第 1 章 綜合演練　月　日　得分

一、單選題(每題 5 分，共 10 分)

1. 坐標空間中，下列哪一點與 xy 平面距離最遠?

(A)(1，2，−2)　(B)(2，−3，6)　(C)(4，2，−4)
(D)(4，7，4)　(E)(12，4，3)

解 取各點 z 坐標的絕對值比較

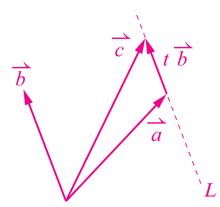
(A) $|-2|=2$
(B) $|6|=6$
(C) $|-4|=4$
(D) $|4|=4$
(E) $|3|=3$

故選(B)

2. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是空間中兩個不平行的非零向量，t 是任意實數，若 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，則 $\vec{c}$ 的終點所成的圖形為下列何者？

(A)一個平行四邊形　(B)一點　(C)一線段
(D)一直線　(E)一平面

解 作示意圖如右
$\vec{c}$ 的終點在直線 L 上
故選(D)



二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 關於空間中直線與平面的關係，請選出正確的選項。

(A)若相異平面 E_1，E_2 分別與直線 L 垂直，則 E_1，E_2 必平行

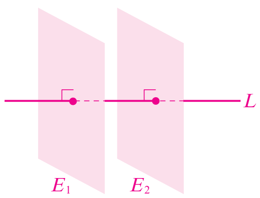
(B)若相異平面 E_1，E_2 分別與直線 L 平行，則 E_1，E_2 必平行

(C)若相異直線 L_1，L_2 分別與平面 E 垂直，則 L_1，L_2 必平行

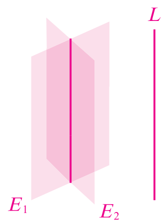
(D)若相異直線 L_1，L_2 分別與平面 E 平行，則 L_1，L_2 必平行

(E)若相異直線 L_1，L_2 分別與直線 L 垂直，則 L_1，L_2 必平行

解 (A) ○：

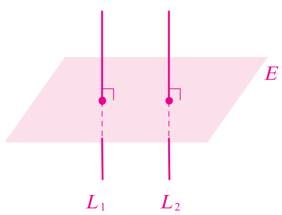


(B) ×：

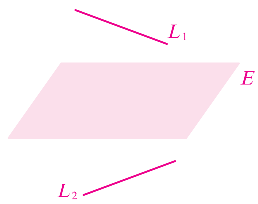


E_1 與 E_2 交於一直線

(C) ○：

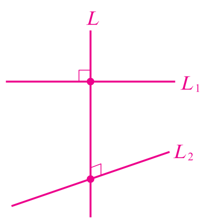


(D) ×：



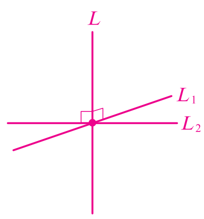
L_1 與 L_2 歪斜

(E) ×：①



L_1 與 L_2 歪斜

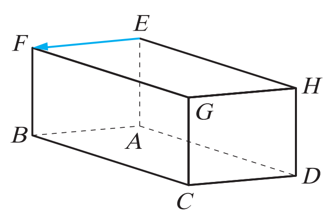
②



L_1 與 L_2 交於一點

故選(A)(C)

4. 如右圖的長方體，試問下列哪些向量與 $\overrightarrow{EF}$ 的內積為正數？



(A) $\overrightarrow{EH}$

(B) $\overrightarrow{EG}$

(C) $\overrightarrow{FC}$

(D) $\overrightarrow{FD}$

(E) $\overrightarrow{DB}$

解 (A) ×：$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{EH}$ $\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EH}=0$

(B) ○：$\angle FEG$ 為銳角 $\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}>0$

(C) ×：$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0+0=0$

(D) ×：$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EF}\cdot(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=0+0+\overrightarrow{EF}\cdot(-\overrightarrow{EF})=-|\overrightarrow{EF}|^2<0$

(E) ○：$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}>0$

故選(B)(E)

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. 已知坐標空間中三點 $A(2,-1,4)$，$B(a,3,2)$，$C(3,-5,b)$，試分別回答下列問題：

(1) 若 A，B，C 三點共線，則數對 $(a,b)=$＿＿＿＿＿＿。

(2) 若 $\overline{AB}$ 在 xy 平面的正射影長為 5，且 $a>0$，則 $a=$＿＿＿＿＿＿。

解 (1) $\overrightarrow{AB}=(a-2,4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-4,b-4)$

$\because A$，B，C 共線　$\therefore \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{a-2}{1}=\dfrac{4}{-4}=\dfrac{-2}{b-4}$

$\Rightarrow \begin{cases} a-2=-1 \\ b-4=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$

故數對 $(a,b)=(1,6)$

(2) A 在 xy 平面的正射影點 $A'(2,-1,0)$

B 在 xy 平面的正射影點 $B'(a,3,0)$

由已知，$\overline{A'B'}=5$，即 $\sqrt{(a-2)^2+4^2}=5$

$\Rightarrow a^2-4a+4+16=25$

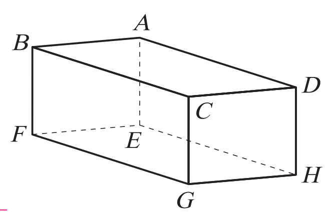
$\Rightarrow a^2-4a-5=0$

$\Rightarrow (a-5)(a+1)=0$

$\Rightarrow a=5$ 或 -1

$\because a>0$　$\therefore a=5$

6. 如右圖的長方體，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{BF}=3$，$\overline{FG}=12$。試求：



(1) D 點到直線 FG 的距離為＿＿＿＿＿＿。

(2) $\overline{HB}$ 的長度為＿＿＿＿＿＿。

解 (1) D 到直線 FG 的距離為 $\overline{DG}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{HG}^2}=\sqrt{9+16}=5$

(2) $\overline{HB}=\sqrt{\overline{HD}^2+\overline{DB}^2}=\sqrt{\overline{HD}^2+\overline{DA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{3^2+12^2+4^2}=\sqrt{169}=13$

7. 已知空間中兩向量 $\vec{a}=(k,-4,2)$，$\vec{b}=(2,1,1)$，則：

(1) 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 120°，且 k 是整數，則 $k=$ ________ 。

(2) 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角為 90°，則 $k=$ ________ 。

解 (1) $\cos 120^\circ=\dfrac{2k-4+2}{\sqrt{k^2+16+4}\sqrt{6}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{2k-2}{\sqrt{6}\sqrt{k^2+20}}=-\dfrac{1}{2}$

兩邊平方得 $\dfrac{4k^2-8k+4}{6(k^2+20)}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 16k^2-32k+16=6k^2+120\Rightarrow 10k^2-32k-104=0$

$\Rightarrow 5k^2-16k-52=0\Rightarrow(5k-26)(k+2)=0$

$\Rightarrow k=\dfrac{26}{5}$ 或 -2

$\because$ k 是整數 $\therefore k=-2$

(2) 由題意，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

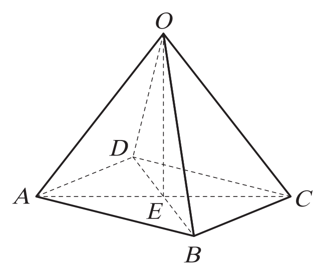
$\therefore$ 承(1)，$2k-4+2=0$

$\Rightarrow 2k=2\Rightarrow k=1$

8. 如右圖，$O-ABCD$ 是一個金字塔形狀的多面體，底面是一個正方形，側面是四個相等的正三角形，各稜長都是 6。試回答下列問題：

(1) $\cos\angle AOC=$ ________ 。

(2) 點 O 到正方形 $ABCD$ 所在的平面距離為________ 。



解 (1) $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$

$\cos\angle AOC=\dfrac{6^2+6^2-(6\sqrt{2})^2}{2\cdot 6\cdot 6}=0$

(2) 正方形 $ABCD$ 兩對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 互相平分，交於 E 點

且 $\overline{OE}\perp\overline{AC}$，$\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{OE}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

9. (1) $\begin{vmatrix} 7 & 33 & 2 \\ 21 & 88 & 8 \\ 14 & 55 & 3 \end{vmatrix} =$ ________。

(2) 滿足 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ x+5 & x & 7 \end{vmatrix} = 0$ 的 x 有兩個，將它們相加可得________。

解 (1) $\begin{vmatrix} 7 & 33 & 2 \\ 21 & 88 & 8 \\ 14 & 55 & 3 \end{vmatrix} = 7 \times 11 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

$= 77(24 + 48 + 30 - 32 - 27 - 40)$

$= 77 \times 3 = 231$

(2) 將行列式展開得

$7 + 4x + 20 + 3x^2 - 3x - 15 - 14x - 2x = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 15x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1$ 或 4

所求為 $1 + 4 = 5$

10. 已知空間中四點 $A(1，0，1)$，$B(2，2，4)$，$C(4，1，3)$，$D(3，k，2)$，其中 $k > 0$，則：

(1) 若 $ABCD$ 四點共平面，則 $k =$ ________。

(2) 若四面體 $ABCD$ 的體積為 3，則 $k =$ ________。

註：四面體體積 $= \dfrac{1}{6} \times$ 平行六面體體積

解 (1) $\overrightarrow{AB} = (1，2，3)$，$\overrightarrow{AC} = (3，1，2)$，$\overrightarrow{AD} = (2，k，1)$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 8 + 9k - 6 - 6 - 2k = 0$

$\Rightarrow 7k - 3 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{3}{7}$

(2) $\dfrac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} \right| = 3$

$\Rightarrow |7k - 3| = 18 \Rightarrow 7k - 3 = \pm 18$

$\Rightarrow 7k = 21$ 或 $-15 \Rightarrow k = 3$ 或 $-\dfrac{15}{7}$

$\because k > 0 \quad \therefore k = 3$

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 已知 $\vec{a}=(2,3,1)$，$\vec{b}=(x,y,z)$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=14$。試求：

(1) $x^2+y^2+z^2$ 的最小值。（5 分）

(2) $x^2+y^2+z^2$ 有最小值時的序組 (x,y,z)。（5 分）

解 $\vec{a}=(2,3,1)$，$\vec{b}=(x,y,z)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2x+3y+z=14$

(1) 由柯西不等式得 $(2^2+3^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(2x+3y+z)^2$

$\Rightarrow 14(x^2+y^2+z^2)\geq 14^2$

$\therefore x^2+y^2+z^2\geq 14$

即 $x^2+y^2+z^2$ 最小值為 14

(2) 令 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}=t$

則 $(x,y,z)=(2t,3t,t)$

代入 $2x+3y+z=14$

得 $4t+9t+t=14\Rightarrow t=1$

故序組 $(x,y,z)=(2,3,1)$

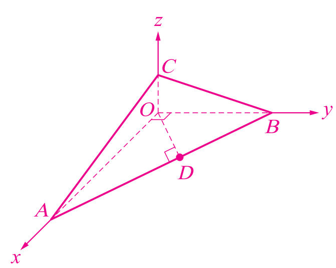
12. 坐標空間中，原點 $O(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,0,1)$，試求：

(1) $\triangle OAB$ 中，$\overline{AB}$ 邊上的高。（5 分）

(2) 四面體 $OABC$ 的體積。（5 分）

註：四面體體積 $=\dfrac{1}{6}\times$ 平行六面體體積

解 (1) 過 O 作垂直線交 $\overline{AB}$ 於 D，$\overline{OD}$ 為 $\overline{AB}$ 上的高



$\triangle AOB$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}$

又 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore 5\overline{OD}=4\times 3$

$\Rightarrow \overline{OD}=\dfrac{12}{5}$

(2) 四面體 $OABC$ 體積為 $\dfrac{1}{6}\times 4\times 3\times 1=2$