

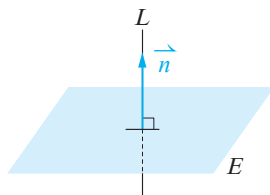
2-1 平面方程式

重點整理

一、平面方程式

1. 法向量：

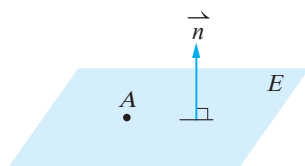
坐標空間中，設直線 L 與平面 E 垂直（即 L 是平面 E 的法線），如果向量 \vec{n} 為平行 L 的一個向量，則稱 \vec{n} 是平面 E 的一個法向量。此時也稱 \vec{n} 與平面 E 垂直，記為 $\vec{n} \perp E$ ，如右圖所示。



2. 平面方程式：

(1) 若向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ 是平面 E 的法向量，且點 $A(x_0, y_0, z_0)$ 在平面 E 上，則平面 E 的方程式為 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ 。整理為 $ax + by + cz + d = 0$ ，其中 $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ 。

例：平面 E 法向量 $\vec{n} = (2, 3, 1)$ ，且點 $A(1, -4, 3)$ 在平面 E 上，則 E 的方程式為 $2(x - 1) + 3(y + 4) + 1(z - 3) = 0$ ，整理得 $2x + 3y + z + 7 = 0$ 。

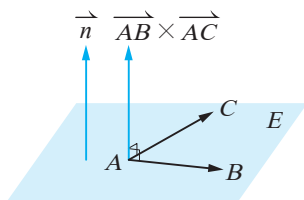


(2) 由(1)可發現，平面 E 方程式的 x, y, z 係數恰為法向量的分量 a, b, c 。設 $\vec{n} = (a, b, c)$ 是平面 E 的法向量，且點 $A(x_0, y_0, z_0)$ 在平面 E 上，可以假設 $ax + by + cz + d = 0$ ，將 (x_0, y_0, z_0) 代入，解 d 即可。

例：平面 E 法向量 $\vec{n} = (3, 1, 2)$ ，點 $A(4, 3, -1)$ 在平面 E 上，設 E 的方程式為 $3x + y + 2z + d = 0$ ，將 $(4, 3, -1)$ 代入得 $12 + 3 - 2 + d = 0$ ，得 $d = -13$ ，故平面 E 的方程式為 $3x + y + 2z - 13 = 0$ 。

3. 用公垂向量當作平面的法向量：

在平面上取兩個不平行的非零向量 \vec{AB} , \vec{AC} ，利用外積產生 \vec{AB} , \vec{AC} 的公垂向量，這個公垂向量可以為平面的法向量。



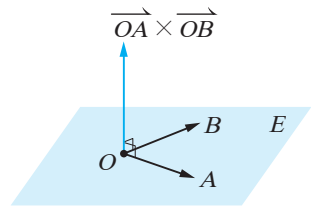
例：平面 E 通過 $A(-1, 2, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(3, -3, 4)$ 三點，試求平面 E 的方程式。

$\vec{AB} = (1, -1, 1)$, $\vec{AC} = (4, -5, 3)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} = (2, 1, -1)$ 。
因為 $\vec{AB} \times \vec{AC}$ 是 \vec{AB} , \vec{AC} 的公垂向量，所以是平面 E 的法向量。

又平面 E 通過點 $A(-1, 2, 1)$ ，故平面 E 的方程式為 $2(x + 1) + 1(y - 2) + (-1)(z - 1) = 0$ ，整理得 $2x + y - z + 1 = 0$ 。

4. 位置向量的線性組合：

空間中兩個不平行的位置向量 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , 它們的線性組合會張成一個過原點 O 的平面, 而 \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{OB} 的外積可以為這個平面的一個法向量。



例：設 O 為坐標空間的原點, 已知兩位置向量為

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (2, -1, 1)$, 所有的線性組合會張成一個平面 E , 試求 E 的方程式。

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (2, 3, -1)$, 此向量為 E 的法向量。

又平面 E 過 $(0, 0, 0)$, 故方程式為 $2x + 3y - z = 0$ 。

5. 已知截距求平面方程式：

若不通過原點的平面 E 分別與 x 、 y 、 z 軸, 交於 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, b, 0)$ 、 $C(0, 0, c)$, 其中 a 、 b 、 c 皆不為 0 (即 $abc \neq 0$), 則平面 E 的方程式為

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, a 、 b 、 c 分別稱為平面 E 在 x 、 y 、 z 軸的截距, 而

$(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ 為平面 E 的一個法向量。

例：平面 E 過 $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 1)$, 則 E 的方程式為

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$, 整理可得 $3x + 2y + 6z - 6 = 0$ 。 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)$ 是 E 的一

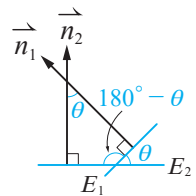
個法向量, 整理可得 $(3, 2, 6)$ 。

二、兩平面的夾角

兩平面的夾角可以由此兩平面法向量的夾角求得。

設平面 E_1, E_2 的法向量分別為 \vec{n}_1, \vec{n}_2 , 且 \vec{n}_1 與 \vec{n}_2 的夾角為 θ , 則

平面 E_1 與 E_2 的夾角為 θ 與 $180^\circ - \theta$, 其中 $\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$ 。



例：已知空間中兩平面 $E_1: 3x + 2y + z - 3 = 0$, $E_2: 2x + 3y - 2z + 7 = 0$, 試求 E_1, E_2 的夾角。

分別取 E_1, E_2 的法向量為 $\vec{n}_1 = (3, 2, 1)$ 、 $\vec{n}_2 = (2, 3, -2)$,

則 $\cos\theta = \frac{6 + 6 - 2}{\sqrt{14} \sqrt{17}} \approx 0.648203723$, 按計算機得 $\theta \approx 49.59^\circ$,

$180^\circ - 49.59^\circ = 130.41^\circ$, 故知 E_1, E_2 的夾角為 $49.59^\circ, 130.41^\circ$ 。

三、點到平面的距離

坐標空間中, 點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 的距離為

$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

例：已知空間中平面 $E: 2x + y + 2z + 3 = 0$, 點 $P(5, -4, 3)$,

則點 P 到平面 E 的距離為 $\frac{|10 - 4 + 6 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 5$ 。

四、兩平行平面的距離

坐標空間中，兩平行平面 $E_1: ax + by + cz + d_1 = 0$ ， $E_2: ax + by + cz + d_2 = 0$ 的距離為 $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

例：已知坐標空間中，兩平行平面 $E_1: 2x + 3y - 6z + 1 = 0$ ， $E_2: 2x + 3y - 6z + 15 = 0$ ，則 E_1, E_2 的距離為 $\frac{|1 - 15|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 2$ 。

例題 1 已知點坐標及法向量求平面方程式

- 試求通過點 $A(3, -1, 4)$ ，且以 $\vec{n} = (2, 3, -1)$ 為法向量的平面方程式。(5分)
- 設平面 E 通過點 $P(3, 0, 2)$ ，且與平面 $x + 2y - 3z + 1 = 0$ 平行，試求平面 E 的方程式。(5分)

解 (1) 令所求為 $2x + 3y - z + d = 0$
 $(3, -1, 4)$ 代入得 $6 - 3 - 4 + d = 0$
 $\Rightarrow d = 1$
 故所求為 $2x + 3y - z + 1 = 0$

(2) 設 E 的方程式為 $x + 2y - 3z + d = 0$
 將 $(3, 0, 2)$ 代入得 $3 + 0 - 6 + d = 0$
 $\Rightarrow d = 3$
 故所求為 $x + 2y - 3z + 3 = 0$

例題 2 不共線的相異三點決定一平面

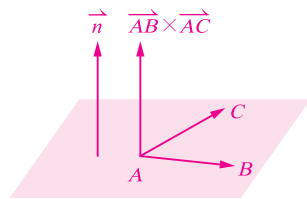
已知空間中三點 $A(1, -2, 0)$ ， $B(2, 1, 9)$ ， $C(3, -3, 4)$ ，試求：

- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 。(5分)
- ABC 三點所決定的平面方程式。(5分)

解 (1) $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 9)$ ， $\overrightarrow{AC} = (2, -1, 4)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ (21, 14, -7) \end{pmatrix}$$

(2) 承(1)， $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (21, 14, -7)$ 同時垂直 \overrightarrow{AB} ， \overrightarrow{AC}
 \therefore 取 $\vec{n} = (3, 2, -1)$ 可以是所求平面的法向量
 令 $3x + 2y - z + d = 0$
 將 $(1, -2, 0)$ 代入得 $3 - 4 - 0 + d = 0$
 $\Rightarrow d = 1$
 故所求為 $3x + 2y - z + 1 = 0$



例題 3 由位置向量的線性組合求平面方程式

已知坐標空間中， O 為原點， $\overrightarrow{OA}=(2, 1, -3)$ ， $\overrightarrow{OB}=(1, 1, 2)$ ，試求：

- (1) \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{OB} 的外積。(5分)
- (2) \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{OB} 的所有線性組合會張成一個平面，試求此平面方程式。(5分)

解 (1) $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ = (5, -7, 1)$$

(2) 取 $\vec{n}=(5, -7, 1)$

$$\text{令 } 5x - 7y + z + d = 0$$

$\because O(0, 0, 0)$ 在此平面上

$$\therefore (0, 0, 0) \text{ 代入得 } d = 0$$

所求為 $5x - 7y + z = 0$

例題 4 平面的截距式

- (1) 若平面 E 分別交 x 、 y 、 z 軸於 $A(2, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 3)$ 三點，試求平面 E 的方程式。(5分)
- (2) 已知平面 $E: 3x - 2y - 4z = 12$ 與坐標軸分別交於 $(a, 0, 0)$ 、 $(0, b, 0)$ 、 $(0, 0, c)$ ，試求序組 (a, b, c) 。(5分)

解 (1) 由已知及平面的截距式

$$\text{所求為 } \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$$

$$\text{同乘以 6 得 } 3x + 6y + 2z = 6$$

$$\text{即 } 3x + 6y + 2z - 6 = 0$$

(2) 已知 $3x - 2y - 4z = 12$

$$\text{兩邊同除以 12 得 } \frac{x}{4} - \frac{y}{6} - \frac{z}{3} = 1$$

$$\text{即 } \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{-3} = 1$$

故知此平面的 x 、 y 、 z 截距分別為 4 、 -6 、 -3

即序組 $(a, b, c) = (4, -6, -3)$

例題 5 兩平面的夾角(一)

- (1) 空間中兩平面 $E_1: 4x + 5y + 3z = 4$, $E_2: 2x + 2y - z = 1$, 試求 E_1 與 E_2 的夾角。(5分)
- (2) 空間中兩平面 $E_1: 2x + y + 4z = 1$, $E_2: 3x + 2y - z = 7$, 設 E_1 與 E_2 的銳夾角為 θ , 試求 $\cos\theta$ 。(5分)

解 (1) 取 $\vec{n}_1 = (4, 5, 3)$, $\vec{n}_2 = (2, 2, -1)$

$$\cos\theta = \frac{8 + 10 - 3}{\sqrt{50}\sqrt{9}} = \frac{15}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

可得 $\theta = 45^\circ$, 又 $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

\therefore 所求為 $45^\circ, 135^\circ$

(2) 取 $\vec{n}_1 = (2, 1, 4)$, $\vec{n}_2 = (3, 2, -1)$

$$\cos\theta = \frac{|6 + 2 - 4|}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{4}{7\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{21}$$

(按計算機得 $\theta \approx 76.50946454^\circ \approx 76.51^\circ$, 又 $180^\circ - 76.51^\circ = 103.49^\circ$)

\therefore 夾角為 $76.51^\circ, 103.49^\circ$)

例題 6 兩平面的夾角(二)

已知平面 $E_1: 2x + y + z = 3$, $E_2: x + ky + 2z = 1$ 。

- (1) 若平面 E_1, E_2 互相垂直, 試求 k 值。(5分)
- (2) 若平面 E_1 與 E_2 有一夾角為 60° , 試求 k 值。(5分)

解 取平面 E_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (2, 1, 1)$, 平面 E_2 的法向量 $\vec{n}_2 = (1, k, 2)$

(1) 因為 E_1, E_2 互相垂直, 所以 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$\text{即 } 2 + k + 2 = 0$$

解得 $k = -4$

(2) 已知平面 E_1 與 E_2 有一夾角為 60°

$$\text{則 } \cos 60^\circ = \frac{|2 + k + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}\sqrt{1 + k^2 + 4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{兩邊平方得 } \frac{k^2 + 8k + 16}{6(k^2 + 5)} = \frac{1}{4}$$

整理得 $k^2 - 16k - 17 = 0$, 則 $(k + 1)(k - 17) = 0$

解得 $k = -1$ 或 17

例題 7 點到平面的距離

- (1) 試求點 $P(3, 7, 2)$ 到平面 $E: 2x + y + z - 3 = 0$ 的距離。(5分)
(2) 已知點 $(2, 3, 0)$ 到平面 $x - 2y + 2z + k = 0$ 距離為 1，試求 k 值。(5分)

解 (1) 由點到平面距離公式得

$$\frac{|6 + 7 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

(2) 由已知條件，

$$\frac{|2 - 6 + 0 + k|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1$$

$$\Rightarrow |k - 4| = 3$$

$$\Rightarrow k - 4 = \pm 3$$

$$\Rightarrow k = 7 \text{ 或 } 1$$

例題 8 點到平面距離公式的應用

- (1) 已知 $A(1, 2, 1)$ 與 $B(-1, 2, 2)$ 兩點到平面 $E_1: 2x + 3y - 6z + d = 0$ 的距離相等，試求 d 值。(5分)
(2) 已知 $P(5, -2, 3)$ 與 $Q(3, 2, -2)$ 兩點在平面 $E_2: x - 2y + 2z + 1 = 0$ 的兩側，且直線 PQ 與平面 E_2 交於 R 點，試求 $\overline{PR} : \overline{QR}$ 。(5分)

解 (1) 由點到平面的距離公式，得

$$\frac{|2 + 6 - 6 + d|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{|-2 + 6 - 12 + d|}{\sqrt{4 + 9 + 36}}$$

$$\Rightarrow |d + 2| = |d - 8|$$

$$\Rightarrow d + 2 = \pm(d - 8)$$

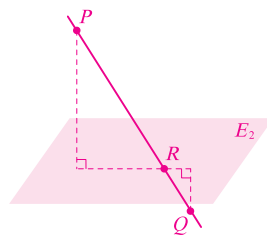
$$\Rightarrow d + 2 = d - 8 \text{ 或 } d + 2 = -d + 8$$

$$\Rightarrow 2 = -8 \text{ (不合) 或 } 2d = 6$$

解得 $d = 3$

(2) 如右圖，

$$\begin{aligned}\overline{PR} : \overline{QR} &= \frac{|5 + 4 + 6 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} : \frac{|3 - 4 - 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \\ &= 16 : 4 \\ &= 4 : 1\end{aligned}$$



例題 9 兩平行平面的距離

- (1) 已知平面 $E_1: 2x - 3y + 6z + 1 = 0$ 與平面 $E_2: 4x - 6y + 12z - 5 = 0$ ，試求平面 E_1 與 E_2 的距離。(5分)
- (2) 已知平面 E_1 與平面 $E_2: x + 2y + z + 3 = 0$ 平行，且平面 E_1 與 E_2 的距離為 4，試求平面 E_1 的方程式。(有兩解)(5分)

解 (1) 將 E_2 方程式兩邊同除以 2

$$\text{得 } 2x - 3y + 6z - \frac{5}{2} = 0$$

$$\therefore \text{所求為 } \frac{\left| 1 - \left(-\frac{5}{2}\right) \right|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{7}{7} = \frac{1}{2}$$

(2) 設所求為 $x + 2y + z + k = 0$

$$\text{則 } \frac{|k-3|}{\sqrt{1+4+1}} = 4$$

$$\Rightarrow |k-3| = 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow k-3 = \pm 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow k = 3 \pm 4\sqrt{6}$$

$$\therefore \text{所求為 } x + 2y + z + 3 + 4\sqrt{6} = 0 \text{ 或 } x + 2y + z + 3 - 4\sqrt{6} = 0$$

例題 10 已知點與垂直線段求平面方程式

- (1) 已知空間中兩點 $A(2, 5, 3)$ ， $B(4, 1, 5)$ ，試求 \overline{AB} 的垂直平分面方程式。(5分)
- (2) 已知點 $P(2, 4, 7)$ 對稱於平面 E 的點為 $Q(4, 2, 1)$ ，試求平面 E 的方程式。(5分)

解 (1) \overline{AB} 中點為 $M(3, 3, 4)$

$$\text{又 } \overrightarrow{AB} = (2, -4, 2)$$

$$\text{取法向量 } \vec{n} = (1, -2, 1)$$

$$\text{令 } x - 2y + z + d = 0$$

$$(3, 3, 4) \text{ 代入得 } 3 - 6 + 4 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = -1$$

$$\text{故得 } x - 2y + z - 1 = 0$$

(2) 顯然 \overline{PQ} 中點 M 在平面 E 上，由 P 、 Q 坐標得 $M(3, 3, 4)$

$$\text{又 } \overrightarrow{PQ} = (2, -2, -6)$$

$$\text{取法向量 } \vec{n} = (1, -1, -3)$$

$$\text{令 } x - y - 3z + d = 0$$

$$(3, 3, 4) \text{ 代入得 } 3 - 3 - 12 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 12$$

$$\therefore \text{所求為 } x - y - 3z + 12 = 0$$

