的範圍為______。

(2)已知旗子的面積為 $\sqrt{f(x)}$ 平方公尺，求函數 $f(x)$。

(3)當 x 為多少時，旗子的面積有最大值？

解

演練 21

在坐標平面上，已知點 $A(3,0)$ 及拋物線 $\Gamma : y=x^2$，回答下列問題。

(1)設 $P\left(x,x^2\right)$ 為拋物線 Γ 上一點，則 $\overline{AP}=$______（以 x 表示）。

(2)承(1)，當 x 為多少時，$\overline{AP}$ 有最小值？

解

4

重要精選考題

基礎題

（主：代表本單元對應的主題）

1 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 在區間 $[-1,3]$ 上為遞減函數，在區間 $[-5,-1]$ 與 $[3,7]$ 上為遞增函數，求實數 a 、 b 的值。 主一

解

2 已知函數 $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-10$ 在區間 $[a,5]$ 上為遞增函數；在區間 $[-5,b]$ 上為遞減函數，求 a 的最小值及 b 的最大值。 主一

解

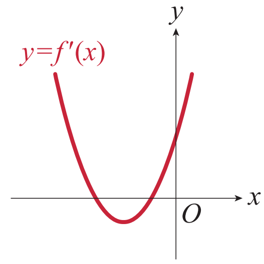
3 已知 $[a,b]$ 為函數 $f(x)=(x-2)^2(x-5)^3$ 的遞減區間，求 $b-a$ 的最大值。 主一

解

4 已知函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+12$ 圖形的反曲點坐標為 $(1,1)$ ，求 a 、 b 的值。 主二

解

5 已知三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之導函數 $f'(x)$ 的圖形如右圖，選出正確的選項。



(1) $a>0$　(2) $b>0$　(3) $c>0$　(4) $d>0$　(5) $b^2-3ac>0$。

解

主四

6 設函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 在 $x=-1$ 處有極大值，在 $x=3$ 處有極小值，求實數 a 、 b 的值。

主五

解

7 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處的切線方程式為 $4x-y-3=0$，且在 $x=-1$ 處有極小值 -7，求 $f(x)$。

主五

解

8 求函數 $f(x)=(x^2-4x+5)^2$ 在閉區間 $[-1,3]$ 上的最大值與最小值。

主五

解

9 已知在函數 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 的圖形上，以點 $(1,4)$ 為切點的切線斜率為 -3。

(1)求實數 a 、 b 的值。

(2)求 $f(x)$ 的極大值與極小值。

主五

解

4

重要精選考題

10 已知函數 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ （ $a>0$ ）在閉區間 $[-1,2]$ 上的最大值為 4 ，最小值為 -8 ，求實數 a 、 b 的值。 主五

解

11 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極小值 4 ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ ，求 $f(x)$ 。 主五

解

12 素 工廠打算用 240 元的材料費來製造一無蓋的長方體儲存桶。若長方體的底部需為正方形，而用來作底部的材料每平方單位 40 元，作側面的材料每平方單位 10 元，則長方體儲存桶的最大容積為多少立方單位？ 主六

解

進階題

1 已知 $f(x)$ 為多項式函數，且 $f'(x)=(x-1)(x-5)$ ，選出所有正確的選項。

(1) $f(2)>f(3)$　(2) $f(3)<f(4)$　(3) $f(-1)<f(0)$

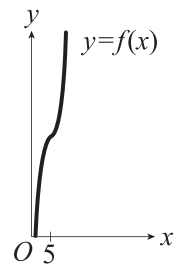
(4) $f(9)>f(10)$　(5) $(3,f(3))$ 為反曲點。

解

2 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 處有極大值 7，且 $(-1,-9)$ 是 $f(x)$ 圖形的反曲點，求 $f(x)$。

解

3 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，右圖所示為函數 $y=f(x)$ 的圖形，其中 $(5,f(5))$ 為反曲點。試問 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 可能為下列哪一個選項？



(1) $(x-5)^2-1$　(2) $(x-5)^2+1$　(3) $(x-5)^2$

(4) $-(x-5)^2+1$　(5) $-(x-5)^2-1$。

解

【指甲】【答對率 48%】

4 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x)=8x+11$，且 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，求 $f'(0)$ 的值。

【指甲】

解

5 已知三次函數 $f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x-7$ 沒有極值，求實數 a 的範圍。

解

6 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為 432 平方公分的限制之下，為了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計多少公分？

【指甲】

解

考前衝刺精華

1 已知$[a,b]$為函數$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$的遞減區間，求$b-a$的最大值為何？

(1)$\frac{4}{3}$　(2)$\frac{5}{6}$　(3)$\frac{3}{4}$　(4)$\frac{2}{5}$　(5)$\frac{2}{3}$。　【臺南女中】

解

2 多項式函數$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$的圖形以$(2,f(2))$為反曲點，且以這反曲點為切點的切線方程式是$10x-y-15=0$，則序組$(a,b,c)=$______。　【臺南二中】

解

3 已知函數$f(x)=x^3+ax^2+bx-5$只在區間$[-2,4]$上為遞減函數。

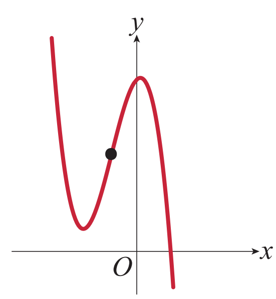
(1)求數對$(a,b)=$______。

(2)求$y=f(x)$圖形的反曲點坐標為______。　【臺中女中】

解

4 右圖為三次函數$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的圖形，其中黑點為反曲點。請選出所有正確的選項。

(1)$a>0$　(2)$b>0$　(3)$c>0$　(4)$d<0$　(5)$b^2-3ac<0$。



解

【臺中二中】

5 已知三次函數$f(x)=x^3+kx^2+3x+10$沒有極值，求k的範圍。　【新北高中】

解

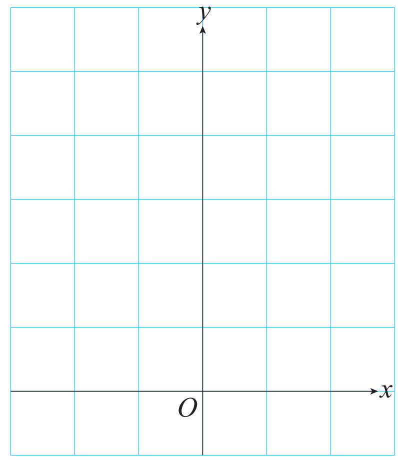
6 已知 $f(x)=x^4-2x^3+2x+1$ 為定義在閉區間 $[-1,2]$ 上的函數。

(1)求函數 $f(x)$ 所有的極大值與極小值。

(2)求函數 $f(x)$ 圖形的反曲點。

(3)請畫出 $y=f(x)$ 的圖形。

（須在圖上標出所有極值點與反曲點的坐標）



【武陵高中】

解

7 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，已知 $L:y=g(x)$ 為與 $f(x)$ 的圖形相切於點 $A(1,2)$ 的直線，且 L 與 $f(x)$ 的圖形又交於另一點 $B(0,1)$，則下列哪些選項正確？

(1) $g(x)=x+1$　　(2) $f'(1)=g'(1)$　　(3) $f''(1)=g''(1)$

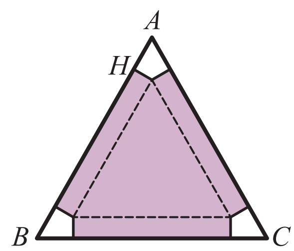
(4)若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有極值，則 $f(x)$ 的領導係數小於 0

(5)若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有極值，且 $f(x)$ 的圖形在區間 $[0,t]$ 上為遞增函數，則 t 的最大值為 $\frac{4}{3}$。

【新竹中學】

解

8 將一邊長為 18 公分的正三角形紙板，三個角各截去大小相同的四邊形，如圖所示；再將各邊摺起來，作成一無蓋的三角柱紙盒。設截去四邊形的邊長 $\overline{AH}=x$ 公分（$0<x<9$），紙盒的容積為 $f(x)$ 立方公分（紙板的厚度不計）。



(1)函數 $f(x)=$______。

(2)當 $x=a$ 時，紙盒的容積有最大值 M 立方公分，則數對 $(a,M)=$______。【臺中二中】

解

歷屆大考觀摩

1 考慮多項式函數 $f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：(多選題)

(1)函數 f 的圖形在點 $(1,-1)$ 的切線斜率為正　　(2)函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點

(3)函數 f 的唯一相對極小值為 $-\frac{9}{4}$　　(4) $f(\pi)>0$　　(5) $f\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)>0$。

【103 指甲】【答對率 62%】

解

2 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，$g(x)$ 為實係數三次多項式。已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$，而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$，$x=0$ 及 $x=4$，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的（相對）極小值皆發生於 $-4<x<0$。請選出正確的選項。(多選題)

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆為正　　(2) $f(x)$ 的（相對）極小值發生於 $x=-2$

(3) $g(x)$ 的（相對）極小值發生於 $x=-2$　　(4) $g(-1)=g(-3)$

(5) $g(-1)=-g(1)$。

【104 指甲】【答對率 48%】

解

3 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。(多選題)

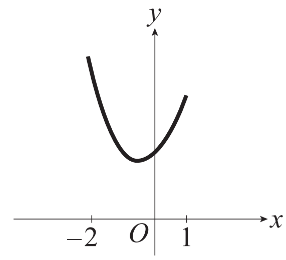
(1) $f(1)=g(1)$　　(2) $f'(1)=g'(1)$　　(3) $f''(1)=0$

(4)存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$　　(5)存在實數 $a\neq 1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$。

【106 指甲】【答對率 32%】

解

4 已知三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，在 $-2\le x\le 1$ 範圍內的圖形如示意圖：試選出正確的選項。(多選題)



(1) $a>0$ (2) $b>0$ (3) $c>0$

(4) $y=f(x)$ 圖形與 x 軸恰交一點

(5) $y=f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正。

【108 指甲（修）】

解

5 設 $F(x)$ 為一實係數多項式且 $F'(x)=f(x)$。已知 $f'(x)>x^2+1.1$ 對所有的實數 x 均成立，試選出正確的選項。

(1) $f'(x)$ 為遞增函數 (2) $f(x)$ 為遞增函數 (3) $F(x)$ 為遞增函數

(4) $[f(x)]^2$ 為遞增函數 (5) $f(f(x))$ 為遞增函數。

【110 指甲】【答對率 37%】

解

6 考慮坐標平面上之向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{a}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|=9$ 以及 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=7$。若令 $\left|\overrightarrow{a}\right|=x$，其中 $1<x<8$，且令 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則利用向量 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 、$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos\theta$ 以 x 表示成 $\dfrac{c}{9x-x^2}+d$，其中 c、d 為常數且 $c>0$。令此表示式為 $f(x)$，且其定義域為 $\{x\mid 1<x<8\}$。試回答下列問題。

(1)求 $f(x)$ 及其導函數。(非選擇題)

(2)說明 $f(x)$ 在定義域中遞增、遞減的情況。並說明 x 為多少時 $\overrightarrow{a}$ 、$\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ 最大。(非選擇題)

(3)利用 $f(x)$ 的一次估計（一次近似），求當 $x=4.96$ 時，$\cos\theta$ 約為多少？（非選擇題）

【111分科甲】

解