4–2 矩陣的運算

重點整理

一、矩陣的定義

1. 矩陣：

設 m，n 為正整數，形如底下的矩形陣列稱為矩陣（matrix）。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

此矩陣有 m 列 n 行，稱為 $m\times n$ 階矩陣，可以用$[a_{ij}]_{m\times n}$表示，其中 a_{ij} 為第 i 列第 j 行交叉位置的元，稱為矩陣的第(i,j)元。

例：矩陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 11 & 1 \\ 12 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，它有 4 列 3 行，我們稱 A 是一個 4×3 階矩陣。

以$[a_{ij}]_{4\times 3}$表示這個矩陣，即 $A=[a_{ij}]_{4\times 3}$，其中 a_{ij} 代表 A 的元，

例如：$a_{23}=1$，$a_{42}=4$，即第$(2,3)$元為 1，第$(4,2)$元為 4。

2. 列向量與行向量：

(1) 列向量（row vector）：$1\times n$ 階的矩陣，例如：$[2\quad 5]$，$[3\quad -1\quad 4]$。

(2) 行向量（column vector）：$m\times 1$ 階的矩陣，例如：$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$。

3. 矩陣的相等：

兩個矩陣的階數相同，且對應位置的元都彼此相等，則稱這兩個矩陣相等。

例：假設矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & 5 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & d & -1 \\ e & 4 & f \end{bmatrix}$，且 $A=B$。則

$a=3$，$b=-1$，$c=4$，$d=1$，$e=2$，$f=5$。

4. 零矩陣與單位方陣：

(1) 零矩陣：若 $m\times n$ 階矩陣的每一個元都是 0，稱為零矩陣，記為 $O_{m\times n}$。

例：$O_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

特別地，n 階零方陣可以用 O_n 簡記，如 $O_{2\times 2}=O_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

(2) 單位方陣：n 階方陣的主對角線元都是 1，其他位置都是 0，稱為 n 階單位方陣，記為 I_n。

例：$I_1=[1]$，$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。

二、矩陣的加法與減法

階數相同的矩陣可以做加法或減法運算，只要將相同位置的元相加或相減即可。

1. (1) 矩陣的加法：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$。

例：$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\\2&4\end{bmatrix}$，則 $A+B=\begin{bmatrix}3+3&4+1\\2+6&5+0\\1+2&2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5\\8&5\\3&6\end{bmatrix}$。

(2) 加法反矩陣：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，則 $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$ 稱為 A 的加法反矩陣。

例：$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&2\end{bmatrix}$，則 $-A=\begin{bmatrix}-3&-4\\-2&-5\\-1&-2\end{bmatrix}$。

$-A$ 稱為 A 的加法反矩陣。顯然，$A+(-A)=O$，

也就是說，任何矩陣 A 與其加法反矩陣 $-A$ 相加，其結果必為零矩陣。

2. 矩陣的減法：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$。

例：$A=\begin{bmatrix}3&4\\2&5\\1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\\2&4\end{bmatrix}$，則 $A-B=\begin{bmatrix}3-3&4-1\\2-6&5-0\\1-2&2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\-4&5\\-1&-2\end{bmatrix}$。

三、矩陣的係數積

將矩陣 $A+A$ 記為 $2A$，得知 $2A$ 的每一個元都是 A 相同位置元的 2 倍。同理，rA 的每個元都是 A 相同位置元的 r 倍。類似 rA 這種運算，稱為矩陣的係數積。

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，r 是實數，則 $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$。

例：$A=\begin{bmatrix}7&2&1\\2&3&5\end{bmatrix}$，則 $3A=\begin{bmatrix}3\times7&3\times2&3\times1\\3\times2&3\times3&3\times5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&6&3\\6&9&15\end{bmatrix}$。

四、矩陣的乘法

1. 矩陣的乘法：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 $C=AB$ 是一個 $m\times p$ 階矩陣，即 $C=[c_{ij}]_{m\times p}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nj}$。

注意：矩陣 A 的行數＝矩陣 B 的列數＝n，A，B 才能相乘(也就是 AB 有意義)。

例：$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\\5&1\end{bmatrix}$，

則 $AB=\begin{bmatrix}3\times1+1\times2+0\times5&3\times0+1\times3+0\times1\\2\times1+4\times2+1\times5&2\times0+4\times3+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3\\15&13\end{bmatrix}$。

請注意，A 是 2×3 階矩陣，B 是 3×2 階矩陣，AB 是 2×2 階矩陣。

2. 矩陣乘法注意事項：

(1) 當 AB 有意義時，BA 不一定有意義。

(2) 就算 AB 與 BA 都有意義，AB 也不一定等於 BA。

(3) $AB=O$ 時，A、B 不一定至少有一個零矩陣（可能 A、B 都不是零矩陣）。

(4) $AB=AC$ 時，不一定 $B=C$。

3. 矩陣乘法的性質：

假設以下的矩陣乘法都有意義，矩陣乘法具有下列性質：

(1) 結合律：$(AB)C=A(BC)$。

(2) 左分配律：$A(B+C)=AB+AC$。

(3) 右分配律：$(A+B)C=AC+BC$。

(4) 係數積有結合律：$r(AB)=(rA)B=A(rB)$，其中 r 為實數。

規定：當 A 為方陣時，則 $A^k=\underbrace{AA\cdots\cdots A}_{k\text{ 個}}$ 表示 A 自乘 k 次的乘積。

4. 單位方陣的特性：

令 I_m、I_n 分別表示 m、n 階單位方陣，A 為一矩陣。

(1) 若 A 是 $m\times n$ 階矩陣，則 $AI_n=A$，$I_mA=A$。

例：$A=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}$ 是 2×3 階矩陣，則

$AI_3=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}$，且

$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&4&1\end{bmatrix}$。

(2) 若 A 是 n 階方陣，則 $AI_n=I_nA=A$。

例：$A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$ 是 2×2 階方陣，則 $AI_2=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$，

且 $I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$。

五、二階方陣的乘法反方陣

1. 方陣的乘法反方陣：

(1) 乘法反方陣的意義：

設 A 是一個 n 階方陣，若存在 n 階方陣 B 滿足 $AB=BA=I_n$，則稱 B 是 A 的乘法反方陣，以 A^{-1} 表示。

例：$A=\begin{bmatrix}1&3\\-2&-5\end{bmatrix}$ 是二階方陣，$B=\begin{bmatrix}-5&-3\\2&1\end{bmatrix}$，則因為

$AB=\begin{bmatrix}1&3\\-2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，且

$BA=\begin{bmatrix}-5&-3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-2&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，我們說 B 是 A 的乘法反方陣，

記為 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5&-3\\2&1\end{bmatrix}$。

(2) 二階乘法反方陣的求法：

已知 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，定義 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。

若 $\det(A)\neq 0$，則 A 有乘法反方陣 A^{-1}，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。

（a、d 交換位置，b、c 留在原來位置但變號一次）

若 $\det(A)=0$，則 A 沒有乘法反方陣。

例：$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ 是二階方陣，$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=8-7=1$，

則 $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$。

2. 用乘法反方陣求解線性方程組：

二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，令 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$，

則方程組可寫成 $AX=B$，等號兩邊的左端同時乘以 A^{-1}，我們有 $X=A^{-1}B$。

例：將二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+\ \ y=2 \\ 5x+3y=4 \end{cases}$ 寫為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，令 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$，

因為 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$，我們有 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，

即 $x=2$，$y=-2$。

例題 1　矩陣基本概念

(1) 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，試寫出：

① 矩陣 A 的階數。（2 分）

② A 的第 $(2,3)$ 元。（2 分）

(2) 已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$，其中 $a_{ij}=3i+j$，試求矩陣 A。（6 分）

解 (1) ① A 是 3×3 階矩陣，也是三階方陣

② A 的第 $(2,3)$ 元為 5

(2) $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ 是一個 3 列 2 行的矩陣，有 6 個元

其中第 i 列，第 j 行的元 (a_{ij}) 定義為 $a_{ij}=3i+j$

所以 $a_{11}=3\times 1+1=4$，$a_{12}=3\times 1+2=5$

$a_{21}=3\times 2+1=7$，$a_{22}=3\times 2+2=8$

$a_{31}=3\times 3+1=10$，$a_{32}=3\times 3+2=11$

故得 $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

例題 2 矩陣的相等

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & a\\ b & 2\\ c & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}s & 6\\ 1 & t\\ 5 & u\end{bmatrix}$，且 $A=B$，試求 a、b、c、s、t、u。（各 1 分）

解 $A=B$，故對應位置的元相等

$a=6$，$b=1$，$c=5$，$s=3$，$t=2$，$u=4$

例題 3 矩陣的加減法與係數積

(1) 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\ 4 & -3 & 6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$，試求：

① $A+B$。（4 分）

② $A-B$。（4 分）

(2) 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，試求：

① $2A-B$。（4 分）

② $3A+B-C$。（4 分）

解 (1) ① $A+B=\begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\ 5 & -3 & 10\end{bmatrix}$

② $A-B=\begin{bmatrix}3 & 3 & -2\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$

(2) ① $2A-B=\begin{bmatrix}8 & -6\\ 4 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -12\\ 7 & 9\end{bmatrix}$

② $3A+B-C=\begin{bmatrix}12 & -9\\ 6 & 21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -4\\ 1 & 23\end{bmatrix}$

例題 4 矩陣方程式

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，且 $2X+A=3B$，試求矩陣 X。（10 分）

解 $2X=3B-A=\begin{bmatrix}9 & 12\\ 6 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 8\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

例題 5　矩陣的乘法

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\3 & 7 & 6\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$，試求：

⑴ AB。（4 分）

⑵ AC。（4 分）

解　⑴ $AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\3 & 7 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 18 & 16\\21 & 47 & 42\end{bmatrix}$

⑵ $AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\7 & 21\end{bmatrix}$

例題 6　二階方陣的乘法反方陣

已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}8 & 5\\3 & 2\end{bmatrix}$，試問：

⑴ A 是否有乘法反方陣 A^{-1}。（5 分）

⑵ 若 A^{-1} 存在，試求 A^{-1}。（5 分）

解　⑴ $\det(A)=\begin{vmatrix}8 & 5\\3 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$

$\therefore A$ 有乘法反方陣

⑵ $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & -5\\-3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\-3 & 8\end{bmatrix}$

例題 7　用二階反方陣求解二元一次方程組

已知二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-\ \ y=4 \end{cases}$，試求：

(1) 將方程組寫成 $AX=B$ 的形式。(5 分)

(2) 用 A 的反方陣 A^{-1} 解方程組。(5 分)

解 (1) 令 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

承(1)，$X=A^{-1}B \Rightarrow X=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

故 $x=3$，$y=-1$

例題 8　矩陣方程式

試解矩陣方程式 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$。(10 分)

解 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

例題 9　乘法反方陣不存在的條件

試求 k 值使得二階方陣 $A=\begin{bmatrix}k+4 & 7\\ -2 & k-5\end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在。（10 分）

解 二階方陣存在乘法反方陣的條件是它的行列式值不為 0

令行列式值等於 0，即 $\det(A)=\begin{vmatrix}k+4 & 7\\ -2 & k-5\end{vmatrix}=(k+4)(k-5)+14=0$

展開得 $k^2-k-20+14=0 \Rightarrow k^2-k-6=0 \Rightarrow (k+2)(k-3)=0$

故得 $k=-2$ 或 3

例題 10　矩陣的乘方

已知二階方陣 A 滿足 $A^3=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -6 & 7\end{bmatrix}$，且 $A^5=\begin{bmatrix}-9 & 10\\ -10 & 11\end{bmatrix}$，試求：

(1) A^2。（5 分）

(2) A。（5 分）

解 (1) 因為 $A^2A^3=A^5$，所以 $A^2=A^5(A^3)^{-1}$

$(A^3)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}7 & -6\\ 6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\ 6 & -5\end{bmatrix}$

故得 $A^2=\begin{bmatrix}-9 & 10\\ -10 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -6\\ 6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -4 & 5\end{bmatrix}$

(2) 因為 $AA^2=A^3$，所以 $A=A^3(A^2)^{-1}$

$(A^2)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

故得 $A=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ -6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$