

1-4 外積、體積與行列式

重點整理

一、空間向量的外積

空間向量的外積源於物理學的力矩 (torque)，力矩是一個向量，用來描述槓桿所造成的轉動效果，底下先從數學的角度看外積。

1. 設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積為

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

$$\text{或 } \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

(符號 “ $\times$ ” 讀作 cross)

例： $\vec{a} = (2, 5, -3)$ ， $\vec{b} = (3, 2, 4)$ ，

$$\text{則 } \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (26, -17, -11).$$

2. 外積的基本性質：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 是空間中的非零向量，則：

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 同時垂直 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 。

例： $\vec{a} = (2, 2, -1)$ ， $\vec{b} = (2, 3, 1)$ ，則

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (5, -4, 2),$$

用內積檢驗 $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 10 - 8 - 2 = 0$ ， $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 10 - 12 + 2 = 0$ ，
故知 $\vec{a} \times \vec{b}$ 同時垂直 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 。

- (2) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ 。

例： $\vec{a} = (1, 0, -3)$ ， $\vec{b} = (-2, 2, 1)$ ，

$$\text{則 } \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6, 5, 2),$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-6, -5, -2)$$

故知 $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ， $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ 。

- (3) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 時， $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ 。

例： $\vec{a} = (6, 2, 4)$ ， $\vec{b} = (3, 1, 2)$ ，顯然 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

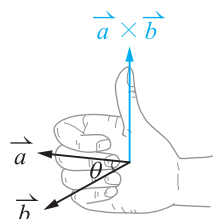
$$\text{且 } \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0) = \vec{0}.$$

- (4) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ ，其中 θ 為 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夾角。

說明：在不使用單位的情形下， $\vec{a} \times \vec{b}$ 的長度 = $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積。

3. $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向：

$\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向由「右手法則」決定，將右手放在 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 決定的平面上，若四指彎曲的方向是由 $\vec{a}$ 旋轉到 $\vec{b}$ ，則豎起的大姆指方向即是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的方向。



二、三階行列式的定義

三階行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1。$$

例： $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-1) + (-1) \times 2 \times 3 + 3 \times 1 \times 2 - 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 - (-1) \times 1 \times (-1)$

$$= -6 - 6 + 6 - 27 - 8 - 1 = -42。$$

三、三階行列式的應用

1. 平行六面體體積：

空間中三個不共平面的非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, 則 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所決定的平行六面體體積為

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|, \text{ 其中 } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \text{ 稱為 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 的三重積。}$$

例：已知空間中三向量 $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$, $\vec{c} = (2, 1, 3)$, 則 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 所決定的平行六面體體積為

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = |18 + 12 + 1 - 6 - 9 - 4| = 12。$$

2. 空間中三向量共平面：

空間中三向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 共平面的充

要條件是三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0。$

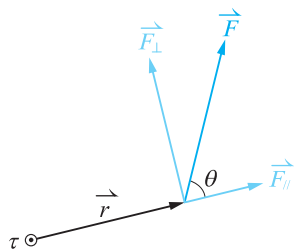
例：空間中三向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$, $\vec{c} = (3, -1, 5)$, 因為 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $\vec{a} \times \vec{c}$, 三向量共平面, 故行列式值為 0。

另一方面, 由 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 36 - 6 - 36 - 20 + 6 = 0,$

知此三向量共平面。

3. 力矩：

力矩是一個向量, 用來描述槓桿所造成的轉動效果, 如右圖, 離槓桿支點 $\vec{r}$ 處施力 $\vec{F}$, 若 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ 夾角為 θ , 則造成的力矩為 $\vec{r} \times \vec{F}$, 若 $\vec{r}$ 的單位為米, $\vec{F}$ 的單位為牛頓, 則 $|\vec{r} \times \vec{F}|$ 的單位為牛頓·米。



例題 1 空間向量的外積

已知空間中向量 $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, 3)$, 試求：

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ 。(5 分)
- (2) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 。(5 分)

解 (1) $\vec{a} \times \vec{b}$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ = (-2, -7, 1)$$

$$(2) |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 49 + 1} \\ = \sqrt{54} \\ = 3\sqrt{6}$$

例題 2 兩向量所張成的平行四邊形面積

已知空間中三點 $A(3, -1, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(2, -1, 3)$ 。試求：

- (1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張成的平行四邊形面積。(5 分)
- (2) $\triangle ABC$ 面積。(5 分)

解 $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ = (6, 2, 3)$$

$$(1) \overrightarrow{AB} \text{ 與 } \overrightarrow{AC} \text{ 所張成的平行四邊形面積為 } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$$

$$(2) \triangle ABC \text{ 面積為 } \frac{7}{2}$$

例題 3 公垂向量及其單位向量

已知空間中兩向量 $\vec{a} = (4, 1, -1)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ 。試求：

- (1) 與 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同時垂直的單位向量。(5 分)
- (2) 與 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同時垂直且長度為 3 的向量。(5 分)

解

$$(1) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ = (3, -6, 6)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$$

$$\therefore \text{所求單位向量為 } \pm \frac{1}{9}(3, -6, 6) = \pm \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\text{即 } \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \text{ 或 } \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

- (2) 將(1)的結果乘以 3 即可

$$\therefore \text{所求為 } 3 \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \text{ 或 } 3 \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$\text{即 } (1, -2, 2) \text{ 或 } (-1, 2, -2)$$

例題 4 三階行列式求值

試求下列行列式的值：

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \circ (5 \text{ 分})$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \circ (5 \text{ 分})$$

解

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 12 + 1 - 12 - 4 - 9 + 4 \\ = -8$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ = -9 + 0 + 6 + 12 - 0 - 0 \\ = 9$$

例題 5 用向量的三重積求體積

已知空間中三向量 $\vec{a}=(2, 3, -1)$, $\vec{b}=(1, -2, 3)$, $\vec{c}=(4, -1, 3)$ 。試求：

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量所決定的平行六面體體積。(5 分)

(2) 假設 $\vec{d}=(3, 1, k)$, 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ 所決定的平行六面體體積為 28, 試求 k 值。(5 分)

解

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = |-12 + 36 + 1 - 8 - 9 + 6| = 14$$

$$(2) \quad \text{由題意知} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix} = 28$$

$$\Rightarrow |-4k + 27 - 1 - 6 - 3k - 6| = 28$$

$$\Rightarrow |-7k + 14| = 28$$

$$\Rightarrow -7k + 14 = \pm 28$$

$$\Rightarrow -7k = 14 \text{ 或 } -42$$

$$\therefore k = -2 \text{ 或 } 6$$

例題 6 向量三重積的應用(四點共平面)

已知坐標空間中四點 $A(1, 3, -2)$, $B(2, -2, 1)$, $C(3, 1, 2)$, $D(6, 2, k)$ 共平面, 試求 k 值。(10 分)

解 取 $\overrightarrow{AB}=(1, -5, 3)$, $\overrightarrow{AC}=(2, -2, 4)$, $\overrightarrow{AD}=(5, -1, k+2)$

$\because A, B, C, D$ 共平面

$\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 共平面

$$\text{因此} \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & k+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{展開得} -2k - 4 - 100 - 6 + 30 + 10k + 20 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 8k = 56 \Rightarrow k = 7$$

例題 7 空間向量外積的應用

若坐標空間中有兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$, 已知 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 7, 4)$, 試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張成的平行四邊形面積。(5 分)

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=3$, 試求 $\cos \angle BAC$ 。(5 分)

解 (1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張成的平行四邊形面積為

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(4, 7, 4)| = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9$$

(2) 由外積定義, $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC = 5 \times 3 \times \sin \angle BAC = 9$

$$\text{解得} \sin \angle BAC = \frac{3}{5}$$

$$\text{故由平方關係得} \cos \angle BAC = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \frac{4}{5}$$

例題 8 空間向量內積與外積的關係

已知坐標空間中 $|\vec{a}| = 5$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ ，試求 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積。
(10 分)

解 設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夾角為 θ

$$\text{由內積定義 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \text{ 可得 } \cos \theta = \frac{6}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{由平方關係可得 } \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ (因為 } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{)}$$

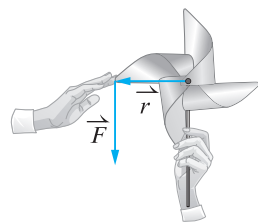
$$\text{故所求為 } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 5 \times 2 \times \frac{4}{5} = 8$$

例題 9 力矩的計算(一)

在距離風車中心 $\vec{r}$ 處施以 $\vec{F}$ 的力，已知 $\vec{r}$ 與 $\vec{F}$ 夾角為 90° ，且 $|\vec{r}| = 0.2$ (米)， $|\vec{F}| = 1.2$ (牛頓)，試求所造成的力矩大小為多少牛頓·米。
(10 分)

解 由已知可得力矩大小為

$$\begin{aligned} |\vec{r}| |\vec{F}| \sin 90^\circ &= 0.2 \times 1.2 \times 1 \\ &= 0.24 \text{ (牛頓·米)} \end{aligned}$$



例題 10 力矩的計算(二)

一物體在距離原點 $\vec{r}$ 處受力 $\vec{F}$ 的作用，已知 $\vec{r} = (-3, 4, 0)$ ， $\vec{F} = (4, 3, 0)$ ，試求該力對原點所產生的力矩。(10 分)

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= (0, 0, -25) \end{aligned}$$