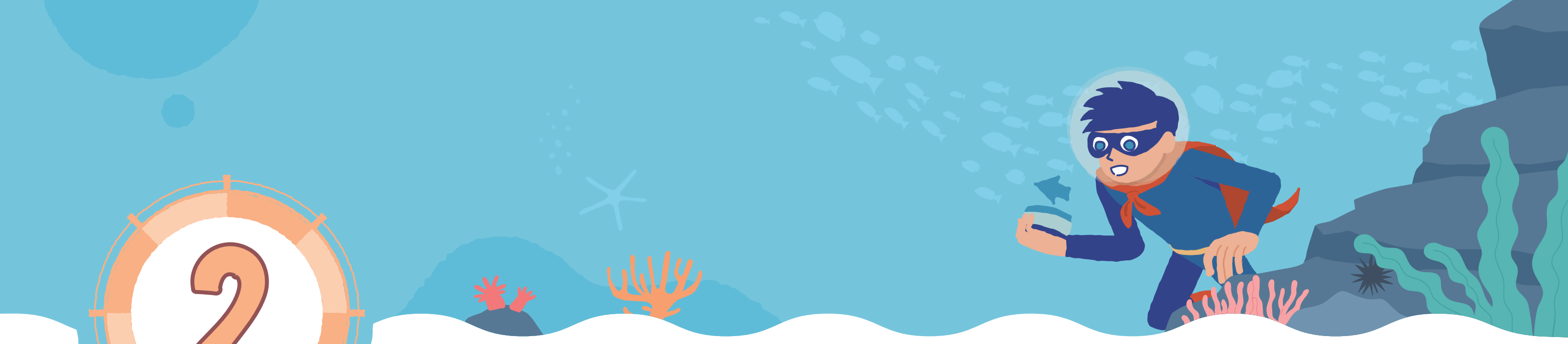


2 函數與函數的極限

主題一　函數的概念

（搭配課本 P.38～P.45）

1. 函數的定義：

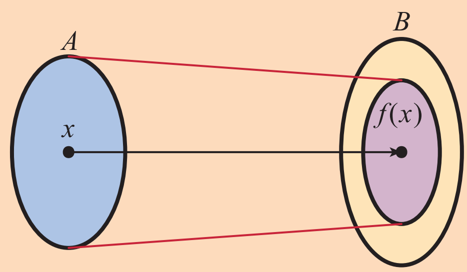
設 A 與 B 為兩集合。當 A 中的每一個元素，在 B 中都恰有一個元素與它對應時，稱這種對應關係為由 A 到 B 的函數，記作 $f:A\to B$，或寫成

$$y=f(x)，x\in A，$$

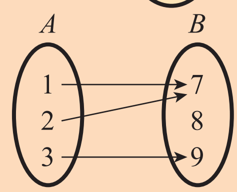
其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數，$f(x)$ 表示 x 在 B 中的對應元素，稱為函數 f 在 x 的函數值。

2. 定義域、對應域與值域：

函數 $f:A\to B$ 中的集合 A 稱為函數 f 的**定義域**，集合 B 稱為函數 f 的**對應域**，所有函數值所成的集合稱為函數 f 的**值域**。



說例　若函數 $f:A\to B$ 的對應法則如右，則



(1) f 的定義域為 $A=\{1,2,3\}$。

(2) f 的對應域為 $B=\{7,8,9\}$。

(3) $f(1)=7$，$f(2)=7$，$f(3)=9$。

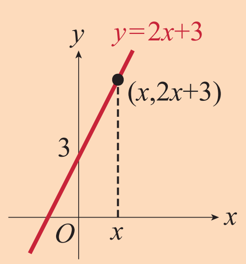
(4) f 的值域為 $\{7,9\}$。

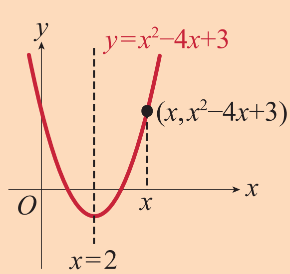
3. 函數的圖形：

在坐標平面上，對於定義域中的每一個 x，所有點 $(x,f(x))$ 構成的圖形，稱為**函數 $y=f(x)$ 的圖形**。

說例　(1) 一次函數 $f(x)=2x+3$ 的圖形是斜率為 2，y 軸截距為 3 的直線。

(2) 二次函數 $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ 的圖形為以 $(2,-1)$ 為頂點，直線 $x=2$ 為對稱軸，開口向上的拋物線。



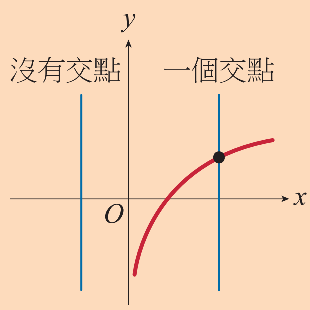


4. 函數圖形的特徵：

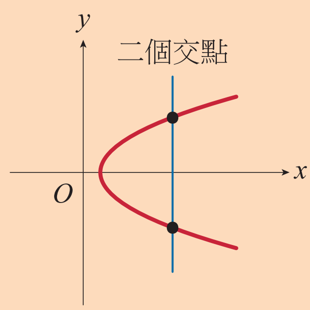
根據函數的定義，「定義域中的每一個 x 都只有一個對應的函數值 y 」，這個規定反應在函數圖形上，就是

「每一條鉛直線和函數圖形至多有一個交點」。

說例　圖(1)中，任一條鉛直線與圖形至多有一個交點，此圖形為函數圖形；
圖(2)中，有一條鉛直線與圖形不只有一個交點，此圖形不是函數圖形。



(1) 函數圖形



(2) 非函數圖形

5. 如果在描述一個函數時，只寫出式子，但未說出定義域的話，那麼其定義域就是使式子有意義的最大可能集合。

說例　(1) 多項式函數 $f(x)=x^3+2x^2+3x-5$ 的定義域為所有實數 $\mathbb{R}$ 。

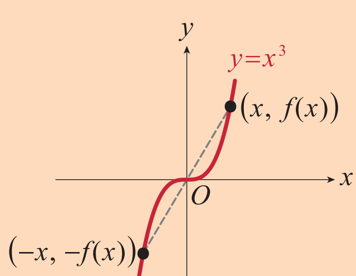
(2) 對數函數 $f(x)=\log_2 x$ 的定義域為所有正實數，即 $\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ 。

6. 奇函數與偶函數。

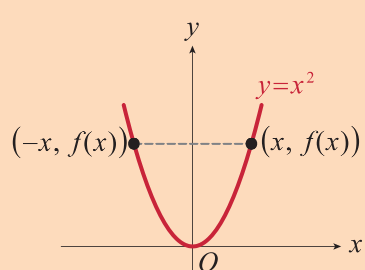
(1) 當函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x)=-f(x)$ 時，稱 $f(x)$ 為**奇函數**，其圖形對稱於原點。

(2) 當函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x)=f(x)$ 時，稱 $f(x)$ 為**偶函數**，其圖形對稱於 y 軸。

說例　函數 $y=\sin x$ 與三次函數 $f(x)=x^3$ 都是奇函數；函數 $y=|x|$ 、 $y=\cos x$ 與二次函數 $f(x)=x^2$ 都是偶函數。



(1) 奇函數



(2) 偶函數

例題 1

【配合課本例 1】

判斷函數 $y=\dfrac{x}{|x|}$ 的定義域，並描繪其圖形及求值域。

解

演練 1

判斷絕對值函數 $y=|x|$ 的定義域，並描繪其圖形及求值域。

解

例題 2

【配合課本例 2】

判斷高斯函數 $y=[x]$ 的定義域、描繪其圖形並求其值域。

解

演練 2

下列各題中的符號[ ]為高斯符號，回答下列問題。

(1)求 $[2.01]$、$[-2.01]$ 及 $[-\sqrt{3}]$ 的值。

(2)求滿足 $[x]=1$ 的 x 之範圍。

(3)求滿足 $[x]=x$ 的 x 之值。

解

例題 3

【配合課本例 3】

素

租借某共乘機車的租金計費方式為：前10分鐘，基本收費15元，超過10分鐘的部分，每1分鐘加收2.5元，不滿1分鐘以1分鐘計算。已知租借x分鐘的租金為

$$f(x)=\begin{cases} a\text{，當}0<x\le 10 \\ 15+2.5\times\left(-[b-x]\right)\text{，當}x>10 \end{cases}$$

元，其中a,b為實數，符號[ ]為高斯符號，回答下列問題。

(1)實數$a=$______。

(2)實數$b=$______。

(3)租金100元最多可使用多少時間？

解

演練 3

素

已知某地的計程車乘坐x公里的車資為

$$f(x)=\begin{cases} 85\text{，當}0<x\le 1.5 \\ 85+5\left(-\left[\dfrac{1.5-x}{0.25}\right]\right)\text{，當}x>1.5 \end{cases}$$

元，其中符號[ ]為高斯符號。

(1)求乘坐5.2公里的車資。

(2)車資200元最多可乘坐多少公里？

解

2

例題 4

【配合課本內文】

已知函數 $f(x)=3x^4+5$，$g(x)=\sin x$，$h(x)=x^3+5$，選出所有正確的選項。

(1) $f(x)$ 為偶函數　　(2) $f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸

(3) $g(x)$ 的圖形對稱於原點　　(4) $h(x)$ 為偶函數

(5) $h(x)$ 為奇函數。

解

演練 4

已知函數 $f(x)=x^2+3$，$g(x)=\cos x$，$h(x)=|x|$，$k(x)=\dfrac{x}{|x|}$，選出所有正確的選項。

(1) $f(x)$ 為偶函數　　(2) $f(x)$ 的圖形對稱於 y 軸

(3) $g(x)$ 的圖形對稱於 y 軸　　(4) $h(x)$ 的圖形對稱於 y 軸

(5) $k(x)$ 的圖形對稱於原點。

解

主題二　函數的運算

（搭配課本 P.42～P.47）

1. 函數的四則運算：

設集合 A 為函數 f 與 g 定義域的交集。對於 A 中的每一個數 x，定義四個函數 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$ 與 $\dfrac{f}{g}$ 如下：

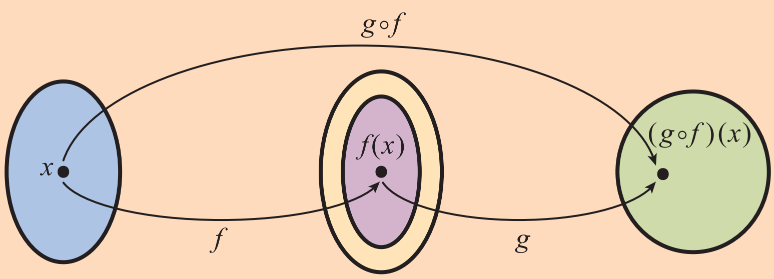
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\text{，}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\text{，}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)\text{，}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\text{，其中 } g(x)\neq 0\text{。}$$

2. 合成函數：

函數 g 與 f 的合成函數 $g\circ f$（讀作 g circle f）定義為

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\text{，}$$

其定義域就是使 $f(x)$ 落在 g 的定義域中之所有 x 所成的集合。



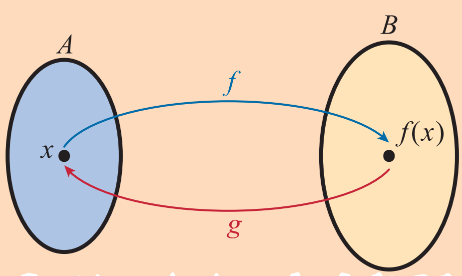
說例　設函數 $f(x)=x+1$ 與 $g(x)=x^3+2x+3$。如圖所示，「x 先經由函數 f 的對應，再經由函數 g 的對應」就可得合成函數 $g\circ f$，即

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)^3+2(x+1)+3\text{。}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & x+1 \arrow[r, "g"] & (x+1)^3+2(x+1)+3 \end{tikzcd}$$

3. 反函數：

設 A，B 為兩非空集合。當兩函數 $f:A\to B$ 與 $g:B\to A$ 滿足 $g(f(x))=x$ 對所有 $x\in A$ 均成立，以及 $f(g(x))=x$ 對所有 $x\in B$ 均成立時，稱函數 f 與 g 互為反函數。



2

4. 反函數圖形的對稱性：

若函數 f 與 g 互為反函數，則 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形對稱於直線 $y=x$ 。

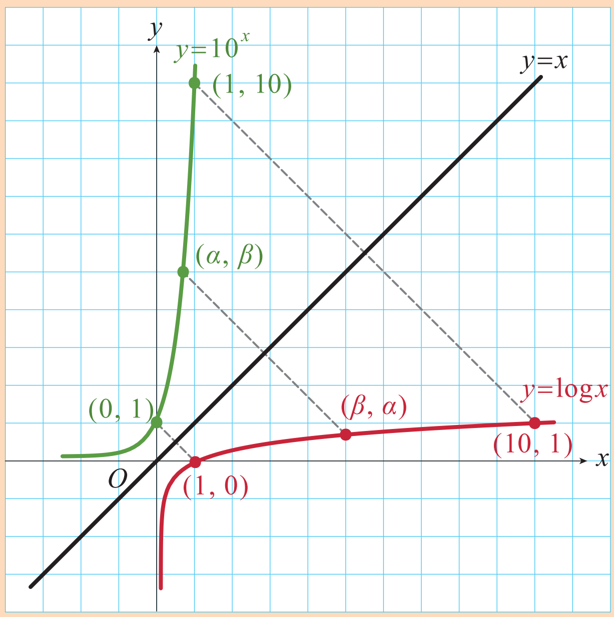
說例　指數函數 $f(x)=10^x$ ，$x\in\mathbb{R}$ 與對數函數 $g(x)=\log x$ ，$x>0$ 互為反函數且兩圖形對稱於直線 $y=x$ 。

(1) 驗證如下：

$$g(f(x))=g(10^x)=\log 10^x=x \text{，對所有 } x\in\mathbb{R} \text{ 均成立；}$$

$$f(g(x))=f(\log x)=10^{\log x}=x \text{，對所有 } x>0 \text{ 均成立。}$$

(2) 兩圖形對稱於直線 $y=x$ ：



例題 5

【配合課本例 4】

已知函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 與 $g(x)=\sqrt{2-x}$ ，求下列各函數及其定義域。

(1) $(f+g)(x)$ 。　(2) $(f-g)(x)$ 。　(3) $(f\cdot g)(x)$ 。　(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ 。

解

演練 5

已知函數 $f(x)=x^2-9$ 與 $g(x)=x+3$，求下列各函數及其定義域。

(1) $(f+g)(x)$。　　(2) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$。

解

2

例題 6

【配合課本例 5】

已知函數 $f(x)=2x-3$ 與 $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$，求下列各合成函數。

(1) $(g\circ f)(x)$。　　(2) $(f\circ g)(x)$。

解

演練 6

已知函數 $f(x)=x^2+x$ 與 $g(x)=2x+1$，求下列各合成函數。

(1) $(g\circ f)(x)$。　　(2) $(f\circ g)(x)$。

解

例題 7

【配合課本例 6】

函數 $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$ 是否有反函數？若有，求此反函數，並在同一坐標平面上畫出此反函數的圖形、$f(x)$ 的圖形及直線 $y=x$。

解

演練 7

函數 $f(x)=3x$ 是否有反函數？若有，求此反函數，並在同一坐標平面上畫出此反函數的圖形、$f(x)$ 的圖形及直線 $y=x$。

解

主題三　函數的極限

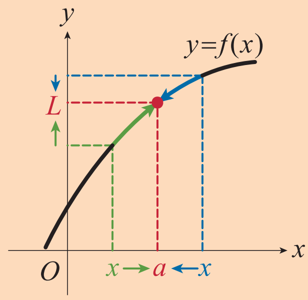
（搭配課本 P.51～P.56）

1. 函數的極限：

設函數 $f(x)$ 在某個包含 a 的開區間中除了 a 以外之任意實數 x 都有定義。當 x 趨近 a（從 a 的左、右兩邊趨近，且 $x \neq a$）時，若對應的函數值 $f(x)$ 會趨近定值 L，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限為 L，記作

$$\lim_{x\to a} f(x)=L。$$

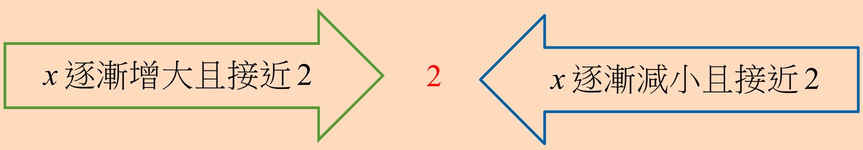
也就是說，只要 x 足夠靠近 a，函數值 $f(x)$ 要多靠近 L 都可以。而且極限若存在，則只會有一個。



說例　已知 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}(x\neq 2)$，求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 的值。

解　將 $f(x)$ 化簡如下：因為 $x\neq 2$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$。

(1) 數據法：

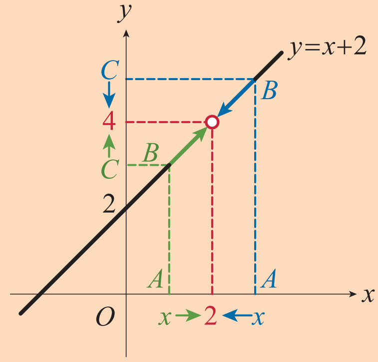


x	1.7	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.3
$f(x)$	3.7	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1	4.3

由以上的數據得知，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$。

(2) 圖形法：

因為 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$（$x\neq 2$）可化簡為 $f(x)=x+2$，所以 $f(x)$ 的圖形就是在直線 $y=x+2$ 上「挖掉」點 $(2,4)$ 所成的圖形，如圖所示。在圖中，如果讓 $\overline{AB}$ 保持與 x 軸垂直（其中 A 點在 x 軸上移動，且 B 點保持在函數的圖形上），那麼當 $A(x,0)$ 逐漸向點 $(2,0)$ 靠近時（從左邊或右邊靠近皆可），就會帶動 B 點向點 $(2,4)$ 靠近，此時 B 點在 y 軸投影點 C 也隨著向點 $(0,4)$ 靠近。也就是說，當 x 趨近 2（$x\neq 2$）時，函數 $f(x)$ 的值會趨近 4。



2. 函數極限的概念：

當 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 成立時，有三件事值得注意。

(1)「x 趨近 a」指的是 x 從左、右兩邊趨近 a，但不等於 a。

(2) 函數值 $f(a)$ 不一定存在。

(3) 即使函數值 $f(a)$ 存在，極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 也不一定等於函數值 $f(a)$。

3. 左右極限。

(1) 符號 $x\to a^+$ 表 x 從右邊趨近 a，即 $x>a$ 且 $x\to a$。

(2) 符號 $x\to a^-$ 表 x 從左邊趨近 a，即 $x<a$ 且 $x\to a$。

(3) 設函數 $f(x)$ 在某一個以 a 為左端點的區間 (a,b) 有定義。當 x 從右邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 的**右極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$。

(4) 設函數 $f(x)$ 在某一個以 a 為右端點的區間 (c,a) 有定義。當 x 從左邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近定值 M，則稱 M 為 $f(x)$ 的**左極限**，記作 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=M$。

註：右極限若存在，則只會有一個（左極限亦同）。

4. 極限與左右極限的關係：

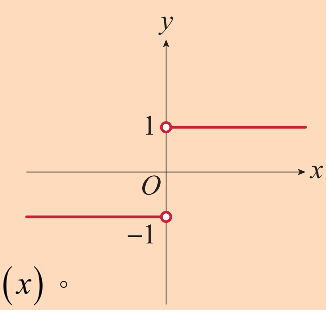
設函數 $f(x)$ 在某個包含 a 的開區間中除了 a 以外之任意實數 x 都有定義。

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$；反之亦成立。

說例　已知 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

解　將 $f(x)$ 改寫成分段函數，得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1，當\ x>0\\[2mm] \dfrac{-x}{x}=-1，當\ x<0\end{cases},$$



因為 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$。

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

例題 8

【配合課本例 7】

已知函數 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$（$x\neq 1$），求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

解

演練 8

已知函數 $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x+1}$（$x\neq -1$），求 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$。

解

例題 9

【配合課本例 8】

設函數 $f(x)=\begin{cases} x+1，當 x>1 \\ 1，當 x=1 \\ -x+3，當 x<1 \end{cases}$。

(1)求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。　　(2)極限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 與函數值 $f(1)$ 是否相等？

解

演練 9

設函數 $f(x)=\begin{cases} 1+x，當 x>0 \\ 1，當 x=0 \\ 1-x，當 x<0 \end{cases}$。

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。　　(2)極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 與函數值 $f(0)$ 是否相等？

解

例題 10

【配合課本例 9】

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+|x|}{x}$ 。

解

演練 10

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 。

解

例題 11

【常考題】

求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|1-x-x^2|-5}{x-2}$ 。

解

演練 11

求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|x^2+x-5\right|-3}{|x|-1}$ 。

解

2

主題四　極限的性質

（搭配課本 P.57～P.65）

1. 函數極限的運算性質：

設 c 為常數，且函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x=a$ 的極限分別為 L 與 M ，即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ ，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$ 。

我們有以下的性質。

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=L+M$ 。

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)=L-M$ 。

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(cf(x)\right)=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=cL$ 。

(4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)=LM$ 。

(5) 若 $M\neq0$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L}{M}$ 。

說例　求 $\lim\limits_{x\to2}\left(x^3-3x^2+6\right)$ 。

解　利用上述性質，得

$$\lim_{x\to2}x^2=\lim_{x\to2}(x\cdot x)=\left(\lim_{x\to2}x\right)\left(\lim_{x\to2}x\right)=2\times2=2^2\text{ 。}$$

$$\lim_{x\to2}x^3=\lim_{x\to2}\left(x^2\cdot x\right)=\left(\lim_{x\to2}x^2\right)\left(\lim_{x\to2}x\right)=2^2\times2=2^3\text{ 。}$$

$$\lim_{x\to2}\left(x^3-3x^2+6\right)=\lim_{x\to2}x^3-3\cdot\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}6=2^3-3\times2^2+6=2\text{ 。}$$

2. 多項式函數與有理函數（形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，其中 $f(x)$、$g(x)$ 是多項式且 $g(x)\neq 0$）的極限：

設 a 為實數，且 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 與 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 為兩實係數多項式函數。

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。（即多項式函數在 $x=a$ 的極限就是它在 $x=a$ 的函數值）

(2) 若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$。

3. 有理函數極限的求法：

一般而言，當 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為多項式函數時，函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 的極限之求法可分成以下三種情況。

(1) 若 $g(a)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$。

(2) 若 $g(a)=0$ 且 $f(a)\neq 0$，則此極限不存在。

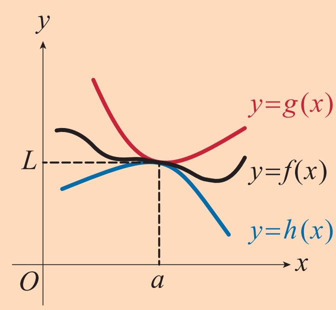
(3) 若 $g(a)=0$ 且 $f(a)=0$，則將分子與分母的共同因式 $x-a$ 約去後，再依照以上的原則繼續處理。

4. 函數的夾擠定理：

設函數 $h(x)$，$f(x)$，$g(x)$ 在某個包含 a 的開區間中除了 a 以外之任意實數 x 都有定義，且滿足 $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$。若

$$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L，$$

則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$。



例題 12

【配合課本例 10】

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{100}+3x+2\right)$。　(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$。　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-3}\right)$。

解

演練 12

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+1)^9$。　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-1}$。　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+5}{x-3}+\dfrac{x+2}{x+1}\right)$。

解

例題 13

【配合課本例 11】

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$。　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x-1}$。　(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+3)^{100}-1}{x+2}$。

解

演練 13

求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+4x-5}$。　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-3}{x-2}$。　(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^{10}-1}{x+2}$。

解

例題 14

【配合課本例 12】

求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{x}{x-1}\right)$。

解

演練 14

求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-3x+2}\right)$。

解

例題 15

【配合課本例 13】

設 a 為實數，且極限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+a}{x+1}$ 存在。

(1)求 a 的值。　　(2)求此極限。

解

演練 15

設 a 為實數，且極限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-2}{x^2+2x-3}$ 存在。

(1)求 a 的值。　　(2)求此極限。

解

例題 16

【配合課本例 14】

已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$，求實數 a、b 的值。

解

演練 16

已知 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+bx-2}{(x+1)(x-a)}=-3$，求實數 a、b 的值。

解

例題 17

【常考題】

已知 $f(x)$ 為三次多項式函數，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=2$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$。

解

演練 17

已知 $f(x)$ 為三次多項式函數，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ ， $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$ ，求 $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-2}$ 。

解

2

例題 18

【配合課本例 15】

已知 $x\neq 0$ ，不等式 $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$ 恆成立，求 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$ 。

解

演練 18

已知 $x\neq 0$ ，不等式 $-1\leq \cos\frac{1}{x^2}\leq 1$ 恆成立，求 $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x^2}$ 。

解

主題五　連續函數

（搭配課本 P.66～P.68）

1. 連續函數：

設 a 為函數 $f(x)$ 定義域的一點，當滿足下列兩個條件時，稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在。

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

又當函數 $f(x)$ 在定義域中的每一點都連續時，稱 $f(x)$ 為**連續函數**。

另外，當我們稱函數 $f(x)$ 在區間 I 連續時，指的是：$f(x)$ 對 I 的所有非端點都連續；若 I 有左端點 a，則 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$；若 I 有右端點 b，則 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$。

2. 連續的意義：

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續的意義就是函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=a$ 處沒有斷裂。

說例　設函數 $f(x)=x^2+2x+3$。

(1) 因為 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1^2+2+3=f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 處連續。

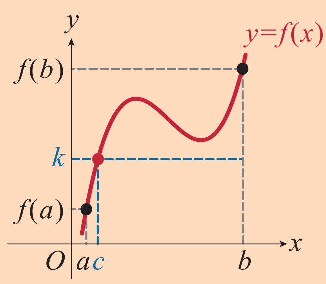
(2) 函數 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 處沒有斷裂。

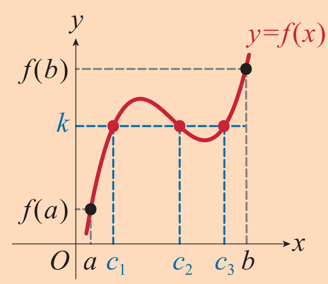
3. 任一多項式函數都是連續函數，而且其圖形都是連續不斷的。

設 $f(x)$ 為多項式函數。因為對於任意實數 a 均滿足 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，所以 $f(x)$ 為連續函數。

4. 介值定理：

設 $f(x)$ 是區間 $[a,b]$ 上的連續函數，且 $f(a)\neq f(b)$。若實數 k 滿足 $f(a)<k<f(b)$ 或 $f(b)<k<f(a)$，則至少有一實數 c 滿足 $a<c<b$ 且 $f(c)=k$。





例題 19

【配合課本例 16】

已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+5\text{，當 } x\geq 1 \\ 2x+a\text{，當 } x<1 \end{cases}$ 為連續函數，求實數 a 的值。

解

2

演練 19

已知函數 $f(x)=\begin{cases} x^2+x-3\text{，當 } x\geq 2 \\ x+a\text{，當 } x<2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 處連續，求實數 a 的值。

解

例題 20

【配合課本例 17】

已知 $f(x)=(x-16)^2(x-17)^2+3x$，求證：至少有一實數 c，使得 $f(c)=50$。

解

演練 20

已知 $f(x)=x^3+x^2-2x$，求證：在 2 與 3 之間至少有一實數 c，使得 $f(c)=20$。

解

重要精選考題

（主：代表本單元對應的主題）

基礎題

1 設 $f(n)$ 表示 $\dfrac{2}{7}$ 化成小數時，小數點後第 n 位數字。

(1)求 $f(1)$ 與 $f(100)$ 的值。　　(2)求函數 f 的值域。　主一

解

2 判斷函數 $y=|x-1|+|x-3|$ 的定義域，並描繪其圖形及求值域。　主一

解

3 已知函數 $f(x)=\sqrt{x-1}$ ，$g(x)=\sqrt{x-3}$ ，求函數 $(f\cdot g)(x)$ 及其定義域。　主二

解

4 已知 $f(x)=x^2+x+1$ ，$g(x)=3x+2$ ，求下列各合成函數。

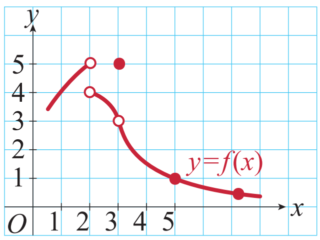
(1) $(g\circ f)(x)$ 。　　(2) $(f\circ g)(x)$ 。　主二

解

5 求 $f(x)=3x-5$ 的反函數 $g(x)$ 。　主二

解

6 右圖為函數 $f(x)$ 的圖形，選出所有正確的選項。



(1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在　　(2) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 不存在

(3) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$　　(4) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=f(5)$。

主三

2

解

7 求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+5}{2x^2+x+3}$。　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$。　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$。

主四

解

8 求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{2x^2-5x+2}\right)$。　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1-x^5}{1-x}-5\right)$。

主四

解

9 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$。　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

主四

解

10 求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$。　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x-1|-|x+1|}$。

主四

解

重要精選考題

11 已知 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2+ax+b}{2x^2-5x+2}=\dfrac{8}{3}$，求實數 a 、 b 的值。 主四

解

12 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，且 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}=3$ ， $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2}=1$ ，求 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ 。 主四

解

13 已知函數 $f(x)=\begin{cases} 3x-2 \text{，當 } x \ge 2 \\ -x^2+a \text{，當 } x<2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 處連續，求實數 a 的值。 主五

解

進階題

1 素 計程車費規定：前1.5公里內（含1.5公里），基本收費70元，以後每300公尺加收5元，但沒有達到300公尺，則以300公尺計算。若行程 x（公里）、計費 $f(x)$（元）可用函數

$$f(x)=\begin{cases} a \text{，當 } 0<x\le 1.5 \\ 70-5\times\left[\dfrac{b-10x}{3}\right] \text{，當 } x>1.5 \end{cases}$$

表示，其中[ ]為高斯符號。

(1)求數對 $(a,b)=$______。

(2)若以500元搭計程車，則最多可搭乘______公里。

解

2 已知 $f(x)=2x+1$ ， $g(x)=kx+3$ ，且 $(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)$ ，求實數 k 的值。

解

3 已知函數 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=3$，選出所有正確的選項。

(1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{f(x)}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}\right)=3$　(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{5(x-2)}=3$　(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{(x-2)^2}=3$

(4) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$　(5) $\lim\limits_{x\to2}(x\cdot f(x))=0$。

解

4 求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{|x|}$。　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|^3+x^3}{x}$。

解

5 求下列各極限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}(x-[x])$。　(2) $\lim\limits_{x\to10}\left([x]+\sqrt{x-[x]}\right)$。其中符號[ ]為高斯符號。

解

6 已知 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+ax^2+bx-8}{(x+2)^2}=c$，求實數 a、b、c 的值。

解

7 已知 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+ax+3}{|x|-1}=b$，求實數 a、b 的值。

解

考前衝刺精華

1 已知函數 $f(x)=\sqrt{x-1}$ ，$g(x)=[x]-1$，求函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的定義域。 【臺中女中】

解

2 設函數 $f(x)=\log_a(x-7)$，其中 $x>7$，兩函數圖形 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 對稱於直線 $x-y=0$，且 $y=g(x)$ 圖形過點 $\left(\dfrac{1}{2},9\right)$ ，則函數 $g(x)=$______ 。 【臺中女中】

解

3 求下列各極限。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5x-2}{x^3-1}\right)=$______ 。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{\left|12+x-x^2\right|-8}{x-5}=$______ 。 【臺中二中】

解

4 若 $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1-x^2}\right)=-1$ （ a 、 b 為常數），則數對 $(a,b)=$______ 。 【新竹中學】

解

5 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=5$ ，選出所有正確的選項。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(f(x)+\frac{x}{x-1}\right)=5$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot f(x)}{x^2-1}=\frac{5}{2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-2}=-5$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left((x-1)\cdot f(x)\right)=0$　(5) $f(1)=5$ 。 【屏東女中】

解

6 已知函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{kx^2+x-4k-2}{x-2}，當\ x\neq 2\\ 3，當\ x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 連續，求實數 $k=$______。【興大附中】

解

7 設 $f(x)=2^x\cos\pi x$，$g(x)=x^3-x^2+3x$，試證明：$y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形在 $0<x<1$ 的範圍內至少有一交點。【臺中女中】

解

8 大學學科能力測驗成績各科的「級距」，可依下述方式計算：先求出前1% 考生的平均分數 p，接著計算 $\dfrac{p}{15}$ 並四捨五入到小數點第二位得 r，則 r 稱為級距。例如：若前1% 考生的平均分數為100分，計算 $\dfrac{100}{15}\approx 6.67$，則級距為 6.67。若數學科的級距為 r，考生數學原始分數為 x（x 為整數），則其數學的級分可用以下函數來計算：

$$f(x)=\begin{cases}-\left[-\dfrac{x}{r}\right]，當\ 0\le x\le 14r\\ 15，當\ 14r<x\le 100\end{cases}$$（其中[ ]為高斯符號），

已知某學年度的數學學測，前1% 考生的平均分數為 95.87 分。

(1)試求級距。

(2)若誠慧數學考 78分，試求其數學級分。

(3)已知健毅的數學學測成績為14 級分，我們由此可推算其原始分數 $x\in[a,b]$，a、b 皆為整數，試求區間 $[a,b]$。【新竹中學】

解

2

歷屆大考觀摩

1 試問下列有關極限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|3-3x-x^2\right|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確？（單選題）

(1)極限不存在　(2)極限為 0　(3)極限為 1　(4)極限為 5　(5)極限為 -2 。

【指甲】【答對率 46%】

解

2 令 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$ 。設 a 、 b 、 c 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$ ，請選出正確的選項：（多選題）

(1)極限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 存在　(2) a 、 b 、 c 至少有一個在 0 與 1 之間

(3) $a,a^2,a^3,\cdots,a^n,\cdots$ 為收斂數列　(4) $b,b^2,b^3,\cdots,b^n,\cdots$ 為收斂數列

(5) $c,c^2,c^3,\cdots,c^n,\cdots$ 為收斂數列。

【102 指甲】【答對率 61%】

解

3 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\dfrac{|x|}{x}$ 存在，試選出正確的選項。（多選題）

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{|x|}\right)^2$ 存在　(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)\dfrac{x}{|x|}$ 存在　(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+1\right)\dfrac{x}{|x|}$ 存在

(4) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在　(5) $\lim\limits_{x\to0}f(x)^2$ 存在。

【107 指甲】【答對率 32%】

解