

數列的極限與無窮等比級數



主題一

無窮數列的極限

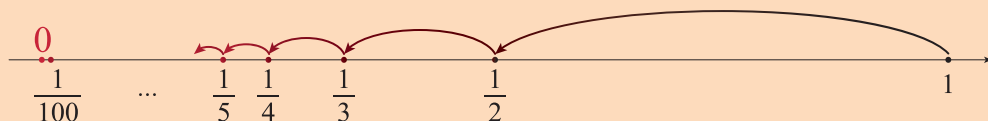
(搭配課本 P.2~P.8)

1. 如果一個數列的項數是有限的，就稱這個數列為有限數列，否則稱為無窮數列。
2. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限。

(1) 當 n 趨向無限大且 a_n 趨近一個定值 a 時，稱數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 a ，記作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，並稱此數列為收斂數列。

說例 將無窮數列 $\langle \frac{1}{n} \rangle$ 逐項列出： $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \dots$ 。

將各項依序在數線上標出其位置。



當 n 愈來愈大時， $\frac{1}{n}$ 在數線上的位置會趨近原點 0。此時我們稱無窮數列 $\langle \frac{1}{n} \rangle$

的極限為 0，並且用符號 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 表示。

(2) 當 n 趨向無限大且 a_n 不會趨近一個定值時，稱數列 $\langle a_n \rangle$ 為發散數列。

說例 將無窮數列 $\langle 2n+1 \rangle$ 的每一項依序列出： $3, 5, 7, \dots, 201, 203, \dots$ 。因為當 n 趨向無限大時， $2n+1$ 不會趨近一個定值，所以無窮數列 $\langle 2n+1 \rangle$ 為發散數列。



3. 無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 的收斂與發散。

(1) 當 $-1 < r < 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為收斂數列，其極限為 0，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 。

(2) 當 $r = 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為收斂數列，其極限為 1，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 。

(3) 當 $r \leq -1$ 或 $r > 1$ 時，無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 為發散數列，其極限不存在。

說例 (1) 將無窮數列 $\langle (0.1)^n \rangle$ 的每一項依序列出： $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, \dots$ 。

觀察發現： $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.1)^n = 0$ 。

(2) 將無窮數列 $\langle (-2)^n \rangle$ 的每一項依序列出： $-2, 4, -8, 16, -32, \dots$ 。觀察發現：當 n 趨向無限大時， $(-2)^n$ 不會趨近一個定值，所以無窮數列 $\langle (-2)^n \rangle$ 為發散數列。

4. 歐拉數： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459045\dots$ 。它是一個無理數。



例題 1

【配合課本例 1】

求下列各無窮數列的極限。

(1) $\left\langle -\frac{1}{n^2} \right\rangle$ 。 (2) $\left\langle 2 + \frac{2}{n} \right\rangle$ 。 (3) $\langle -3 \rangle$ 。

解



演練 1

求下列各無窮數列的極限。

(1) $\left\langle -\frac{1}{n+1} \right\rangle$ 。 (2) $\left\langle 5 - \frac{2}{n} \right\rangle$ 。 (3) $\langle \sqrt{2} \rangle$ 。

解

**例題 2**

【配合課本例 2】

判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限。

$$(1) \left\langle \left(\frac{7}{9}\right)^n \right\rangle. \quad (2) \left\langle (\sqrt{5}-2)^n \right\rangle. \quad (3) \langle \pi^n \rangle.$$

解

1

**演練 2**

判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限。

$$(1) \langle (\pi-3)^n \rangle. \quad (2) \left\langle (\sqrt{5}-\sqrt{3})^n \right\rangle. \quad (3) \left\langle \left(-\frac{9}{8}\right)^n \right\rangle.$$

解

**例題 3**

【常考題】

已知無窮數列 $\langle (x^2 - x - 1)^n \rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

解

 演練 3

已知無窮數列 $\langle (2x-1)^n \rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

 解



主題二

數列極限的運算性質

(搭配課本 P.8~P.14)

1. 數列極限的運算性質：

若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 的極限分別為 a 與 b ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ，則下列各式成立。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b。$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b。$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca \quad (\text{其中 } c \text{ 為常數})。$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab。$$

$$(5) \text{當所有 } b_n \neq 0 \text{ 且 } b \neq 0 \text{ 時，} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}。$$



例題 4

【配合課本例 3】

求下列各極限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2} \right)。$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{3^{n+1}} \right)。$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(2 + \frac{1}{n} \right) \left(4 - \frac{3}{n^2} \right) \right)。$$

 解

 演練 4

求下列各極限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3n} + \frac{4}{3n^2} \right) \circ \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^{n+1}}{5^n} \right) \circ \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{n} - 1 \right) \left(3 + \frac{1}{n^2 + 1} \right) \right) \circ$$

解

1



例題 5

【配合課本例 4】

求下列各極限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{2n^3 + 3n} \circ \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 100}{4n^2 + 1} \circ \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 4^n}{4^{n+1} - 5^n} \circ$$

解

 演練 5

求下列各極限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + n^2 - 5}{(n+1)^3} \circ \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 10}{n^3 + 1} \circ \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} - 3^n}{4 \times 7^n + 2^{n+1}} \circ$$

 解



【配合課本例 5】

例題 6

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{2n + 1} - \frac{n^2 + 1}{2n - 1} \right)$ 的值。

 解

 演練 6

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n - 2}{n + 2} - \frac{n^2 + 1}{n + 1} \right)$ 的值。

 解

**例題 7**

【配合課本例 6】

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2}{n^3}$ 的值。

解

1

**演練 7**

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)}{n^2}$ 的值。

解

**例題 8**

【常考題】

(1) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 7}{3n^2 - 2n} = 2$ ，求常數 a 的值。

(2) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 - 3bn + 3}{2n - 1} = 3$ ，求常數 a 與 b 的值。

解



演練 8

(1) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2 + 2)(3n - 10)}{2n^3 - 5} = -3$ ，求常數 a 的值。

(2) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a + 2b)n^3 - (3a - 2b)n^2 + 5n}{2n^2 + 3} = 4$ ，求常數 a 與 b 的值。

解



【常考題】

例題 9

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 的值。

解

 演練 9

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 4} - \sqrt{n^2 + 3n + 1})$ 的值。

解

1



主題三 Σ 與其運算性質

(搭配課本 P.14~P.16)

1. 符號 Σ 表示連加或求和的意思。利用這個符號可將級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 簡記成

$$\sum_{k=1}^n a_k, \text{ 即 } \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n。$$

說例 $\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_5$, $\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{10}。$

2. Σ 的運算性質。

$$(1) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k。$$

$$(2) \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (c \text{ 是常數})。$$



例題 10

【配合課本內文】

將下列各式寫成連加的式子，並求出其值。

$$(1) \sum_{k=1}^4 (3k+1) \quad (2) \sum_{k=1}^5 \sqrt{2} \quad (3) \sum_{k=2}^5 (-3)^k$$

解



演練 10

將下列各式寫成連加的式子，並求出其值。

$$(1) \sum_{k=1}^4 (5-2k) \quad (2) \sum_{k=2}^5 16 \left(-\frac{1}{2}\right)^k \quad (3) \sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^k}{2k-3}$$

解



例題 11

【配合課本例 7】

求 $\sum_{k=1}^{10} (k+1)(k+2)$ 的值。

解

 演練 11

求 $\sum_{k=1}^7 (k+1)(2k+1)$ 的值。

解

1



主題四

無窮等比級數與循環小數 (搭配課本 P.16~P.27)

1. 將無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的各項用「+」號連接起來所成的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 稱為**無窮級數**。

說例 將無窮數列 $\left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ 的每一項用加號連接起來，即 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$ ，
就是無窮級數。

2. 無窮級數的和：給定無窮級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ，並令其前 n 項的和為 S_n ，
即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 。

(1) 若無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 為收斂數列，且其極限為 S (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$)，則稱此無窮級數為**收斂級數**，它的和為 S ，即 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 。

(2) 若無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 為發散數列，則稱此無窮級數為**發散級數**，其和不存在。

3. 將無窮等比數列的各項用加號連起來的算式，稱為**無窮等比級數**。

說例 將無窮等比數列 $\left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ 的每一項用加號連接起來，

即 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$ ，就是無窮等比級數。

4. 無窮級數 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ 的和。

(1) 當 $-1 < r < 1$ 時，此無窮級數為收斂級數，其和為 $\frac{a}{1-r}$ 。

(2) 當 $r \leq -1$ 或 $r \geq 1$ 時，此無窮級數為發散級數，其和不存在。

說例 首項為 $\frac{1}{2}$ ，公比為 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比級數 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ 前 n 項的和為

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}}。$$

因為當 n 趨向無限大時， $\left(\frac{1}{2} \right)^n$ 會趨近 0，所以無窮數列 $\langle S_n \rangle$ 的極限為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1。$$

5. 利用無窮等比級數的和，也可以將循環小數化為分數。

說例 循環小數 $0.\overline{12} = 0.121212\cdots = 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$ ，此為首項 0.12，

公比 0.01 的無窮等比級數。因此 $0.\overline{12} = \frac{0.12}{1 - 0.01} = \frac{0.12}{0.99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ 。

6. 無窮級數可使用 $\sum$ 簡寫，例如： $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k$ 。



例題 12

【配合課本例 8】

判斷下列各無窮等比級數為收斂或發散級數；若為收斂級數，求其和。

(1) $3 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \cdots$ 。 (2) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \cdots$ 。 (3) $1 - \frac{5}{4} + \frac{25}{16} - \frac{125}{64} + \cdots$ 。

解

 演練 12

判斷下列各無窮等比級數為收斂或發散級數；若為收斂級數，求其和。

(1) $1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \cdots$ 。 (2) $-2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$ 。 (3) $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$ 。

解

1



例題 13

【常考題】

已知一無窮等比級數的和為 $\frac{9}{2}$ ，第二項為 -2 ，求首項 a 與公比 r 。

解



演練 13

已知一無窮等比級數的和為 8，第二項為 -6，求首項 a 與公比 r 。

解



【常考題】

例題 14

求 $\frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{7}{27} + \cdots + \frac{2^n - 1}{3^n} + \cdots$ 的值。

解



演練 14

求 $\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{27}\right) + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \cdots$ 的值。

解

**例題 15**

【配合課本例 9】

將下列各循環小數化成分數。

- (1) $0.\overline{303}$ 。 (2) $0.5\overline{23}$ 。

解

1

**演練 15**

將下列各循環小數化成分數。

- (1) $0.\overline{05}$ 。 (2) $0.05\overline{4}$ 。

解

**例題 16**

【常考題】

- (1) 求 $0.9 + 0.099 + 0.00999 + \cdots$ 的值。

- (2) 求 $0.7 + 0.077 + 0.00777 + \cdots$ 的值。

解



演練 16

求 $0.3 + 0.033 + 0.00333 + \cdots$ 的值。

解



【常考題】

例題 17

(1) 已知無窮數列 $\langle (3x-5)^n \rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

(2) 已知無窮級數 $(3x-5) + (3x-5)^2 + (3x-5)^3 + \cdots + (3x-5)^n + \cdots$ 為收斂級數，求 x 的範圍。

解

 演練 17

(1) 已知無窮數列 $\langle (2x-1)^n \rangle$ 為收斂數列，求 x 的範圍。

(2) 已知無窮級數 $(2x-1) + (2x-1)^2 + (2x-1)^3 + \cdots + (2x-1)^n + \cdots$ 為收斂級數，求 x 的範圍。

解

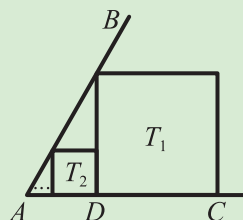
1



例題 18

【配合課本例 10】

如圖， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\overline{CD} = 4$ ，其中 $T_1, T_2, T_3, \dots$ 都是正方形，求所有正方形 $T_1, T_2, T_3, \dots$ 邊長的總和。

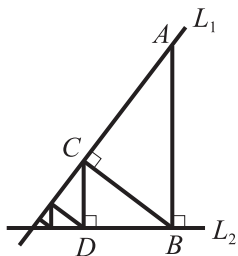


解

 演練 18

有二相交直線 L_1 及 L_2 ，自 L_1 上一點 A 作 L_2 之垂線，交 L_2 於 B 點；再自 B 點作 L_1 之垂線，交 L_1 於 C 點；重複以上步驟如此繼續下去，可得無窮多個線段。已知 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 3$ ，求此無窮多個線段長的和。

 解

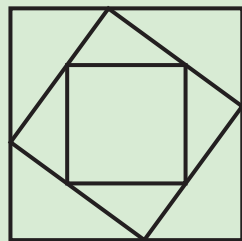


【配合課本例 11】

例題 19

 素

如圖，以 3:4 在大正方形的各邊做內分點，連接各分點得第二個正方形；再以相同比例內分第二個正方形各邊，連接各分點得第三個正方形，重複以上步驟如此繼續下去，可得無窮多個正方形。設最大的正方形邊長為 1，並令 a_n 代表由外往內數的第 n 個正方形的面積（即 $a_1 = 1$ ）。



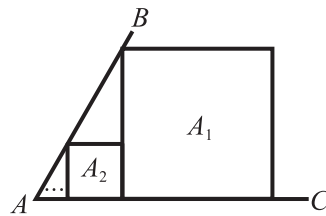
- (1) 求 $a_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 求 a_n 的一般式。
- (3) 求所有正方形面積的總和。

 解

 演練 19

如圖， $\angle BAC = 60^\circ$ ，其中 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 均為正方形。已知正方形 A_1 之邊長為 2，求所有正方形 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 面積的總和。

解



1



例題 20

【常考題】

求下列各式的值。

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5 \times 2^k - 1}{3^k}.$$

解

 演練 20

求 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \times 3^k + 4^{k+1}}{3 \times 6^k}$ 的值。

 解



主題五 夾擠定理

(搭配課本 P.28~P.34)

1. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ 與 $\langle c_n \rangle$ 從某一項起均滿足 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ ，則無窮數列 $\langle c_n \rangle$ 也是收斂數列，且其極限為 L ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 。



例題 21

【配合課本例 12】

已知無窮數列 $\langle c_n \rangle$ 中的每一項 c_n 都滿足 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n^2} \leq c_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n^2}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 的值。

 解

 演練 21

已知無窮數列 $\langle c_n \rangle$ 中的每一項 c_n 都滿足 $\frac{3n^2 + 5}{n^2 + 2n + 2} \leq c_n \leq \frac{3n^2 + 11}{n^2 + 2n + 2}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 的值。

 解



例題 22

【配合課本例 13】

已知無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項 a_n 都滿足 $n^2 + 3 < 2n^2 a_n < n^2 + 6n$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值。

解

1



演練 22

已知無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項 a_n 都滿足 $2n + 3 < na_n < 2n + 5$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值。

解



重要精選考題



(主：代表本單元對應的主題)

基礎題

1 求下列各無窮數列的極限。

(1) $\left\langle \frac{5}{2n} \right\rangle$ 。 (2) $\left\langle 7 - \frac{1}{n} \right\rangle$ 。 (3) $\langle -1 \rangle$ 。

主一

解

2 判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限。

(1) $\langle (-0.99)^n \rangle$ 。 (2) $\left\langle \frac{(-2)^n}{7^n} \right\rangle$ 。 (3) $\langle (\sqrt{6} - \sqrt{2})^n \rangle$ 。

主一

解

3 選出所有正確的選項。

- (1) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 為收斂數列
- (2) 若 $\langle a_n + b_n \rangle$ 為收斂數列，則 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 均為收斂數列
- (3) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 0，則數列 $\langle a_n^2 \rangle$ 收斂於 0
- (4) 若數列 $\langle a_n^2 \rangle$ 收斂於 1，則數列 $\langle a_n \rangle$ 收斂於 1。

主二

解

4 求下列各極限。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 4n + 7}{5n^2 - n + 3}$ 。 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^{n-1}}{7^{n+1}}$ 。 (3) $0 < a < b$ ，以 a 、 b 表示 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$ 的值。

主二

解

5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n} - \frac{n^2-2n+5}{n-1} \right)$ 的值。

主二

解

6 求下列各極限。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{4n^3}$$

主二

解

7 (1) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-2}{-3n^2+5n} = \frac{2}{3}$ ，求常數 a 的值。

(2) 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+2bn+8}{5n-3} = 6$ ，求常數 a 與 b 的值。

主二

解

8 已知 $\sum_{k=1}^4 (ak+b) = 18$ ， $\sum_{k=0}^3 (ak+b) = 6$ ，求 a 、 b 的值。

主三

解

9 已知首項為 a ，公比為 r 的無窮等比級數和等於 5；首項為 a ，公比為 $3r$ 的無窮等比級數和等於 7，則首項為 a ，公比為 $2r$ 的無窮等比級數和等於_____。

主四

【學測】

解



重要精選考題



10 求 $\frac{4-1}{5^2} + \frac{4^2-3}{5^3} + \frac{4^3-3^2}{5^4} + \cdots + \frac{4^n-3^{n-1}}{5^{n+1}} + \cdots$ 的值。

主四

解

11 將下列各循環小數化成分數。

(1) $0.4\overline{03}$ 。 (2) $2.5\overline{8}$ 。

主四

解

12 若首項為 a ，公比為 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

主四

【學測】【答對率 44%】

解

13 已知對任意正整數 $n \geq 3$ ，不等式 $3^n \geq n^3$ 恆成立，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n}$ 的值。

主五

解

進階題

1 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\cdots$ 依此規律繼續下去，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值。

解



- 2 已知一無窮等比數列前兩項的和為 $\frac{25}{4}$ ，且任一項恰等於該項之後各項和的 3 倍，求此數列的首項 a 與公比 r 。

解



- 3 已知一皮球從 120 公尺高處落下，每次返跳的高度為前次高度的 $\frac{2}{3}$ ，求自開始落下至皮球靜止所經過的距離。

解



- 4 求 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{8^{k-1}}$ 的值。

解



- 5 令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n ，求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ 的值。

【103 指甲（修）】

解



- 6 在實數線上，動點 A 從原點 0 開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A 、 B 移動的距離分別為 1 、 4 ，且 A 、 B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍與 $\frac{1}{3}$ 倍。

(1) 設第 n 秒時， A 、 B 兩點的位置分別為 a_n 與 b_n ，以 n 分別表示 a_n 與 b_n 。

(2) 設 c_n 為第 n 秒時 A 、 B 中點的位置，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 的值。

【105 指甲（修）】

解





重要精選考題



- 7** 一盒子裡有 n ($n > 3$) 顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、 n 分及 1 分。若所得分數的期望值為 E_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 【104 指甲】【答對率 25%】

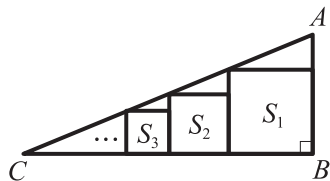
★

解



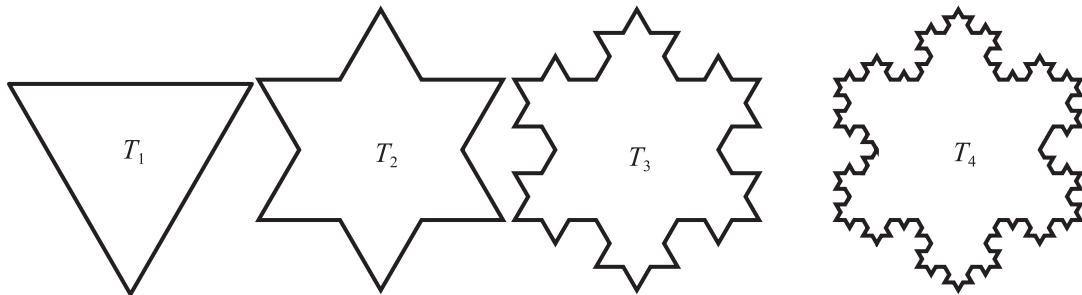
- 8** 如圖，直角 $\triangle ABC$ 的兩股長為 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{BC} = 24$ ，其中 $S_1, S_2, S_3, \dots$ 為內接正方形，求所有正方形 $S_1, S_2, S_3, \dots$ 面積的總和。

解



- 9** 瑞典數學家科赫在 1904 年介紹一種曲線的作法：取邊長為 1 的正三角形為 T_1 ，以 T_1 每邊中間三分之一的線段為一邊，向外作正三角形後，然後將該三分之一線段抹去，可得多邊形 T_2 ，重複以上步驟如此繼續下去，可得無窮多個多邊形 $T_1, T_2, T_3, T_4, \dots$ ，如圖所示。

★



(1) 令 a_n 表 T_n 的周長，以 n 表示 a_n 。

(2) 求 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$ 的值。

解





考前衝刺精華

1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3e^n + 5\pi^n}{e^n - \pi^n} + \frac{\sin^n 1}{5 - \sin^n 1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺中女中】

解



1

2 設 $n \in N$ ，坐標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是 $(0,1)$ ， $\left(\frac{2}{n}, 0\right)$ ， $\left(-\frac{2}{n}, 0\right)$ ，若此三角形的外接圓半徑長等於 R_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺南二中】

解



3 已知 S_1 為 15 的所有正因數的總和，即 $S_1 = (3^0 + 3^1)(5^0 + 5^1)$ 。又 S_2 為 15^2 的所有正因數的總和，即 $S_2 = (3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2)$ 。設 S_n 為 15^n （ n 是正整數）之所有正因數的總和，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{15^n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺南二中】

解



4 若一無窮等比級數的和為 3，其各項之平方和也為 3，求此無窮等比級數各項的立方和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺中二中】

解





考前衝刺精華

5 $\langle a_n \rangle$ 為無窮等比數列， $a_1 = 0.\overline{2}$ ， $a_2 = 0.\overline{06}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)

【興大附中】

解



6 袋中有編號1到10號的球各1顆，甲、乙、丙三人輪流取球，按甲、乙、丙、甲、乙、丙、甲…的順序依次取1球，取出放回且每球被取到的機會相等，規定先取到質數號碼者獲勝，求甲獲勝的機率 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺南二中】

解



7 設 n 為自然數，若多項式 $(2+x)^n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，令各項係數的總和為 A_n ，偶次項係數的總和為 B_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2A_n - 5B_n}{3A_n - 2B_n} = ?$ (單選題)

- (1) -3 (2) -2 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{4}$ (5) 不存在。

【興大附中】

解





歷屆大考觀摩



1 設 a 、 b 為循環小數， $a=0.\overline{12}$ ， $b=0.\overline{01}$ ，則 $a-b$ 的值是下列哪一個選項？

- (1) 0.11 (2) 0.1111 (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{10}{99}$ (5) $\frac{100}{999}$ 。 【108 指乙】【答對率 80%】

解



1

2 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 、 $\langle c_n \rangle$ 、 $\langle d_n \rangle$ 、 $\langle e_n \rangle$ 定義如下：

$$a_n = (-1)^n; \quad b_n = a_n + a_{n+1}; \quad c_n = \left(\frac{-\sqrt{10}}{3} \right)^n; \quad d_n = \frac{1}{3}c_n; \quad e_n = \frac{1}{c_n}; \quad \text{其中 } n=1, 2, 3, \dots$$

下列選項中，試選出會收斂的無窮級數。(多選題)

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ 。 【107 指乙】【答對率 48%】

解



3 數列 $a_1, a_2, \dots$ 中，其奇數項是一個公比為 $\frac{1}{3}$ 的等比數列，而偶數項是一個公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，且 $a_1 = 3$ ， $a_2 = 2$ 。試選出正確的選項。(多選題)

- (1) $a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ (2) $\frac{a_{10}}{a_{11}} > 10$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ (5) $\sum_{n=1}^{100} a_n > 9$ 。

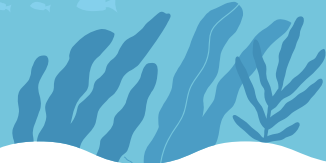
【109 指乙】【答對率 57%】

解





歷屆大考觀摩



4 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n ， $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，

試選出正確的選項。(多選題)

- (1) 對所有的正整數 n ， $a_n > 3$ 均成立
- (2) 存在正整數 n ，使得 $a_{n+1} > 4$
- (3) 對所有的正整數 n ， $b_n^2 < b_{n+1}^2$ 均成立
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 4$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ 。

【108 指甲】【答對率 34%】

解



5 假設兩數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數 n 都滿足 $b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$ 。已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，試選出正確的選項。(多選題)

- (1) $b_n < 6 - \frac{4n-1}{n}$
- (2) $b_n > \frac{4n-1}{2n}$
- (3) 數列 $\langle b_n \rangle$ 有可能發散
- (4) $a_{10000} < 6.1$
- (5) $a_{10000} > 5.9$ 。

【111 分科甲】【答對率 19%】

解

