第 1 章 三角函數

1–1 弧度量

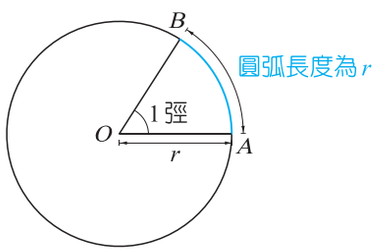
重點整理

一、弧的定義

1. 弧的定義

圓周上，與半徑等長的弧所對應的圓心角稱為 1 弧（radian），又稱 1 弧度。

用「弧」表示角的大小時，可將「弧」省略。



例：$\theta=\frac{4\pi}{3}$ 弧時，可記為 $\theta=\frac{4\pi}{3}$。

若一圓的半徑為 r，則長度為 s 的弧所對應的圓心角 θ 為 $\theta=\frac{s}{r}$ 弧（弧度）。

例：設一圓半徑為 6，則長度為 6 的弧所對應的圓心角 $\theta=\frac{6}{6}=1$ 弧。

例：設一圓半徑為 6，則長度為 9 的弧所對應的圓心角 $\theta=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ 弧。

2. 度與弧的換算

(1) $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 弧。　(2) 1 弧 $=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$。

例：$30^\circ=30\times\frac{\pi}{180}$ 弧 $=\frac{\pi}{6}$ 弧，$140^\circ=140\times\frac{\pi}{180}$ 弧 $=\frac{7\pi}{9}$ 弧。

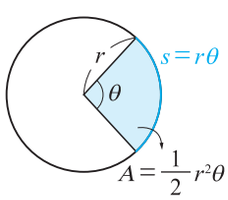
例：$\frac{\pi}{3}$ 弧 $=\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=60^\circ$，2 弧 $=2\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$。

二、扇形的弧長與面積

已知圓半徑為 r，扇形圓心角為 θ 弧，則此扇形的弧長與面積公式如下：

1. 扇形弧長 $s=r\theta$。

2. 扇形面積 $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rs$。



例：一圓半徑 12，扇形圓心角 $\frac{\pi}{3}$ 弧，

則此扇形弧長 $s=12\times\frac{\pi}{3}=4\pi$，面積 $A=\frac{1}{2}\times12^2\times\frac{\pi}{3}=24\pi$。

例：一圓半徑 6，扇形圓心角 2 弧，則此扇形弧長 $s=6\times2=12$，

面積 $A=\frac{1}{2}\times6^2\times2=36$。

例題 1　將角度轉換為弳

將下列的角度轉換為弳：

(1) 120°。（3 分）

(2) 780°。（3 分）

(3) -135°。（4 分）

解

(1) $120\times\frac{\pi}{180}$ 弳 $=\frac{2\pi}{3}$（弳）

(2) $780\times\frac{\pi}{180}$ 弳 $=\frac{13\pi}{3}$（弳）

(3) $-135\times\frac{\pi}{180}$ 弳 $=-\frac{3\pi}{4}$（弳）

例題 2　將弳轉換為角度

將下列的弳轉換為角度：

(1) 6 弳。（3 分）

(2) $\frac{3\pi}{4}$ 弳。（3 分）

(3) $\frac{5\pi}{3}$ 弳。（4 分）

解

(1) $6\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\frac{1080}{\pi}\right)^\circ$

(2) $\frac{3\pi}{4}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=135^\circ$

(3) $\frac{5\pi}{3}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=300^\circ$

翰林用心 教師用 精益求精

例題 3　弧度制的三角比

試求下列各題的三角比：

(1) $\sin\frac{\pi}{3}$。（3 分）　　(2) $\tan\frac{\pi}{4}$。（3 分）

(3) $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$。（4 分）

解　(1) 因 $\frac{\pi}{3}$ 弳 $=60^\circ$，故 $\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 因 $\frac{\pi}{4}$ 弳 $=45^\circ$，故 $\tan\frac{\pi}{4}=\tan 45^\circ=1$

(3) 因 $-\frac{7\pi}{4}$ 弳 $=-315^\circ$，故 $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\cos(-315^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

例題 4　扇形弧長與面積（一）：已知半徑與圓心角求弧長、面積

已知扇形的半徑為 18 公分，圓心角為 72°，試求此扇形的：

(1) 弧長。（5 分）

(2) 面積。（5 分）

解　$72\times\frac{\pi}{180}$ 弳 $=\frac{2\pi}{5}$（弳）

(1) 弧長 $s=18\times\frac{2\pi}{5}=\frac{36\pi}{5}$（公分）

(2) 面積 $A=\frac{1}{2}\times 18^2\times\frac{2\pi}{5}=\frac{324\pi}{5}$（平方公分）

例題 5　扇形弧長與面積（二）：已知弧長與面積求半徑、圓心角

已知扇形的面積為 4，弧長為 4，試求此扇形的：

(1) 半徑。（5 分）

(2) 圓心角（以弳表示）。（5 分）

解　假設扇形半徑為 r，圓心角為 θ

由已知 $\frac{1}{2}r^2\theta=4$，$r\theta=4$

$\therefore\begin{cases}r^2\theta=8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\ r\theta=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$

由 $\frac{①}{②}$ 得 $r=2$，代入②得 $\theta=2$

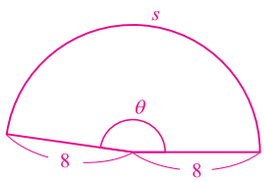
故(1) 半徑為 2；(2) 圓心角為 2 弳

例題 6　扇形弧長與面積（三）：已知半徑與周長求圓心角、面積

已知扇形的半徑為 8 公分，周長為 40 公分，試求此扇形的：

⑴ 圓心角。（5 分）

⑵ 面積。（5 分）



解 假設圓心角為 θ，弧長為 s

由已知，$s = 40 - 8 \times 2 = 24$

⑴ $\theta = \frac{s}{r} = \frac{24}{8} = 3$（弳）

⑵ 面積 $A = \frac{1}{2} \times 8^2 \times 3 = 96$（平方公分）

例題 7　扇形弧長與面積（四）：已知圓心角與面積求半徑、弧長

已知扇形的圓心角為 30°，面積為 3π，試求此扇形的：

⑴ 半徑。（5 分）

⑵ 周長。（5 分）

解 假設扇形半徑為 r，由已知，圓心角為 $\theta = \frac{\pi}{6}$

⑴ 因為面積為 $\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$，得 $r^2 = 36$，故半徑 $r = 6$

⑵ 扇形周長為弧長 + 半徑 × 2

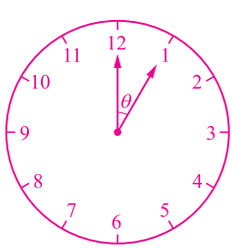
即 $r\theta + 2r = 6\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 \times 6 = 12 + \pi$

例題 8　扇形弧長公式的應用

⑴ 8 點 20 分時，時鐘上的時針與分針所夾的較小角為多少弳？（5 分）

⑵ 假設分針長度為 15 公分，試求 10 點 10 分到 10 點 58 分，分針的針尖在鐘面上走過的路徑長。（5 分）

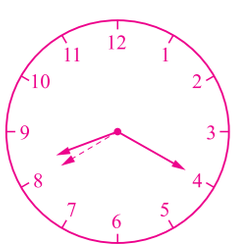
解 如右圖



鐘面上時針或分針從任一數字移到下一個數字

所轉的圓心角 $\theta = 2\pi$ 弳 $\times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$（弳）

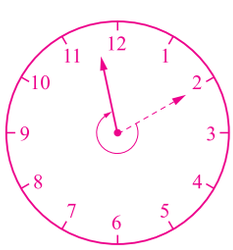
⑴ 如右圖



時針自 8 點到 8 點 20 分轉動的角度為 $\frac{\pi}{6} \times \frac{20}{60} = \frac{\pi}{18}$（弳）

故 8 點 20 分時，時針與分針所夾較小角為 $\frac{\pi}{6} \times 4 + \frac{\pi}{18} = \frac{13\pi}{18}$（弳）

⑵ $58 - 10 = 48$

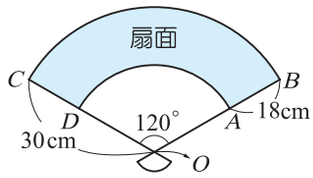


$\therefore$ 分針轉動的圓心角 $\theta = 2\pi \times \frac{48}{60} = \frac{8\pi}{5}$

$\therefore$ 分針走過路徑長為 $15 \times \left(\frac{8\pi}{5}\right) = 24\pi$（公分）

例題 9 扇形面積公式的應用（一）

如右圖，此摺扇完全打開時，圓心角為 120°，試求扇面的面積。（10 分）



解

$120\times\frac{\pi}{180}$ 弳 $=\frac{2\pi}{3}$（弳）

$\overline{OA}=30-18=12$

所求為扇形 BOC 面積 − 扇形 AOD 面積

$$=\frac{1}{2}\times 30^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 12^2\times\frac{2\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times(30^2-12^2)$$

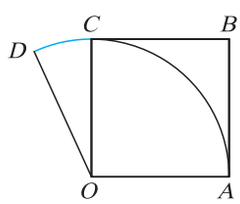
$=252\pi$（平方公分）

例題 10 扇形面積公式的應用（二）

以正方形 $OABC$ 的 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑，作弧 $\overset{\frown}{ACD}$。已知正方形 $OABC$ 面積為 36，$\overset{\frown}{ACD}$ 弧長為 12，試求：

⑴ $\overset{\frown}{CD}$ 弧長。（5 分）

⑵ 扇形 COD 面積。（5 分）



解 假設扇形半徑為 r

$\because r=\overline{OA}\quad\therefore r^2=36$

得 $r=6$

$\therefore\angle AOD=\frac{12}{6}=2$（弳）

⑴ $\overset{\frown}{CD}$ 弧長為 $6\times\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=12-3\pi$

⑵ 扇形 COD 面積為 $\frac{1}{2}\times 6\times(12-3\pi)=36-9\pi$