

3

微分



主題一

導數與切線

(搭配課本 P.76~P.82)

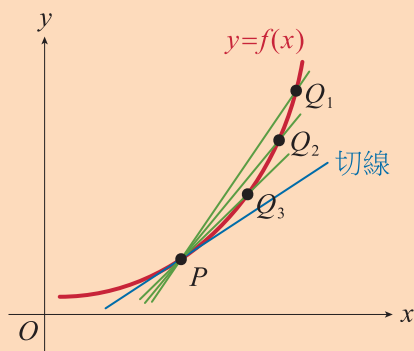
1. 割線、切線與導數：

設 $P(a, f(a))$ 是函數 $f(x)$ 圖形上的一個定點，而 $Q(x, f(x))$ 是圖形上異於 P 的一點，連接 P 與 Q 可得一割線 PQ ，如圖所示。根據斜率的定義，得割線 PQ 的斜率為

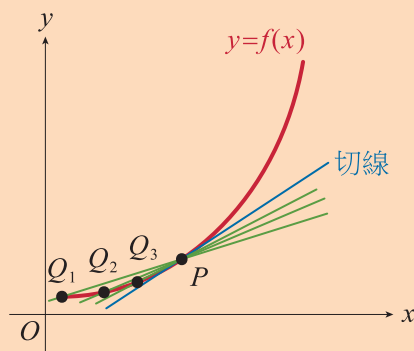
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}。$$

若令 $\Delta x = x - a$ 為 x 的變化量， $\Delta y = f(x) - f(a)$ 為 y 的變化量，則割線 PQ 的斜率可表示為

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}。$$



(a) Q 從 P 的右側靠近



(b) Q 從 P 的左側靠近

現在讓 Q 點沿著函數圖形向 P 點靠近，使變化量 $|\Delta x|$ 逐漸減小 ($\Delta x \neq 0$)。當 Δx 趨近於 0 時，如果這些割線的斜率趨近於定值 m ，即

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}，$$

那麼稱通過 P 點且斜率為 m 的直線為 $f(x)$ 的圖形在 P 點的切線，而 P 點稱為切點。因此，當極限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

存在時，此極限就是以點 $(a, f(a))$ 為切點的切線斜率，我們稱這個極限為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數，並以符號 $f'(a)$ 表示。

2. 導數與切線的斜率。

(1) 導數的定義：當極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在時，稱此極限為函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數，記作 $f'(a)$ ，即

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}。$$

(2) 導數與切線的斜率：若導數 $f'(a)$ 存在，則稱通過點 $P(a, f(a))$ 且斜率為 $f'(a)$ 的直線為函數 $f(x)$ 的圖形在 P 點的切線，而 P 點稱為切點。

3. 可微分與不可微分：

當函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數 $f'(a)$ 存在時，我們稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處可微分。反之，當 $f'(a)$ 不存在時，稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 處不可微分。



例題 1

【配合課本例 1】

設函數 $f(x) = x^2$ 。

(1) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處的導數 $f'(1)$ 。

(2) 在 $f(x)$ 的圖形上，求以點 $P(1, 1)$ 為切點的切線方程式。

解



演練 1

設函數 $f(x) = x^2 - x$ 。

(1) 求 $f(x)$ 在 $x = 2$ 處的導數 $f'(2)$ 。

(2) 在 $f(x)$ 的圖形上，求以點 $P(2, 2)$ 為切點的切線方程式。

解

**例題 2**

【配合課本例 2】

在函數 $f(x) = x^3 - 1$ 的圖形上，求以點 $P(-1, -2)$ 為切點的切線方程式。

解

**演練 2**

在函數 $f(x) = x^3$ 的圖形上，求以點 $P(-2, -8)$ 為切點的切線方程式。

解

**例題 3**

【配合課本例 3】

討論函數 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 及 $x = 1$ 處的導數是否都存在？

解

 演練 3

高斯函數 $f(x)=[x]$ 在 $x=0$ 處是否可微分？

 解



【配合課本內文】

例題 4

(1) 試證：若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。

(2) 舉例說明：連續未必可微分。

 解

 演練 4

已知 $f(x)=\begin{cases} 2x+k, & \text{當 } x \geq 1 \\ x^2, & \text{當 } x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 處可微分，求 k 的值。

 解



主題二 導函數

(搭配課本 P.83~P.85)

1. 導函數：

給定函數 $f(x)$ ，當 $f(x)$ 定義域中的每一個數 a 其導數 $f'(a)$ 均存在時，稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的導函數，並稱 $f(x)$ 為可微分函數。

說例 給定函數 $f(x) = x^2$ 。設 a 為實數，由導數的定義，得

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a。$$

此時，從 a 對應到 $f'(a) = 2a$ 構成了另一個函數，稱其為 $f(x)$ 的導函數，記作 $f'(x)$ ，即 $f'(x) = 2x$ 。

2. 微分：

當 $f(x)$ 為可微分函數時，「求函數 $f(x)$ 的導函數」的過程，稱為將函數 $f(x)$ 微分。

3



例題 5

【配合課本例 4】

求函數 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 的導函數。

解



演練 5

求函數 $f(x) = x^2 - 2x$ 的導函數。

解



【配合課本例 5】

例題 6

求函數 $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$) 的導函數。

解



演練 6

求函數 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) 的導函數。

解



主題三

微分公式(一)

(搭配課本 P.86~P.88)

〔公式 1〕若常數函數 $f(x) = c$ ，則 $f'(x) = 0$ ，即 $(c)' = 0$ 。

〔證明〕設 a 為實數。計算 $f'(a)$ 如下：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0。$$

故 $f'(x) = 0$ 。

說例

若 $f(x) = 3$ ，則 $f'(x) = 0$ 。

〔公式 2〕若函數 $f(x) = x^n$ (n 為正整數)，則 $f'(x) = nx^{n-1}$ ，即 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 。

〔證明〕設 a 為實數。計算 $f'(a)$ 如下：

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\ &= na^{n-1}。 \end{aligned}$$

故 $f'(x) = nx^{n-1}$ 。

〔說例〕若 $f(x) = x^3$ ，則 $f'(x) = 3x^2$ 。

〔公式 3〕若函數 $f(x)$ 是可微分函數， c 為常數，則 $cf(x)$ 也是可微分函數，且

$$(cf(x))' = cf'(x)。$$

〔證明〕設 a 是 $f(x)$ 定義域中的實數，並令 $h(x) = cf(x)$ 。計算 $h'(a)$ 如下：

$$h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = c \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)。$$

故 $h(x) = cf(x)$ 也是可微分函數，且 $h'(x) = cf'(x)$ 。

〔公式 4〕若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是可微分函數，則 $f(x) + g(x)$ 也是可微分函數，且

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)。$$

〔證明〕設 a 是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 共同定義域中的實數，並令 $h(x) = f(x) + g(x)$ 。計算 $h'(a)$ 如下：

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a)。$$

故 $h(x) = f(x) + g(x)$ 是可微分函數，且 $h'(x) = f'(x) + g'(x)$ 。

〔說例〕利用公式 1~4，求多項式函數 $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3$ 的導函數：

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^3 - 4x^2 + 3)' = (5x^3)' + (-4x^2)' + (3)' \\ &= 5(x^3)' + (-4)(x^2)' + (3)' = 5 \times 3x^2 + (-4) \times 2x + 0 \\ &= 15x^2 - 8x。 \end{aligned}$$

1. 多項式函數的導函數公式：

實係數多項式函數 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 為可微分函數，且其導函數為

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1。$$



【配合課本例 6】

例題 7

已知 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ ，求導函數 $f'(x)$ 。

解



演練 7

已知 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$ ，求導函數 $f'(x)$ 。

解



【常考題】

例題 8

設二次函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = 2x - 7$ ，而且在點 $(2, f(2))$ 的切線方程式為 $y = -3x + 7$ ，求 $f(x)$ 。

解

 演練 8

設三次函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ，而且在點 $(2, f(2))$ 的切線方程式為 $y = 5x - 3$ ，求 $f(x)$ 。

解

3



主題四 微分公式(二)

(搭配課本 P.89~P.95)

〔公式 5〕若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是可微分函數，則 $f(x) \cdot g(x)$ 也是可微分函數，且

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)。$$

〔證明〕設 a 是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 共同定義域中的實數，並令 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ 。計算 $h'(a)$ 如下：

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x) + f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}。 \end{aligned}$$

(因為 $f(x)$ ， $g(x)$ 可微分，所以上式中的極限都分別存在。)

因為 $g(x)$ 在 $x = a$ 處可微分，所以 $g(x)$ 在 $x = a$ 處連續，即 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 。

代入上式，得

$$h'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)。$$

故 $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ 。

〔公式 6〕若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是可微分函數，則 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $g(x) \neq 0$ 處是可微分函數，且

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}。$$

〔證明〕設 a 是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 共同定義域中的實數，且 $g(a) \neq 0$ ，並令 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 。

計算 $h'(a)$ 如下：

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{(x - a) \cdot g(x) \cdot g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a) \cdot g(x)}{(x - a) \cdot g(x) \cdot g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) \cdot (f(x) - f(a)) - f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{(x - a) \cdot g(x) \cdot g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x) \cdot g(a)} \left(g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x) \cdot g(a)} \right) \cdot \left(g(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)。 \end{aligned}$$

（因為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 可微分，所以上式中的極限都分別存在。）

因為 $g(x)$ 在 $x = a$ 處可微分，所以 $g(x)$ 在 $x = a$ 處連續，即 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 。

代入上式，得

$$h'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}。$$

$$\text{故 } h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}。$$

〔公式 7〕（連鎖律）若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是可微分函數，則合成函數 $(g \circ f)(x)$ 也是可微分函數，

且

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)。$$

（證明省略）

**例題 9**

【配合課本例 7】

已知函數 $h(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)$ ，求 $h'(x)$ 。

解**演練 9**

已知函數 $h(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^3 - 4x + 5)$ ，求 $h'(1)$ 的值。

解**例題 10**

【配合課本例 8】

已知函數 $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 2}$ ，求 $h'(x)$ 。

解



演練 10

已知函數 $h(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+5}$ ，求 $h'(1)$ 的值。

解



例題 11

【配合課本例 9】

已知函數 $h(x) = \frac{1}{2x^2+x+5}$ ，求 $h'(x)$ 。

解



演練 11

已知函數 $h(x) = \frac{1}{x^2}$ ，求 $h'(x)$ 。

解

3



例題 12

【配合課本例 10】

已知函數 $f(x) = x^2 + x + 3$ ， $g(x) = x^5$ ，求合成函數 $(g \circ f)(x)$ 的導函數。

解



演練 12

已知函數 $f(x) = 2x + 3$ ， $g(x) = x^6$ ，求合成函數 $(g \circ f)(x)$ 的導函數。

解



【配合課本例 11】

例題 13

求函數 $h(x) = (x^2 + 3x + 5)^4$ 的導函數。

解



演練 13

求函數 $h(x) = (3x - 5)^7$ 的導函數。

解



【配合課本例 12】

例題 14

已知函數 $h(x) = (x^2 + x - 1)^{10} (2x - 3)^{20}$ ，求 $h'(1)$ 的值。

解

 演練 14

(1) 已知 $f(x) = (x-3)^{10}$ ，求 $f'(2)$ 的值。

(2) 已知 $h(x) = (x-3)^{10}(2x-3)^{20}$ ，求 $h'(2)$ 的值。

解

3



【常考題】

例題 15

已知函數 $f(x) = \left(\frac{2x-5}{x^2+1}\right)^3$ ，求 $f'(1)$ 的值。

解

 演練 15

已知函數 $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^4$ ，求 $f'(2)$ 的值。

 解



主題五 高階導函數

(搭配課本 P.96~P.97)

1. 高階導函數：

導函數「 $f'(x)$ 」的導函數稱為 $f(x)$ 的二階導函數，記作 $f''(x)$ 。

二階導函數「 $f''(x)$ 」的導函數稱為 $f(x)$ 的三階導函數，記作 $f'''(x)$ ；

四階以上的導函數，記作 $f^{(4)}(x)$ ， $f^{(5)}(x)$ ， $\dots$ 。

2. 泰勒展開式：

將 n 次多項式 $f(x)$ 表成 $(x-a)$ 的多項式：

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n。$$

此形式稱為多項式 $f(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒展開式。



例題 16

【配合課本例 13】

已知函數 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ，求 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 、 $f'''(x)$ 、 $f^{(4)}(x)$ 。

 解

 演練 16

已知函數 $f(x) = x^4 + 4x^2 + 5$ ，求 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 、 $f'''(x)$ 、 $f^{(4)}(x)$ 。

解


例題 17

【配合課本例 14】

設 $f(x) = x^3 + 6x + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$ 。

(1) 求 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 的值。

(2) 求 $f(1.01)$ 的近似值到小數點以下第二位（第三位四捨五入）。

解

3

 演練 17

設 $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3$ 。

(1) 求 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 的值。

(2) 求 $f(-0.99)$ 的近似值到小數點以下第二位（第三位四捨五入）。

解



主題六

導數的應用

(搭配課本 P.98~P.105)

1. 求切線方程式：

在函數 $f(x)$ 的圖形上，以點 $P(a, f(a))$ 為切點的切線斜率等於導數 $f'(a)$ 。

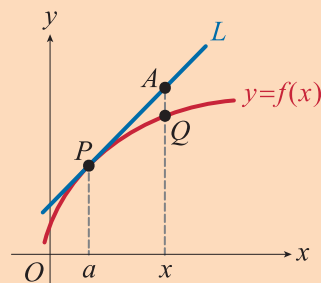
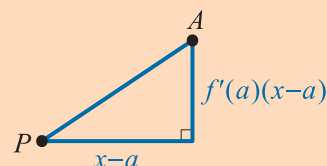
2. 一次估計（又稱一次近似）公式：

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則當 x 很接近 a 時， $f(x)$ 近似

於 $f(a) + f'(a)(x-a)$ 。

說明：

如圖，設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分， $P(a, f(a))$ 是其圖形上一點，過 P 點的切線為 $L: y - f(a) = f'(a)(x - a)$ ，過 x 的鉛直線交函數圖形於點 $Q(x, f(x))$ ，交切線 L 於點 $A(x, f(a) + f'(a)(x - a))$ 。



當 x 很接近 a 時， Q 點也很接近 A 點，此時 Q 點與 A 點的 y 坐標近似，即 $f(x)$ 近似於 $f(a) + f'(a)(x-a)$ 。

由於 $f(a) + f'(a)(x-a)$ 是 x 的一次函數，於是稱它為 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近的一次估計。

3. 導數在運動學上的意義：

設某質點作直線運動，且時刻 t 的位置函數為 $s(t)$ 。

(1) 若 $s(t)$ 可微分，則 $s'(t)$ 是此質點的速度函數。

(2) 若 $s'(t)$ 可微分，則 $s''(t)$ 是此質點的加速度函數。

**例題 18**

【配合課本例 15】

在函數 $f(x) = (x-1)^2(2x-3)^3$ 的圖形上，求以點 $P(2,1)$ 為切點的切線方程式。

解**演練 18**

在函數 $f(x) = x(x^2 - 2)^3$ 的圖形上，求以點 $P(1, -1)$ 為切點的切線方程式。

解

3

**例題 19**

【配合課本例 16】

在函數 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$ 的圖形上，已知以點 P 為切點的切線斜率為 5，求切點 P 的坐標。

解

 演練 19

在函數 $f(x) = x^2 - x + 2$ 的圖形上，已知以點 P 為切點的切線斜率為 3，求切點 P 的坐標。

 解



【常考題】

例題 20

已知在函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$ 圖形上所有切線的斜率中，以 $P(2, -10)$ 為切點的切線斜率最小，求實數 a 、 b 的值。

 解

 演練 20

已知 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 5$ ，求在 $f(x)$ 圖形上所有切線的斜率中，斜率最大的切線方程式。

 解

**例題 21**

【配合課本例 17】

已知 $P(3, -6)$ 為二次函數 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 圖形外一點，求過 P 點的切線方程式。

解

3

**演練 21**

已知 $P(2, 6)$ 為二次函數 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 圖形外一點，求過 P 點的切線方程式。

解



【常考題】

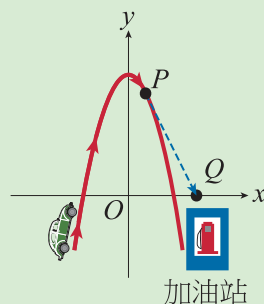
例題 22



在坐標平面上，假設有一公路的路徑是函數 $f(x) = -x^2 + 7$ ($-3 \leq x \leq 3$) 的圖形，回答下列問題。

(1) 導函數 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 已知汽車行駛到 P 點時，剛好看到位於點 $Q(4, 0)$ 的加油站，求 P 點的坐標。



解



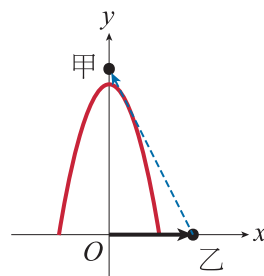
演練 22



在坐標平面上，假設有一高牆的邊界是函數 $f(x) = -x^2 + 9$ ($-3 \leq x \leq 3$) 的圖形，回答下列問題。

(1) 導函數 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 已知甲站在點 $(0, 10)$ 處，乙從原點向東走，請問：乙至少要走多少單位長才會看到甲？



解

**例題 23**

【配合課本例 18】

設函數 $f(x) = x^3 + 6x + 1$ 。

- (1) 求函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次估計。
- (2) 使用(1)，求 $f(1.01)$ 的近似值，並求它與 $f(1.01)$ 的精確值 8.090301 相差多少？

解

3

**演練 23**

設函數 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次估計。
- (2) 使用(1)，求 $f(0.98)$ 的近似值，並求它與 $f(0.98)$ 的精確值 5.861992 相差多少？

解**例題 24**

【配合課本例 19】

- (1) 已知 n 為正整數，且 $f(x) = (1+x)^n$ ，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的一次估計。
- (2) 利用(1)，求 $(1+10^{-3})^5$ 的近似值。

解

 演練 24

 將本金1萬元存入銀行，年利率1.2%，每年計息一次，使用一次估計的方法估算存滿8年的本利和。

 解



【配合課本例 20】

例題 25

 已知有一直線運動的質點之位移函數是 $S(t) = 100t - 4.9t^2$ ，求此質點在時刻 $t = 2$ 的瞬時速度及瞬時加速度。

 解

 演練 25

 某人對新款自行車做一百公尺速度測試，測得起跑 t 秒後前進的距離為 $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5t$ 公尺。

(1) 求在 $t = 3$ 秒時的瞬時速度及瞬時加速度。

(2) 求衝過終點線時的瞬時速度。

 解



主題七

導數的另一種定義

(補充)

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的導數 $f'(a)$ 之定義也可以寫成

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}。$$

說例 根據上述定義，函數 $f(x) = x^2$ 在 $x=2$ 的導數為

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4。$$



【常考題】

例題 26

已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f'(1) = 2$ 。

(1) 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h) - f(1)}{h}$ 。 (2) 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h}$ 。

解



演練 26

已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(3) = 0$ ， $f'(3) = 5$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)}{2h}$ 。

解



重要精選考題



(主：代表本單元對應的主題)

基礎題

1 已知 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ 。

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ 。 (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2}$ 。

主一 二三

解

2 已知函數 $f(x)$ 的圖形通過點 $(1, -1)$ ，且 $f'(x) = -3x^2 + 4x - 7$ ，求 $f(x)$ 。

主三

解

3 已知 $f(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 5)$ ，求 $f'(1)$ 的值。

主四

解

4 已知 $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 3x + 1}$ ，求 $f'(2)$ 的值。

主四

解

5 已知 $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ， $g(x) = x^3 + 1$ ，且 $h(x) = g(f(x))$ ，求 $h'(1)$ 的值。

主四

解

6 (1) 已知 $f(x) = (2x^3 - 4x^2)^6$ ，求 $f'(1)$ 的值。

(2) 已知 $f(x) = (1 - 2x)^2(x^2 - 2)$ ，求 $f'(1)$ 的值。

主四

解

7 已知 $f(x) = \left(\frac{3x-7}{x^2+4}\right)^3$ ，求 $f'(0)$ 的值。

主四

解

8 求在函數 $f(x) = (1 - 2x)^6(2x - 3)$ 的圖形上，以點 $P(1, -1)$ 為切點的切線方程式。

主六

解

9 求平行於直線 $y = 5x$ ，且與函數 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 7$ 的圖形相切的直線方程式。

主六

解

10 設函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3$ 在 $x = -1$ 的切線為 $y = 3x + 4$ ，求實數 a 、 b 的值。

主六

解



重要精選考題



11 已知 $P(1,2)$ 為二次函數 $f(x) = x^2 + x + 1$ 的圖形外一點，求通過 P 點的切線方程式。 主六

解

12 在函數 $f(x) = -x^3 + 6x^2$ 圖形上所有切線的斜率中，求斜率最大的切線方程式。 主六

解

13 設函數 $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ 。

(1) 求函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次估計。

(2) 使用(1)，求 $f(1.01)$ 的近似值。 主六

解

14 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = 0$ ， $f'(1) = -6$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)}{3h}$ 的值。 主七

解

進階題

1 已知 $f(x) = x^2 + |x-1| + 2|x+2|$ ，求 $f'(3)$ 的值。

解



2 設函數 $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{當 } x \leq 2 \\ x^2 + ax + b, & \text{當 } x > 2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 處可微分，求 $f(3)$ 的值。

解



3 已知多項式函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 5$ 。

(1) 求 $f(2)$ 的值。 (2) 求 $f'(2)$ 的值。

解



4 已知 P 為 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 圖形外一點，且過 P 點的二條切線的斜率分別為 6 及 -2，求 P 點的坐標。

解



5 已知通過函數 $f(x) = x^2 - x + k$ 的圖形外一點 $P(1,1)$ 的兩條切線互相垂直，求實數 k 的值。

解



6 已知三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1) = f(2) = f'(2) = 0$ ， $f'(0) = -8$ ，求 $f(x)$ 。

解





考前衝刺精華

1 若函數 $f(x) = |x^2 + 4x - 5|$ ，則 $f'(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【新竹中學】

解



2 已知函數 $f(x) = \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 + 1} \right)^4$ ，求 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺南二中】

解



3 在函數 $f(x) = (x^2 + x - 3)^3 (2x^3 - x + 1)$ 的圖形上，求以點 $P(1, f(1))$ 為切點的切線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺南二中】

解



4 設函數 $f(x) = x^3 + ax$ ， $g(x) = bx^2 + cx$ 。若兩個函數圖形都通過點 $P(-1, 0)$ ，並且在 P 點的切線相同，則序組 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【臺南女中】

解



- 5 設 $P(x)$ 為三次實係數多項式，其圖形通過 $(0, -5)$ 、 $(-1, -1)$ 兩點，且 $y = P(x)$ 的圖形在 $(0, -5)$ 處的切線斜率為 1，在 $(-1, -1)$ 處的切線斜率為 -10，則以降冪排列表示 $P(x)$ 得_____。

【臺中女中】

解



- 6 已知 a 、 b 為實數，且 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{當 } x \geq 3 \\ bx + 2a, & \text{當 } x < 3 \end{cases}$ 為可微分函數，求數對 $(a, b) =$ _____。

【武陵高中】

解



- 7 已知函數 $f(x) = 3x^4 - x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ ，回答下列問題。

(1) $f(x)$ 在 $x=1$ 附近的一次估計為_____。

(2) 以(1)的結果求 $f(0.98)$ 的近似值為_____。

【臺中女中】

解



- 8 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為可微分函數，且 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-1}{x-3} = 2$ ，令 $F(x) = f(x)g(x)$ ，則 $F'(3) =$ _____。

【新竹中學】

解





歷屆大考觀摩



1 已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=0$ 及 $f'(1)=-15$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{3h}$ 的值。

【指甲】

解



2 設 $p(x)$ 為三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1,3)$ 、 $(-1,5)$ 兩點。若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1,3)$ 的切線斜率為 7，而在點 $(-1,5)$ 的切線斜率為 -5，試求 $p(x)$ 。

【指甲】

解



3 已知多項式函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ ，求 $f(x)$ 的圖形在 $x=0$ 處的切線方程式。

【指甲（修）】

解

