第2章 綜合演練

月　日

得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 已知坐標空間中兩條直線 $L_1：\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-3}$，$L_2：\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$，則 L_1 與 L_2 的關係為下列何者？

(A)重合　(B)平行　(C)相交於一點　(D)歪斜　(E)無法判斷

解　分別將 L_1、L_2 用參數式表示

$\begin{cases} x=-5+2t \\ y=1+t \\ z=-3t \end{cases}$，$t$ 為實數，$\begin{cases} x=3+2s \\ y=s \\ z=-2-3s \end{cases}$，$s$ 為實數

令 $\begin{cases} -5+2t=3+2s \\ 1+t=s \\ -3t=-2-3s \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} 2t-2s=8 \cdots\cdots① \\ t-s=-1 \cdots\cdots② \\ 3t-3s=2 \cdots\cdots③ \end{cases}$

由① − ② × 2 得 $0=10$，不合理

$\therefore L_1$，L_2 無交點

又 L_1，L_2 的方向向量都是 $(2，1，-3)$

$\therefore L_1 // L_2$

故選(B)

2. 已知平面 E 方程式為 $2x+3y-z=6$，直線 $L：\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{5}$，則直線 L 與平面 E 的關係為下列何者？

(A)相交於一點且垂直　(B)相交於一點但不垂直　(C)平行　(D)直線 L 落在平面 E 上　(E)無法判斷

解　設直線 L 上的點為 $(2+t，1+t，1+5t)$

代入 E 的方程式得 $2(2+t)+3(1+t)-(1+5t)=6$

$\Rightarrow 0t=0$

故可知 t 有無限多解

即 L 落在平面 E 上

故選(D)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 空間中一直線 $L:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$，試問下列各平面中，哪些與直線 L 平行？

(A) $E_1:2x-3y+z-2=0$
(B) $E_2:2x-3y+z=0$
(C) $E_3:2x+2y+2z+3=0$
(D) $E_4:x+y+z+3=0$
(E) $E_5:x+y+z=0$

解 設直線 L 上的點 $(-1+2t,-2-3t,3+t)$ 分別代入 $E_1\sim E_5$

(A) ×：$2(-1+2t)-3(-2-3t)+(3+t)-2=0\Rightarrow 14t=-5\Rightarrow t=-\dfrac{5}{14}$

故 t 有一解　∴ L 與 E_1 交於一點

(B) ×：$2(-1+2t)-3(-2-3t)+(3+t)=0\Rightarrow 14t=-7\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

故 t 有一解　∴ L 與 E_2 交於一點

(C) ○：$2(-1+2t)+2(-2-3t)+2(3+t)+3=0\Rightarrow 0t=-3$

故 t 無解　∴ $L\,//\,E_3$

(D) ○：$(-1+2t)+(-2-3t)+(3+t)+3=0\Rightarrow 0t=-3$

故 t 無解　∴ $L\,//\,E_4$

(E) ×：$(-1+2t)+(-2-3t)+(3+t)=0\Rightarrow 0t=0$

故 t 有無限多解　∴ L 落在平面 E_5 上

故選(C)(D)

4. 坐標空間中，下列哪些選項的圖形是一條直線？

(A) $x+3y-2z=1$
(B) $3x+2y=7$
(C) $x-3=y=z-1$
(D) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=1$
(E) $\begin{cases}x=2t\\y=3+t\\z=5\end{cases}$，$t$ 為實數

解 (A) ×：圖形為一平面

(B) ×：圖形為一平面

(C) ○：$x-3=y=z-1$

即 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

為一條直線

(D) ×：此為平面截距式

同乘以 60 得 $12x+15y+20z=60$

移項得 $12x+15y+20z-60=0$

(E) ○：$\begin{cases}x=0+2t\\y=3+t\\z=5+0t\end{cases}$，$t$ 為實數

是一條直線

故選(C)(E)

第 2 章綜合演練

翰林用心教師用精益求精

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. (1) 坐標空間中，點 $P(2，1，k)$ 在平面 $E：3x+y-2z+1=0$ 上，則 $k=$________。

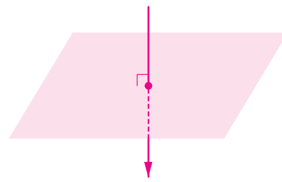
(2) 已知空間中兩點 $A(3，4，-3)$，$B(5，2，1)$，則過 $\overline{AB}$ 中點且垂直 $\overline{AB}$ 的平面方程式為________。

解 (1) 將點 $P(2，1，k)$ 代入 E 得 $6+1-2k+1=0$

$\Rightarrow 2k=8$

$\Rightarrow k=4$

(2) $\overline{AB}$ 中點為 $\left(\dfrac{3+5}{2}，\dfrac{4+2}{2}，\dfrac{-3+1}{2}\right)=(4，3，-1)$



又 $\overrightarrow{AB}=(2，-2，4)$

取法向量 $\vec{n}=(1，-1，2)$

令所求為 $x-y+2z+d=0$

將 $(4，3，-1)$ 代入得 $4-3-2+d=0$

$\Rightarrow d=1$

故所求為 $x-y+2z+1=0$

6. (1) 坐標空間中兩點 $A(2，-1，4)$，$B(a，3，2)$，平面 $E：x+y-2z+3=0$，已知 A 到平面 E 的距離等於 B 到平面 E 的距離，且 $a>0$，則 $a=$________。

(2) 坐標空間中，平面 $E_1：x+y+2z=3$，$E_2：x+ky-z=1$，已知 $E_1 \perp E_2$，則 $k=$________。

解 (1) 由已知 $\dfrac{|2-1-8+3|}{\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{|a+3-4+3|}{\sqrt{1+1+4}}$

$\Rightarrow |a+2|=4$

$\Rightarrow a+2=\pm 4$

$\Rightarrow a=2$ 或 -6

$\because a>0 \quad \therefore a=2$

(2) 取 $\overrightarrow{n_1}=(1，1，2)$，$\overrightarrow{n_2}=(1，k，-1)$

$\because E_1 \perp E_2 \quad \therefore \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

得 $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}=0$，即 $1+k-2=0$

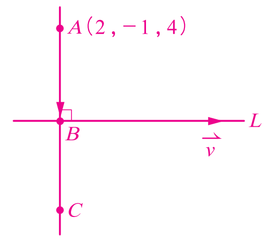
$\therefore k=1$

7. 已知坐標空間中，點 $A(2,-1,4)$，直線 $L:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$，試求：

(1) A 點關於直線 L 的對稱點坐標為________。

(2) A 點與直線 L 所決定的平面 E 方程式為________。

解 (1) 作示意圖如右



過 A 點作垂直線交直線 L 於 B

則 B 點坐標可寫為 $(5+2t,2+2t,-2-t)$

$\overrightarrow{AB}=(3+2t,3+2t,-6-t)$

取 L 的方向向量 $\vec{v}=(2,2,-1)$

因為 $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0$，即 $6+4t+6+4t+6+t=0$

$\Rightarrow 9t=-18\Rightarrow t=-2\quad\therefore B(1,-2,0)$

設點 A 關於直線 L 的對稱點為 $C(a,b,c)$

$\because B$ 為 $\overline{AC}$ 中點 $\quad\therefore(1,-2,0)=\left(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{b-1}{2},\dfrac{c+4}{2}\right)$

解得 $(a,b,c)=(0,-3,-4)$

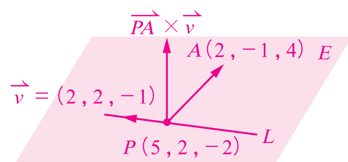
(2) 取 L 上一點 $P(5,2,-2)$，又 $\overrightarrow{PA}=(-3,-3,6)$，$\vec{v}=(2,2,-1)$

$\overrightarrow{PA}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-3&6\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&-3\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&-3\\2&2\end{vmatrix}\right)=(-9,9,0)$

取法向量 $\vec{n}=(1,-1,0)$，令所求為 $x-y+d=0$

將 $(5,2,-2)$ 代入得 $5-2+d=0\Rightarrow d=-3$

故所求為 $x-y-3=0$

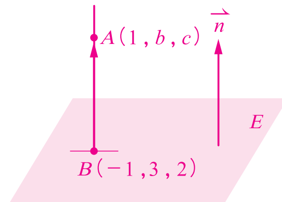


8. 坐標空間中，

(1) 點 $A(1，b，c)$在平面 $E：x+2y-3z+1=0$ 的正射影點為 $B(-1，3，2)$，則數對 $(b，c)=$ ________。

(2) 點 $P(1，3，1)$在平面 E 的正射影點為 $Q(-1，1，2)$，則平面 E 方程式為 ________。

解 (1) 作示意圖如右



取 E 的法向量 $\vec{n}=(1，2，-3)$

又 $\overrightarrow{BA}=(2，b-3，c-2)$

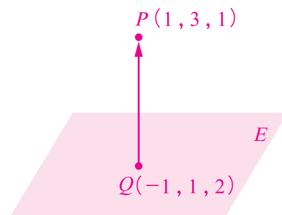
由已知得 $\overrightarrow{BA}\,/\!/\,\vec{n}$

$\therefore \dfrac{2}{1}=\dfrac{b-3}{2}=\dfrac{c-2}{-3}$

解得 $b-3=4 \Rightarrow b=7$，$c-2=-6 \Rightarrow c=-4$

故數對$(b，c)=(7，-4)$

(2) 作示意圖如右



$\overrightarrow{QP}=(2，2，-1)$可為平面 E 的法向量

令所求為 $2x+2y-z+d=0$

將$(-1，1，2)$代入得 $-2+2-2+d=0$

$\Rightarrow d=2$

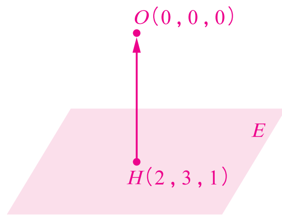
故所求為 $2x+2y-z+2=0$

9. 試求滿足下列條件的平面方程式：

(1) 原點 $O(0,0,0)$在平面 E 的正射影點為 $H(2,3,1)$。**答**：________。

(2) 過點 $P(3,1,2)$且與直線 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ 垂直。**答**：________。

解 (1) 作示意圖如右



$\overrightarrow{HO}=(-2,-3,-1)$

取 E 的法向量 $\vec{n}=(2,3,1)$

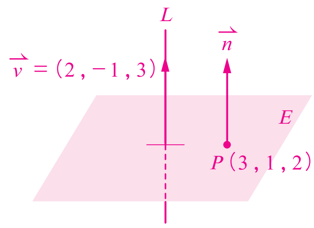
令所求為 $2x+3y+z+d=0$

將$(2,3,1)$代入得 $4+9+1+d=0$

$\Rightarrow d=-14$

故所求為 $2x+3y+z-14=0$

(2) 作示意圖如右



直線的方向向量$(2,-1,3)$可以是平面的法向量

$\therefore$取法向量 $\vec{n}=(2,-1,3)$

令所求為 $2x-y+3z+d=0$

將 $P(3,1,2)$代入得 $6-1+6+d=0$

$\Rightarrow d=-11$

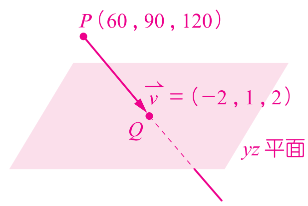
故所求為 $2x-y+3z-11=0$

10. 坐標空間中，一質點在 $P(60,90,120)$的位置沿向量 $\vec{v}=(-2,1,2)$的方向，以每秒 6 單位的速度前進，試求：

(1) 質點接觸到 yz 平面的 Q 點時，坐標為________。

(2) 從 P 點移動到 Q 點共需________秒的時間。

解 作示意圖如右



(1) 由已知得直線 PQ 參數式為 $\begin{cases} x=60-2t \\ y=90+t \\ z=120+2t \end{cases}$，$t$ 為實數

因為 yz 平面方程式為 $x=0$

代入得 $60-2t=0 \Rightarrow t=30$

故得 Q 點坐標為$(0,120,180)$

(2) $\overline{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(0-60)^2+(120-90)^2+(180-120)^2}$

$=\sqrt{(-60)^2+30^2+60^2}=\sqrt{8100}=90$

$\Rightarrow 90\div 6=15$(秒)

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. (1) 已知直線 L 的兩面式 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+3z-5=0 \end{cases}$，試求 L 的方向向量 $\vec{v}$。（5 分）

(2) 承(1)，已知平面 E 垂直 L 且過點 $A(1,2,3)$，試求 E 的方程式。（5 分）

解 (1) 取 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,1,3)$

$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(2,-1,-1)$

故 L 的方向向量可為 $\vec{v}=(2,-1,-1)$

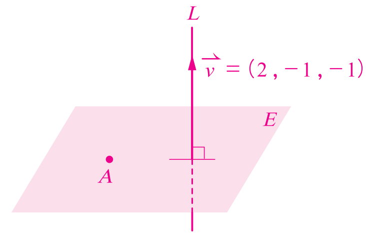
(2) 取直線 L 的方向向量 $\vec{v}=(2,-1,-1)$ 為平面 E 的法向量

令所求為 $2x-y-z+d=0$

將 $(1,2,3)$ 代入得 $2-2-3+d=0$

$\Rightarrow d=3$

故所求為 $2x-y-z+3=0$



12. 坐標空間中，原點 $O(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,-2,0)$，$C(0,0,4)$，試求：

(1) 過 A，B，C 三點的平面 E 方程式。（5 分）

(2) 原點 O 到平面 E 的距離。（5 分）

解

(1) 由平面的截距式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{4}=1$

同乘以 4 得 $2x-2y+z=4$

移項得 $2x-2y+z-4=0$

(2) 由點到平面距離公式得 $\dfrac{|0-0+0-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{4}{3}$