# 1-4 正餘弦函數的疊合



## 重點整理

### 正餘弦函數的疊合

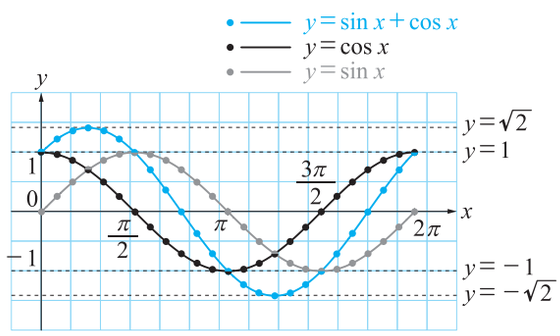
設 $a$，$b$ 是不全為 0 的實數，則 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，

其中 $\theta$ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

**例**：$3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\theta)$，其中 $\theta$ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$。

**例**：$5\sin x+12\cos x=13\sin(x+\theta)$，其中 $\theta$ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$，$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$。

**例**：$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，圖形如下。




### 例題 1　將正餘弦函數疊合成正弦曲線

將下列函數疊合成正弦曲線的形式，即 $y=r\sin(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$：

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$。（5 分）

(2) $y=3\sin x-4\cos x$。（5 分）

**解**

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $y=3\sin x-4\cos x$

$=5\left(\dfrac{3}{5}\sin x+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cos x\right)$

$=5\sin(x+\phi)$，其中 $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$，$\sin\phi=-\dfrac{4}{5}$

翰林用心 教師用 精益求精

### 例題 2　將正餘弦函數疊合成餘弦曲線

將下列函數疊合成餘弦曲線的形式，即 $y=r\cos(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$：

(1) $y=\sin x+\cos x$。（5 分）

(2) $y=4\sin x-3\cos x$。（5 分）

**解**

(1) $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $y=4\sin x-3\cos x=5\left(\frac{4}{5}\sin x-\frac{3}{5}\cos x\right)=5(-\sin\phi\sin x+\cos\phi\cos x)$

$=5\cos(x+\phi)$，其中 $\sin\phi=-\frac{4}{5}$，$\cos\phi=-\frac{3}{5}$

### 例題 3　正餘弦函數疊合的最大值與最小值（一）

試求下列各函數的最大值與最小值：

(1) $y=5\sin x-12\cos x+3$。（5 分）　　(2) $y=\sin x+2\cos x$。（5 分）

**解**

(1) $y=5\sin x-12\cos x+3=13\left(\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x\right)+3$

$=13\sin(x-\theta)+3$，其中 $\cos\theta=\frac{5}{13}$，$\sin\theta=\frac{12}{13}$

因為 $\sin(x-\theta)$的最大值為 1，最小值為 $-1$，所以 $y$ 的最大值為 16，最小值為 $-10$

(2) $y=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)$

$=\sqrt{5}\sin(x+\theta)$，其中 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

因為 $\sin(x+\theta)$的最大值為 1，最小值為 $-1$，所以 $y$ 的最大值為 $\sqrt{5}$，最小值為 $-\sqrt{5}$

### 例題 4　正餘弦函數疊合的最大值與最小值（二）

(1) 將函數 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 疊合成正弦曲線的形式，即 $y=r\sin(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$。（4 分）

(2) 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最大值，並寫出此時的 $x$ 值。（3 分）

(3) 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最小值，並寫出此時的 $x$ 值。（3 分）

**解**

(1) $y=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

(2) 令 $\phi=x+\frac{\pi}{3}$，由題意 $\frac{\pi}{3}\le\phi\le\frac{7\pi}{3}$，$y=2\sin\phi$

當 $\phi=\frac{\pi}{2}$ 時，$y$ 有最大值 2，此時 $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

(3) $\phi=\frac{3\pi}{2}$ 時，$y$ 有最小值 $-2$，此時 $x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$

### 例題 5　正餘弦函數疊合的最大值與最小值（三）

⑴ 將函數 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-2\cos x$ 疊合成正弦曲線的形式，即 $y=r\sin(x+\theta)$，其中 $r>0$，$-\pi<\theta<\pi$。（4 分）

⑵ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最大值，並寫出此時的 $x$ 值。（3 分）

⑶ 在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，求此函數的最小值，並寫出此時的 $x$ 值。（3 分）

**解**

⑴ $y=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-2\cos x=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$

⑵ 令 $\phi=x-\frac{5\pi}{6}$，由題意，$-\frac{5\pi}{6}\le\phi\le\frac{7\pi}{6}$，$y=2\sin\phi$

$\sin\phi=1$ 時，$y$ 有最大值 2，此時 $\phi=\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{4\pi}{3}$

⑶ $\sin\phi=-1$ 時，$y$ 有最小值 $-2$，此時 $\phi=-\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{\pi}{3}$

### 例題 6　正餘弦函數疊合解方程式

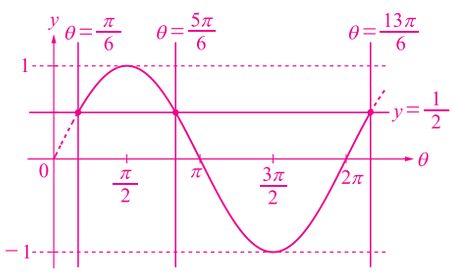
在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，解方程式 $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$。（10 分）

**解**

令 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

令 $\theta=x+\frac{\pi}{6}$，由題意，$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{13\pi}{6}$，

解 $2\sin\theta=1$，作 $\begin{cases}y=\sin\theta\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$　圖形如右




得 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{13\pi}{6}$，此時 $x=0$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 或 $2\pi$

### 例題 7　正餘弦函數疊合解不等式

在 $0\le x\le 2\pi$ 範圍內，試求不等式 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 0$ 的解。（10 分）

**解**

令 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

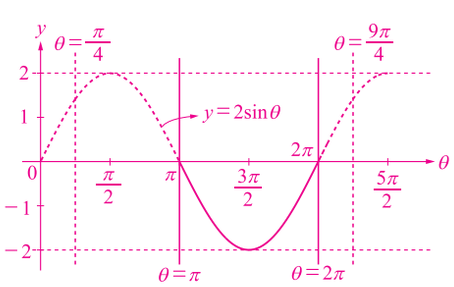
$=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

令 $\theta=x+\frac{\pi}{4}$，由題意 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{9\pi}{4}$，$y=2\sin\theta$

當 $\pi\le\theta\le 2\pi$ 時，$2\sin\theta\le 0$

即 $\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le 2\pi$

故得 $\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{7\pi}{4}$




翰林用心 教師用 精益求精

### 例題 8　應用問題

兩個同頻率交流電的電流函數分別為 $I_1=f_1(t)=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$，$I_2=f_2(t)=\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$，試求兩電流函數疊加之後的總電流函數 $I$。（10 分）

**解** $I=I_1+I_2=f_1(t)+f_2(t)$

$=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin(\omega t)\cdot\frac{1}{2}+\cos(\omega t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(\omega t)\cdot\frac{1}{2}-\cos(\omega t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(\omega t)$

### 例題 9　正餘弦函數疊合後的最小值與係數的關係

設 $a$，$b$ 是常數且 $a>b$，若 $a\sin x+b\cos x$ 的最小值為 $-5$，且 $a+b=7$，試求 $a$，$b$ 的值。（10 分）

**解** 由疊合公式可以得到 $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

故知 $-\sqrt{a^2+b^2}=-5$，即 $\sqrt{a^2+b^2}=5$

兩邊平方得 $a^2+b^2=25$

由已知得 $b=7-a$，代入上式

得 $a^2+49-14a+a^2=25$，整理得 $a^2-7a+12=0$

化簡得 $(a-3)(a-4)=0$，故 $a=3$ 或 4，得 $b=4$ 或 3

但 $a>b$，故 $a=4$，$b=3$

### 例題 10　二倍角公式與正餘弦函數的疊合

試求 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x-2$ 的最大值與最小值。（10 分）

**解** 由二倍角公式，

$y=\sqrt{3}(2\sin x\cos x)+(2\cos^2x-1)-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)-1$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$

因為 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值為 1，最小值為 $-1$

故所求 $y$ 的最大值為 1，最小值為 $-3$