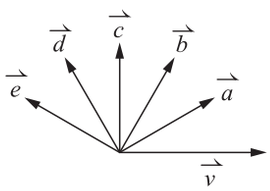
第3章 綜合演練

得分　　月　日

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 如右圖，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ 是五個長度相等的向量，試問向量 $\vec{v}$ 與哪一個向量的內積最小？



(A) $\vec{a}$　(B) $\vec{b}$　(C) $\vec{c}$

(D) $\vec{d}$　(E) $\vec{e}$

解 以 $\vec{a}$ 為例，

$\vec{a}\cdot\vec{v}=|\vec{a}|\,|\vec{v}|\cos\alpha$

$\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=|\vec{e}|$

$\therefore$內積的大小由夾角決定

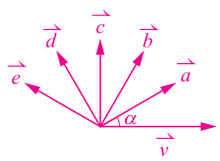
$\vec{d}$，$\vec{e}$ 與 $\vec{v}$ 的夾角大於 90°

且 $\vec{e}$ 與 $\vec{v}$ 夾角最大

所以其餘弦值最小

即 $\vec{e}\cdot\vec{v}$ 最小

故選(E)



2. 設△ABC 三邊長為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CA}=9$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=?$

(A) -63　(B) -33　(C) 0

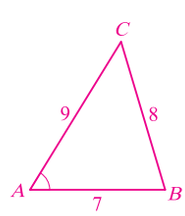
(D) 33　(E) 63

解 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\cos A$

$$=-7\cdot 9\cdot\frac{49+81-64}{2\cdot 7\cdot 9}$$

$$=-\frac{66}{2}=-33$$

故選(B)



翰林用心 教師用 精益求精

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 下列各二階行列式中，哪些選項展開後其值為 0？

(A) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} 27 & 9 \\ 30 & 11 \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 222 & 111 \\ 666 & 333 \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} 123 & 111 \\ 246 & 223 \end{vmatrix}$　(E) $\begin{vmatrix} 123 & 456 \\ 0 & 789 \end{vmatrix}$

解 (A) ○：$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

(B) ×：$\begin{vmatrix} 27 & 9 \\ 30 & 11 \end{vmatrix} = 297 - 270 = 27$

(C) ○：$\begin{vmatrix} 222 & 111 \\ 666 & 333 \end{vmatrix} = 0$（第一、二列成比例）

(D) ×：$\begin{vmatrix} 123 & 111 \\ 246 & 223 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{vmatrix} 123 & 111 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 123$

(E) ×：$\begin{vmatrix} 123 & 456 \\ 0 & 789 \end{vmatrix} = 123 \times 789$

故選(A)(C)

4. 已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$，請選出正確的選項。

(A) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = 6$　(B) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 6$　(C) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 12$

(D) $\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 4c & 6d \end{vmatrix} = 72$　(E) $\begin{vmatrix} a+2b & b-a \\ c+2d & d-c \end{vmatrix} = 18$

解 (A) ×：$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -6$

(B) ○：$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$

(C) ×：$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 = 24$

(D) ○：$\begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 4c & 6d \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 12 \cdot 6 = 72$

(E) ○：$\begin{vmatrix} a+2b & b-a \\ c+2d & d-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-a \\ c & d-c \end{vmatrix}^{\times 1} + \begin{vmatrix} 2b & b-a \\ 2d & d-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} b & b-a \\ d & d-c \end{vmatrix}^{\times(-1)}$

$= 6 + 2 \begin{vmatrix} b & -a \\ d & -c \end{vmatrix} = 6 + 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$= 6 + 2 \times 6 = 18$

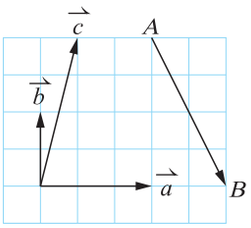
故選(B)(D)(E)

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. 右圖由 30 個邊長為 1 的正方形組成，試問：

(1) 若 $\overrightarrow{AB}=r\vec{a}+s\vec{b}$，則數對 $(r,s)=$ _____。

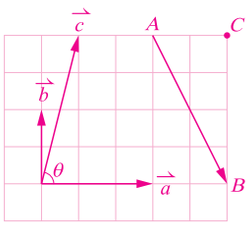
(2) $\vec{a}\cdot\vec{c}=$ _____。



解 (1) 如右圖，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b}$

故數對 $(r,s)=\left(\frac{2}{3},-2\right)$



(2) 由右圖可知

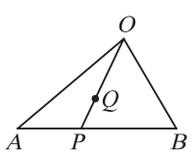
$|\vec{c}|=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

又 $\vec{c}$，$\vec{a}$ 的夾角為 θ，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\,|\vec{c}|\cos\theta=3\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=3$

6. (1) 如右圖，已知 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，$\overline{OQ}:\overline{QP}=2:1$，若 $\overrightarrow{OQ}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，則數對 $(a,b)=$ _____。

(2) 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(3,1)$，$\vec{v}=(5,9)$，若 $\vec{v}=r\vec{a}+s\vec{b}$，則數對 $(r,s)=$ _____。



解 (1) $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{15}\overrightarrow{OB}$

故數對 $(a,b)=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{15}\right)$

(2) 由已知 $(5,9)=r(-2,3)+s(3,1)$

$\Rightarrow(5,9)=(-2r+3s,3r+s)$

$\Rightarrow\begin{cases}-2r+3s=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\3r+s=9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

由②$\times3-$①得 $11r=22$

$\Rightarrow r=2$ 代入②得 $s=9-6=3$

故數對 $(r,s)=(2,3)$

翰林用心 教師用 精益求精

7. 坐標平面上原點 $O(0,0)$，$A(2,3)$，$B(4,-1)$，試回答下列問題：

(1) $\triangle OAB$ 面積為_____。

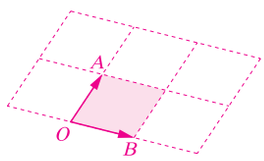
(2) $\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$，$0\le r\le 2$，$-1\le s\le 2$，滿足這個條件的 P 點所形成的區域面積為_____。

解 (1) $\overrightarrow{OA}=(2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(4,-1)$

$\therefore \triangle OAB$ 面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\times 14=7$

(2) 如右圖，P 點所形成區域面積為 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 所張成的平行四邊形面積的 6 倍

即 $6\cdot\left|\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}\right|=6\times 14=84$



8. 已知坐標平面上原點 $O(0,0)$，$A(4,3)$，$B(14,-2)$，$C(x,2)$，$D(6,y)$，試回答下列問題：

(1) $\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 方向上的正射影相等，則 $x=$_____。

(2) $\overrightarrow{OD}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 所張成的三角形面積為 11 且 $y>0$，則 $y=$_____。

解 (1) $\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}$　$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow(14,-2)\cdot(4,3)=(x,2)\cdot(4,3)\Rightarrow 50=4x+6\Rightarrow 4x=44\Rightarrow x=11$

(2) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6 & 4\\ y & 3\end{vmatrix}\right|=11$

$\Rightarrow|18-4y|=22\Rightarrow 4y-18=\pm 22$

$\Rightarrow 4y=40$ 或 $4y=-4\Rightarrow y=10$ 或 $y=-1$

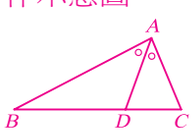
但 $y>0$　$\therefore y=10$

9. $\triangle ABC$ 中，$A(2,-8)$，$B(-6,-2)$，$C(6,-5)$。已知 $\angle A$ 的內角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，則：

(1) $\overline{BD}:\overline{CD}=$_____。

(2) D 點坐標為_____。

解 作示意圖



(1) $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=\sqrt{(-6-2)^2+(-2-(-8))^2}:\sqrt{(6-2)^2+(-5-(-8))^2}$

$=\sqrt{64+36}:\sqrt{16+9}=10:5=2:1$

(2) 由分點公式得 D 點坐標為 $\left(\frac{-6+12}{2+1},\frac{-2-10}{2+1}\right)$

$\therefore D(2,-4)$

10. 解二元一次方程組 $\begin{cases} kx+9y=k+3 \\ x+ky=k-1 \end{cases}$，則

(1) $k=$_____時，方程組無限多組解。

(2) $k=$_____時，方程組無解。

解 $\Delta=\begin{vmatrix} k & 9 \\ 1 & k \end{vmatrix}=k^2-9=(k+3)(k-3)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} k+3 & 9 \\ k-1 & k \end{vmatrix}=k^2+3k-9k+9=k^2-6k+9=(k-3)^2$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} k & k+3 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix}=k^2-k-k-3=k^2-2k-3=(k-3)(k+1)$

(1) $k=3$ 時，$\Delta=0$，且 $\Delta_x=0$，$\Delta_y=0$

方程組無限多組解

(2) $k=-3$ 時，$\Delta=0$，但 $\Delta_x=36\neq 0$

方程組無解

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 已知向量 $\vec{a}=(4,3)$，$|\vec{b}|=15$，若 $\vec{b}=(x,y)$ 時，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 有最小值 m，試求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值 m。（5 分）

(2) 承(1)，此時的向量 $\vec{b}=?$（5 分）

解 由柯西不等式 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\,|\vec{b}|$，得 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le\sqrt{16+9}\times 15$

即 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le 75$　$\therefore -75\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le 75$

故知 $m=-75$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 有最小值時，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

即 $(x,y)=t(4,3)=(4t,3t)$

令 $\vec{a}\cdot\vec{b}=m$，即 $(4,3)\cdot(4t,3t)=-75$

$\Rightarrow 16t+9t=-75\Rightarrow 25t=-75\Rightarrow t=-3$

得 $(x,y)=(-12,-9)$

$\therefore$(1) $m=-75$；(2) $(x,y)=(-12,-9)$

12. 已知平面向量 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|2\vec{a}-3\vec{b}|=6$，試求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$。（5 分）

(2) $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積。（5 分）

解 (1) 已知 $|2\vec{a}-3\vec{b}|=6$

$\Rightarrow|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=36\Rightarrow 4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}=36$

$\Rightarrow 4\times 9+9\times 4-12\vec{a}\cdot\vec{b}=36\Rightarrow 12\vec{a}\cdot\vec{b}=36\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2) 所求為

$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{9\times 4-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$