第 2 章 指數與對數函數

2-1 指數函數及其圖形

重點整理

一、指數函數的圖形與特徵

1. 指數函數

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則稱函數 $f(x)=a^x$ 是以 a 為底數的指數函數。

例：$f(x)=2^x$ 是以 2 為底數的指數函數。

例：$f(x)=5^x$ 是以 5 為底數的指數函數。

2. 指數函數的圖形

(1) 指數函數的定義域與值域

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，則指數函數 $f(x)=a^x$ 的定義域為所有實數，且值域為所有正實數。

例：$f(x)=2^x$ 是以 2 為底數的指數函數，將任意實數 x 代入都有意義，且函數值都大於 0。

(2) 指數函數的圖形

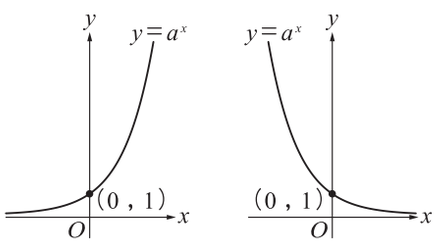
在坐標平面上，以 (x,a^x) 為點坐標，可以描出指數函數 $y=a^x$ 的圖形。

① 底數 $a>1$，函數值逐漸增加，圖形由左而右逐漸上升，如圖㈠。

② 底數 a 滿足 $0<a<1$，函數值逐漸減少，圖形由左而右逐漸下降，如圖㈡。

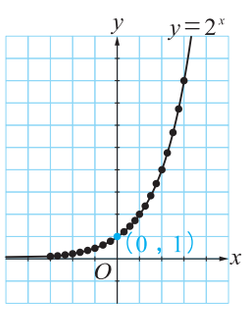
例：$y=f(x)=2^x$，圖形如圖㈢。

例：$y=f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，圖形如圖㈣。

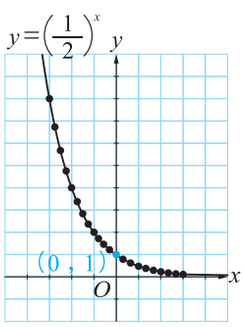


圖㈠ $a>1$

圖㈡ $0<a<1$



圖㈢



圖㈣

3. 指數函數的遞增與遞減

(1) 函數的遞增與遞減

對函數 $f(x)$ 而言，遞增與遞減定義如下：

① 遞增：對所有 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$。

② 嚴格遞增：對所有 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$。

③ 遞減：對所有 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\geq f(x_2)$。

④ 嚴格遞減：對所有 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$。

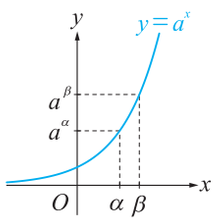
翰林用心 教師用 精益求精

(2) 指數函數的遞增與遞減

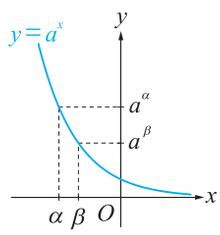
對指數函數 $y=a^x$ 而言，遞增與遞減定義如下：

① $a>1$ 時，圖形由左而右逐漸上升，是嚴格遞增函數，即當 $\alpha<\beta$ 時，有 $a^\alpha<a^\beta$，如圖(五)。

② $0<a<1$ 時，圖形由左而右逐漸下降，是嚴格遞減函數，即當 $\alpha<\beta$ 時，有 $a^\alpha>a^\beta$，如圖(六)。



圖(五)

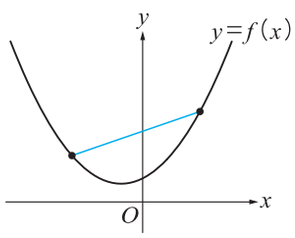


圖(六)

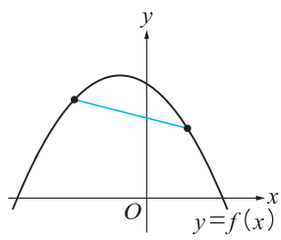
4. 函數圖形的凹向性

(1) 凹口向上：連接函數圖形上任兩點的線段都在函數圖形的上方，此函數圖形為凹口向上，如圖(七)。

(2) 凹口向下：連接函數圖形上任兩點的線段都在函數圖形的下方，此函數圖形為凹口向下，如圖(八)。

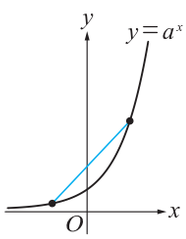


圖(七)

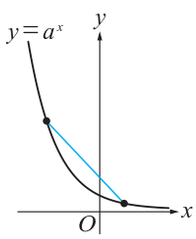


圖(八)

(3) 指數函數圖形的凹向性：指數函數的圖形都是凹口向上，如圖(九)、圖(十)。



圖(九)　$a>1$



圖(十)　$0<a<1$

二、指數方程式與指數不等式

1. 指數方程式

方程式的未知數 x 出現在指數位置時，稱為指數方程式。

例：$2^{x+3}=32$，即 $2^{x+3}=2^5$，得 $x+3=5$，故 $x=2$。

例：$4^x-7\cdot 2^x-8=0$，底數換成 2，得 $(2^2)^x-7\cdot 2^x-8=0$，

即 $(2^x)^2-7\cdot 2^x-8=0$，得 $(2^x-8)(2^x+1)=0$，因 $2^x+1\neq 0$，

故 $2^x-8=0$，即 $2^x=8=2^3$，故得 $x=3$。

2. 指數大小關係與不等式

設 a 為底數，α、β 為指數。

(1) $a>1$ 時，若 $\alpha<\beta$ 則 $a^{\alpha}<a^{\beta}$。相反地，若 $a^{\alpha}<a^{\beta}$ 則 $\alpha<\beta$。

例：底數 $3>1$，因為 $2<5$，所以 $3^2<3^5$。

例：已知 $3^{\alpha}<3^5$，因為底數 $3>1$，所以 $\alpha<5$。

(2) $0<a<1$ 時，若 $\alpha<\beta$ 則 $a^{\alpha}>a^{\beta}$。相反地，若 $a^{\alpha}>a^{\beta}$ 則 $\alpha<\beta$。

例：底數 $0<\frac{1}{2}<1$，因為 $2<5$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^5$。

例：已知 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}<\left(\frac{1}{2}\right)^3$，因為底數 $0<\frac{1}{2}<1$，所以 $\alpha>3$。

三、金融上的應用

單利與複利

本金 a，利率 r，期數 n。

(1) 單利（本金固定）

n 期後，本利和 $a(1+nr)$。

例：本金 $a=10000$（元），年利率 $r=1\%$，3 年後（$n=3$），單利法的本利和為 $10000(1+1\%\times 3)$。

(2) 複利（利息加入本金）

n 期後，本利和 $a(1+r)^n$。

例：本金 $a=10000$（元），年利率 $r=1\%$，3 年後（$n=3$），複利法的本利和為 $10000(1+1\%)^3$。

補充：本金 a，年利率 r，每年計息 t 次，n 年後，複利法的本利和為 $a\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tn}$。

例：本金 $a=10000$（元），年利率 1 %，每 3 個月複利一次（$t=4$），2 年後（$n=2$）複利法的本利和為

$$10000\left(1+\frac{0.01}{4}\right)^{4\times 2}=10000(1+0.0025)^8$$

$$\approx 10201.75878\approx 10202\text{（元）}。$$

例題 1　指數函數基本運算

設 $f(x)=3^x$，試求下列各函數值：

(1) $f(0)$。（2 分）　(2) $f(3)$。（2 分）

(3) $f(-2)$。（3 分）　(4) $f(1-t)$。（3 分）

解 (1) $f(0)=3^0=1$

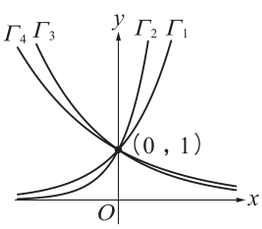
(2) $f(3)=3^3=27$

(3) $f(-2)=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

(4) $f(1-t)=3^{1-t}\left(=\dfrac{3}{3^t}\right)$

例題 2　判斷函數圖形

如右圖，四個曲線分別為指數函數 Γ_1，Γ_2，Γ_3，Γ_4 的圖形，



(1) 已知曲線 Γ_1，Γ_2，Γ_3 分別為函數 $y=3^x$，$y=7^x$，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形，試判斷哪個圖形代表哪個函數？（5 分）

(2) 承(1)，若 Γ_4 是 $y=a^x$ 的圖形，試比較 a 與 $\dfrac{1}{2}$ 的關係。（5 分）

解 (1) 首先，$y=3^x$ 與 $y=7^x$ 的底數都大於 1

因此其圖形愈往右愈陡峭，而 $y=7^x$ 比 $y=3^x$ 更陡峭

因此，Γ_1 是 $y=3^x$ 的圖形，Γ_2 是 $y=7^x$ 的圖形

其次，因為 Γ_3 是底數小於 1 的指數函數圖形，故 Γ_3 是 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的圖形

(2) 觀察圖形可知 Γ_3 比 Γ_4 更陡峭，故 $\dfrac{1}{2}<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$

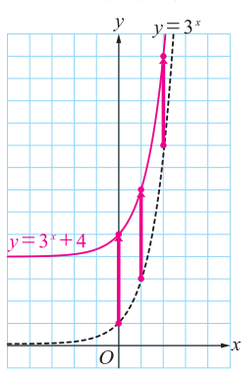
例題 3　指數函數圖形的平移

試利用 $y=3^x$ 的圖形，描繪出下列函數的圖形：

(1) $y=3^x+4$。（5 分）

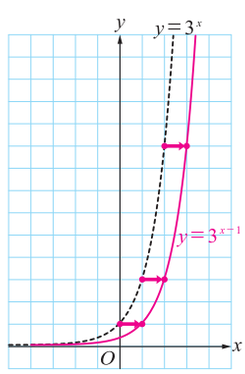
(2) $y=3^{x-1}$。（5 分）

解 (1)



$y=3^x+4$ 的圖形可以由 $y=3^x$ 的圖形向上平移 4 單位而得

(2)



$y=3^{x-1}$ 的圖形可以由 $y=3^x$ 的圖形向右平移 1 單位而得

例題 4　指數方程式

試解下列方程式：

(1) $2^{4x-3}=32$。（5 分）

(2) $4^x-2^{x+2}-32=0$。（5 分）

解 (1) $2^{4x-3}=2^5 \Rightarrow 4x-3=5$

$\Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$

(2) $4^x-2^{x+2}-32=0 \Rightarrow (2^2)^x-2^2\cdot 2^x-32=0$

$\Rightarrow (2^x)^2-4\cdot 2^x-32=0 \Rightarrow (2^x-8)(2^x+4)=0$

$\because 2^x+4\neq 0 \quad \therefore 2^x-8=0$

$\Rightarrow 2^x=8=2^3 \Rightarrow x=3$

例題 5　同底指數的大小關係

(1) 設 $a=5^{\sqrt{3}}$，$b=25^{\sqrt{2}}$，$c=125^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$，試比較 a， b， c 的大小關係。（5 分）

(2) 設 $a=0.09^{\sqrt{2}}$，$b=0.027^2$，$c=0.3^3$，試比較 a，b，c 的大小關係。（5 分）

解 (1) $a=5^{\sqrt{3}}$

$b=25^{\sqrt{2}}=(5^2)^{\sqrt{2}}=5^{2\sqrt{2}}$

$c=125^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(5^3)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=5^{\frac{3}{\sqrt{2}}}=5^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

$\because \sqrt{3}<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<2\sqrt{2}$ 且底數 $5>1 \quad \therefore a<c<b$

(2) $a=0.09^{\sqrt{2}}=[(0.3)^2]^{\sqrt{2}}=0.3^{2\sqrt{2}}$

$b=0.027^2=[(0.3)^3]^2=0.3^6$

$c=0.3^3$

$\because 2\sqrt{2}<3<6$ 且底數 $0<0.3<1 \quad \therefore a>c>b$

例題 6　指數不等式（一）

試解下列各不等式：

(1) $8^{3x-1}>4^{2x+1}$。（5 分）

(2) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-1}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+1}$。（5 分）

解 (1) $8^{3x-1}>4^{2x+1}$

$\Rightarrow (2^3)^{3x-1}>(2^2)^{2x+1}$

$\Rightarrow 2^{9x-3}>2^{4x+2}$

$\because$ 底數 $2>1$

$\therefore 9x-3>4x+2$

$\Rightarrow 5x>5$

$\Rightarrow x>1$

(2) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-1}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+1}$

$\Rightarrow \left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right]^{x-1}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+1}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-2}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x+1}$

$\because$ 底數 $\dfrac{1}{5}<1$

$\therefore 2x-2>3x+1$

$\Rightarrow x<-3$

翰林用心 教師用 精益求精

例題 7　指數不等式(二)

試解下列各不等式：

(1) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3\geq 0$。(5 分)

(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x-4\left(\frac{1}{5}\right)^x-5\leq 0$。(5 分)

解 (1) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3\geq 0$

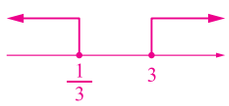
$\Rightarrow 3\cdot(3^x)^2-10\cdot 3^x+3\geq 0$

令 $t=3^x$，上式改寫為

$3t^2-10t+3\geq 0$

$\Rightarrow (3t-1)(t-3)\geq 0$

$\Rightarrow t\leq \frac{1}{3}$ 或 $t\geq 3$



即 $3^x\leq 3^{-1}$ 或 $3^x\geq 3^1$

$\because$ 底數 $3>1$

$\therefore x\leq -1$ 或 $x\geq 1$

(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x-4\left(\frac{1}{5}\right)^x-5\leq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}-4\left(\frac{1}{5}\right)^x-5\leq 0$

$\Rightarrow \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x\right]^2-4\left(\frac{1}{5}\right)^x-5\leq 0$

令 $t=\left(\frac{1}{5}\right)^x$，上式改寫為

$t^2-4t-5\leq 0\Rightarrow (t-5)(t+1)\leq 0$

因為無論 x 為何值，$\left(\frac{1}{5}\right)^x>0$

即 $t>0$，故得 $t+1>0$

將不等式消去 $t+1$ 得 $t-5\leq 0$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x\leq 5$，即 $\left(\frac{1}{5}\right)^x\leq\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

因底數 $0<\frac{1}{5}<1$，故 $x\geq -1$

例題 8　指數函數的應用(一)

大明研究某水生植物多年，發現每經過 1 個月，這種植物覆蓋水面的面積會成為原來的 2 倍。假設大明選定某池塘投入這種植物，3 個月以後面積達 1200 平方公尺，試問：

(1) 再過 2 個月之後，面積變為多少平方公尺？(5 分)

(2) 最初投入的面積為多少平方公尺？(5 分)

解 (1) 再經過 2 個月，面積成為 2^2 倍

$\therefore 1200\times 2^2=4800$(平方公尺)

(2) 設最初投入的面積為 A 平方公尺

則 x 個月以後的面積為

$f(x)=A\cdot 2^x$

$f(3)=A\cdot 2^3=8A=1200$

$\Rightarrow A=150$(平方公尺)

例題 9　指數函數的應用（二）

實驗室裡儲存某種放射性元素 400 克，其質量 m（克）與時間 x（年）的關係式為 $m=f(x)=ka^x$，其中 k、a 為常數。已知此關係式圖形通過（0，400），（2，300），試求：

(1) 關係式 $f(x)=ka^x$ 的 a 值。（5 分）

(2) 8 年後還有多少克？（5 分）

解 (1) 由題意得 $f(0)=ka^0=400$，$f(2)=ka^2=300$

兩式相除 $a^2=\frac{3}{4}$，得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}(\approx 0.8660)$

(2) 由 $f(0)=ka^0=400$ 得 $k=400$

所求為 $f(8)=400\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^8=\frac{2025}{16}$（克）

例題 10　指數在金融上的應用：單利法與複利法

假設銀行的一年期定存利率為 1.2 %，小明打算存入 10 萬元，試分別計算以下三種方案的本利和。（已知 $1.001^{24}\approx 1.024278$）

(1) 單利計算利息，為期 2 年。（2 分）

(2) 每年複利一次，為期 2 年。（四捨五入至整數位）（4 分）

(3) 每個月複利一次，為期 2 年。（四捨五入至整數位）（4 分）

解 (1) 單利計息，為期 2 年，本利和為

$100000(1+2\times 0.012)=102400$（元）

(2) 每年複利一次，為期 2 年，本利和為

$100000(1+0.012)^2=102414.4\approx 102414$（元）

(3) 每個月複利一次，為期 2 年，本利和為

$$100000\left(1+\frac{0.012}{12}\right)^{2\times 12}=100000(1.001)^{24}$$

$$\approx 100000\times 1.024278=102427.8\approx 102428\text{（元）}$$

翰林用心 教師用 精益求精