

## 3-1 平面向量的表示法

### 重點整理

#### 一、向量的幾何表示法

##### 1. 向量的基本概念

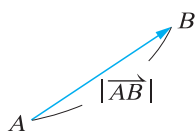
(1) 有向線段：帶有方向的線段。

**例：**如圖， $\overrightarrow{AB}$  是從  $A$  點到  $B$  點的有向線段， $A$  為始點， $B$  為終點。 $\overrightarrow{BA}$  是從  $B$  點到  $A$  點的有向線段， $B$  為始點， $A$  為終點。



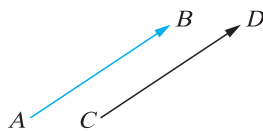
(2) 向量：同時具有大小與方向的量，稱為向量，通常用有向線段表示。

**例：** $\overrightarrow{AB}$ ：從  $A$  點到  $B$  點的有向線段， $A$  為始點， $B$  為終點， $\overrightarrow{AB}$  的長度以  $|\overrightarrow{AB}|$  表示。



(3) 向量的相等：兩個大小相等、方向相同的有向線段，稱為相等的向量。

**例：** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 。



(4) 零向量：始點與終點重合的向量，記為  $\vec{0}$ ，大小為 0，方向為任意方向。

**例：** $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ， $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ 。



##### 2. 向量的運算

(1) 向量的加法：

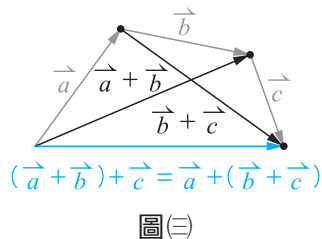
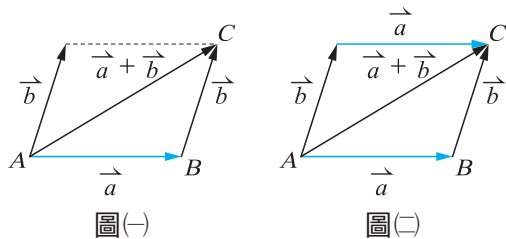
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ，如圖(一)。

① 三角形法。

② 平行四邊形法。

③  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ，如圖(二)，

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ，如圖(三)。

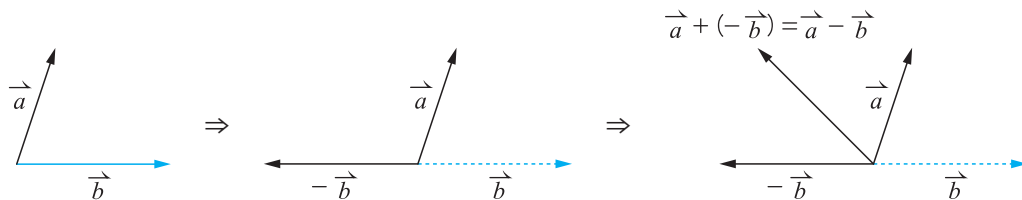


(2) 向量的減法：

若  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ，則  $\overrightarrow{AO}$  稱為  $-\vec{a}$ 。

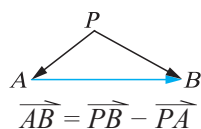
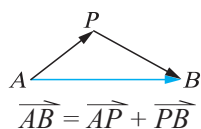


因為  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ，所以我們用加法來定義向量的減法。



(3) 向量的分解：

已知向量  $\overrightarrow{AB}$  及一點  $P$ ，則  $\overrightarrow{AB}$  可以分解為相加或相減的兩個向量。



(4) 向量的係數積：

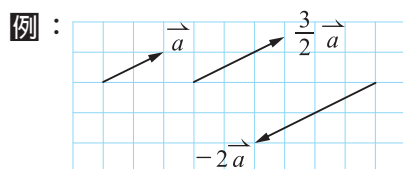
實數  $r$  與向量  $\vec{a}$  的乘積，稱為向量  $\vec{a}$  的係數積，記為  $r\vec{a}$ 。

① 若  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，則下列性質成立：

- ❶  $r > 0$  時， $r\vec{a}$  的方向與  $\vec{a}$  相同，大小為  $r|\vec{a}|$ 。
- ❷  $r < 0$  時， $r\vec{a}$  的方向與  $\vec{a}$  相反，大小為  $|r||\vec{a}|$ 。
- ❸  $r = 0$  時， $r\vec{a} = \vec{0}$ 。

② 若  $\vec{a} = \vec{0}$ ，則  $r\vec{a} = \vec{0}$ 。

③ 當  $r\vec{a}$  與  $\vec{a}$  皆為非零向量時，稱  $r\vec{a}$  與  $\vec{a}$  為平行向量，記為  $r\vec{a} \parallel \vec{a}$ 。



(5) 向量係數積的基本性質：

設  $r, s$  為任意實數， $\vec{a}, \vec{b}$  為任意向量，則下列性質成立。

①  $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ 。

例： $3(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$ 。

②  $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$ 。

例： $(2 + 3)\vec{a} = 2\vec{a} + 3\vec{a}$ 。

③  $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ 。

例： $2(3\vec{a}) = (2 \cdot 3)\vec{a} = 6\vec{a}$ 。

## 二、向量的坐標表示法

### 1. 向量的坐標表示法

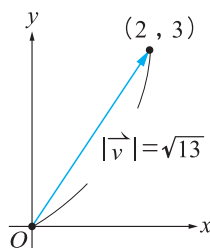
(1) 將坐標平面上任意一個向量  $\vec{v}$  的始點置於原點，設終點坐標為  $(x, y)$ 。

①  $\vec{v} = (x, y)$  稱為  $\vec{v}$  的坐標表示。

②  $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$  為  $\vec{v}$  的長度。

**例：**將坐標平面上的向量  $\vec{v}$  的始點置於原點，設終點坐標為  $(2, 3)$ 。

$\vec{v}$  的坐標表示為  $\vec{v} = (2, 3)$ ，長度為  $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ 。

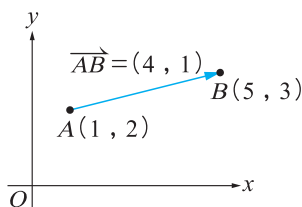


(2) 坐標平面  $A$ 、 $B$  兩點坐標分別為  $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ ，

則  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ 。

**例：**坐標平面上點  $A(1, 2)$ 、 $B(5, 3)$ ，

則  $\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 3 - 2) = (4, 1)$ 。



### 2. 向量的運算

(1) 向量加法的坐標表示：

設  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ 。

**例：** $\vec{a} = (3, 5)$ ， $\vec{b} = (4, 2)$ ，則  $\vec{a} + \vec{b} = (3 + 4, 5 + 2) = (7, 7)$ 。

(2) 向量減法的坐標表示：

設  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則下列性質成立。

①  $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$ 。

②  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ 。

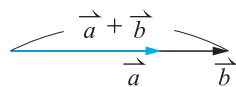
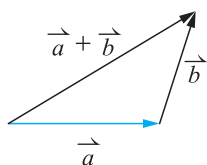
**例：** $\vec{a} = (3, 5)$ ， $\vec{b} = (4, 2)$ ，則  $-\vec{a} = (-3, -5)$ ，

$\vec{a} - \vec{b} = (3 - 4, 5 - 2) = (-1, 3)$ 。

(3) 三角不等式：

①  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 。

②  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  同向，或  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$  中有零向量時， $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 。



(4) 向量的係數積：

設  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $r$  為實數，則  $r\vec{a} = (ra_1, ra_2)$ 。

**例：**坐標平面上向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ， $r = 3$ ，則  $r\vec{a} = 3(2, 1) = (6, 3)$ 。

### 3. 兩向量的平行

設  $\vec{a}, \vec{b}$  是平面上的兩個非零向量，若  $\vec{b} = r\vec{a}$ ， $r$  為非零實數，則  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，反之亦然。

**例：**坐標平面上向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 6)$ ，因為  $\vec{b} = 3\vec{a}$ ，所以  $\vec{b} \parallel \vec{a}$ 。

### 三、向量的線性組合

若  $\vec{OA}$  與  $\vec{OB}$  為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上任意一個向量  $\vec{OP}$  必能唯一表成  $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$  的形式，其中  $x, y$  為實數。這個表示法稱為將  $\vec{OP}$  寫成  $\vec{OA}$  與  $\vec{OB}$  的線性組合。

**例：**設  $\vec{OA} = (1, 0)$ ， $\vec{OB} = (0, 1)$ ，將向量  $\vec{OP} = (2, 3)$  寫成  $\vec{OA}$  與  $\vec{OB}$  的線性組合，可得  $(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$ ，即  $\vec{OP} = 2\vec{OA} + 3\vec{OB}$ 。

**例：**設  $\vec{a} = (1, 4)$ ， $\vec{b} = (2, -1)$ ， $\vec{c} = (7, 10)$ 。將  $\vec{c}$  寫成  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的線性組合可得  $(7, 10) = 3(1, 4) + 2(2, -1)$ ，即  $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ 。

### 四、分點公式

#### 1. 分點公式

設  $P$  是線段  $\overline{AB}$  上的點，且滿足  $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，則對平面上任一點  $O$ ，

$$\vec{OP} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}。$$

若設  $O(0, 0)$ ， $A(a_1, a_2)$ ， $B(b_1, b_2)$ ，則

$$\vec{OP} = \frac{n}{m+n} (a_1, a_2) + \frac{m}{m+n} (b_1, b_2) = \left( \frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n} \right)。$$

**例：**設  $A$  點坐標  $(3, -2)$ ， $B$  點坐標  $(8, 3)$ ， $P$  點為線段  $\overline{AB}$  上的點，且

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3，則 P 點坐標為 \left( \frac{3 \times 3 + 2 \times 8}{2+3}, \frac{3 \times (-2) + 2 \times 3}{2+3} \right) = (5, 0)。$$

#### 2. 三點共線

設  $P, A, B, O$  為平面上相異四點，其中  $O$  不在直線  $AB$  上。將  $\vec{OP}$  表為  $\vec{OA}$ ， $\vec{OB}$  的線性組合  $\vec{OP} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$ ，則  $P, A, B$  三點共線的充要條件為  $\alpha + \beta = 1$ 。  
若  $P$  點在線段  $\overline{AB}$  上時，則  $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ 。

### 例題 1 向量的線性組合

如右圖，由 15 個相同的平行四邊形所拼成的圖形中，

(1) 若  $\vec{DE} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，試求  $x, y$ 。(5 分)

(2) 若  $\vec{FG} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ ，試求  $a, b$ 。(5 分)

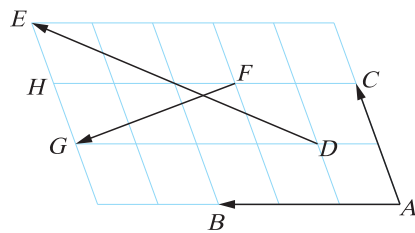
**解**

$$(1) \vec{DE} = \vec{DG} + \vec{GE} = \frac{4}{3} \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}, y = 1$$

$$(2) \vec{FG} = \vec{FH} + \vec{HG} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{CA} = \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\therefore a = 1, b = -\frac{1}{2}$$



### 例題 2 向量的應用(一)

給定平面上三點  $A(3, 2)$ 、 $B(5, 3)$ 、 $C(8, 6)$ ，試求：

- (1) 向量  $\overrightarrow{AB}$  及  $\overrightarrow{BC}$ 。(5 分)
- (2) 若四邊形  $ABCD$  為平行四邊形，求  $D$  點坐標。(5 分)

**解** (1)  $\overrightarrow{AB} = (5 - 3, 3 - 2) = (2, 1)$

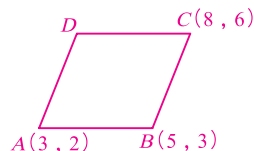
$$\overrightarrow{BC} = (8 - 5, 6 - 3) = (3, 3)$$

(2) 作示意圖，設  $D(a, b)$

$$\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \therefore (a - 3, b - 2) = (3, 3)$$

$$\Rightarrow a - 3 = 3, b - 2 = 3$$

$$\text{得 } a = 6, b = 5 \quad \therefore D(6, 5)$$



### 例題 3 向量的應用(二)

坐標平面上八邊形  $ABCDEFGH$  的四組對邊都平行且等長(即  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ 、 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GF}$ 、 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HG}$ 、 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH}$ )，已知  $A(2, 3)$ 、 $B(6, 3)$ 、 $C(8, 6)$ 、 $D(8, 10)$ 、 $E(6, 13)$ ，試求：

- (1)  $F$  點坐標。(3 分)
- (2)  $G$  點坐標。(3 分)
- (3)  $H$  點坐標。(4 分)

**解** 作示意圖如右

(1) 設  $F(a, b)$

$$\because \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA} \quad \therefore (a - 6, b - 13) = (-4, 0)$$

$$\Rightarrow a - 6 = -4, b - 13 = 0$$

$$\text{得 } a = 2, b = 13 \quad \therefore F(2, 13)$$

(2) 設  $G(c, d)$

$$\because \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CB} \quad \therefore (c - 2, d - 13) = (-2, -3)$$

$$\Rightarrow c - 2 = -2, d - 13 = -3$$

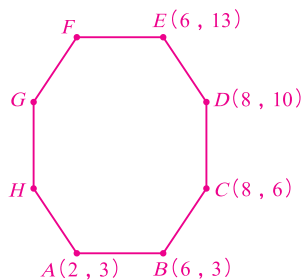
$$\text{得 } c = 0, d = 10 \quad \therefore G(0, 10)$$

(3) 設  $H(e, f)$

$$\because \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC} \quad \therefore (e - 0, f - 10) = (0, -4)$$

$$\Rightarrow e - 0 = 0, f - 10 = -4$$

$$\text{得 } e = 0, f = 6 \quad \therefore H(0, 6)$$



### 例題 4 向量的係數積與加減法

已知坐標平面上點  $A(5, -1)$ ,  $B(7, 2)$ ,  $C(8, 2)$ , 若  $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$ , 試求:

(1)  $|\overrightarrow{AP}|$ 。(5 分)

(2)  $P$  點坐標。(5 分)

**解** (1)  $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (1, 0)$   
 $\overrightarrow{AP} = 4(2, 3) - 3(1, 0) = (5, 12)$   
 $\therefore |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{25 + 144} = 13$

(2) 設  $P(x, y)$ , 則  $\overrightarrow{AP} = (x - 5, y + 1) = (5, 12)$   
 $\Rightarrow x - 5 = 5, y + 1 = 12$   
 得  $x = 10, y = 11 \therefore P(10, 11)$

### 例題 5 向量的線性組合

已知坐標平面上向量  $\overrightarrow{OP} = (5, 2)$ ,

(1) 設  $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (0, 1)$ , 試將  $\overrightarrow{OP}$  寫為  $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$  的線性組合。(5 分)

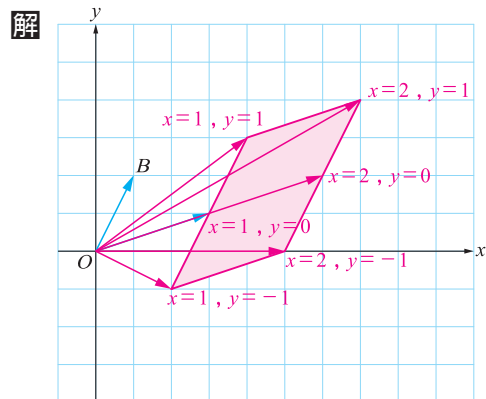
(2) 若  $\vec{a} = (4, -2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2)$ , 試將  $\overrightarrow{OP}$  寫為  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的線性組合。(5 分)

**解** (1) 設  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ , 即  $(5, 2) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$   
 $\therefore x = 5, y = 2$   
 即  $\overrightarrow{OP} = 5\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

(2) 設  $\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , 即  $(5, 2) = x(4, -2) + y(-1, 2) = (4x - y, -2x + 2y)$   
 得  $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 5 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -x + y = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$   
 由  $\textcircled{1} + \textcircled{2}$  得  $3x = 6, x = 2$  代入  $\textcircled{2}$  式,  $y = 3$   
 $\therefore \overrightarrow{OP} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

### 例題 6 平面向量線性組合所形成的圖形

設平面坐標系原點  $O(0, 0)$ , 向量  $\overrightarrow{OA} = (3, 1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$ ,  $P$  為平面上移動的點, 且  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ , 其中  $1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ ,  $x, y$  為實數。試在平面上標示所有  $P$  點所形成的區域。(10 分)



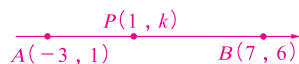
### 例題 7 三點共線與分點公式

設點  $A(-3, 1)$ 、 $B(7, 6)$  為平面上相異兩點，

(1)  $P(1, k)$  在直線  $AB$  上，試求  $k$  值。(5 分)

(2)  $Q$  為直線  $AB$  上一點且滿足  $\overline{QA} : \overline{QB} = 3 : 2$ ，試求  $Q$  點坐標。(有兩解，5 分)

**解** (1) 作示意圖



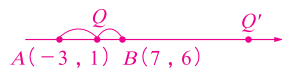
$P$ 、 $A$ 、 $B$  共線，則  $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AP} = (4, k-1), \overrightarrow{AB} = (10, 5)$$

$$\therefore \frac{4}{10} = \frac{k-1}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{k-1}{5} \Rightarrow k-1 = 2$$

$$\therefore k = 3$$

(2)  $Q$  在  $\overline{AB}$  上，由分點公式得  $\left(\frac{-6+21}{3+2}, \frac{2+18}{3+2}\right)$ ，即  $(3, 4)$



$Q$  在  $\overline{AB}$  外，設為  $Q'(a, b)$

$$\text{由題意 } \overline{AB} : \overline{BQ'} = 1 : 2, \text{ 由分點公式 } (7, 6) = \left(\frac{-6+a}{3}, \frac{2+b}{3}\right)$$

$$\text{得 } a-6=21, b+2=18$$

$$\Rightarrow a=27, b=16$$

故所求  $Q$  點為  $(3, 4)$  或  $(27, 16)$

### 例題 8 三角形的重心與周長

(1) 設平面上三點  $A(1, 2)$ 、 $B(3, -4)$ 、 $C(-1, 5)$ ，試求：

①  $\triangle ABC$  重心坐標。(3 分)

② 若  $\triangle ABD$  重心坐標為  $(2, 4)$ ，試求  $D$  點坐標。(3 分)

(2) 設  $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$ ， $\overrightarrow{AC} = (5, 12)$ ，試求  $\triangle ABC$  周長。(4 分)

**解** (1) ① 由重心公式  $\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2-4+5}{3}\right) = (1, 1)$

$$\text{② 設 } D(a, b), \text{ 則 } (2, 4) = \left(\frac{1+3+a}{3}, \frac{2-4+b}{3}\right)$$

$$\Rightarrow a+4=6, b-2=12 \Rightarrow a=2, b=14$$

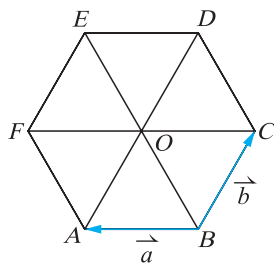
$$\therefore D(2, 14)$$

$$(2) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (5, 12) - (3, 4) = (2, 8)$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 周長為 } |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}| \\ = \sqrt{9+16} + \sqrt{4+64} + \sqrt{25+144} \\ = 5 + 2\sqrt{17} + 13 = 18 + 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

### 例題 9 正多邊形邊上向量的線性組合

如右圖所示，點  $O$  為正六邊形  $ABCDEF$  的中心。設  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，請將下列向量以  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示：



(1)  $\overrightarrow{EC}$ 。(5 分)

(2)  $\overrightarrow{DB}$ 。(5 分)

**解** (1)  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$   
 $= -\vec{b} - 2\vec{a}$   
 $= -2\vec{a} - \vec{b}$   
 (2)  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$   
 $= -2\vec{b} - \vec{a}$   
 $= -\vec{a} - 2\vec{b}$

### 例題 10 向量線性組合的長度極小值

已知  $\vec{a} = (-1, 3)$ ， $\vec{b} = (2, -1)$ ， $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ ，試問：

(1)  $|\vec{c}|$  的最小值為多少？(5 分)

(2) 承(1)，此時  $\vec{c} = ?$  (5 分)

**解**  $\vec{c} = (-1, 3) + t(2, -1) = (-1 + 2t, 3 - t)$   
 $|\vec{c}| = \sqrt{(-1 + 2t)^2 + (3 - t)^2}$   
 $= \sqrt{5t^2 - 10t + 10}$   
 $= \sqrt{5(t^2 - 2t) + 10}$   
 $= \sqrt{5(t - 1)^2 + 5}$   
 (1)  $t = 1$  時， $|\vec{c}|$  有最小值  $\sqrt{5}$   
 (2)  $\therefore t = 1 \quad \therefore \vec{c} = (1, 2)$