

3-2 貝氏定理

重點整理

一、條件機率的乘法法則

1. 條件機率的乘法法則：

假設 A, B 是樣本空間 S 中的兩事件且 $P(A) > 0$ ，則 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ 。

例：袋中有 4 顆白球、2 顆紅球，假設每球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取兩次，試求第一次取到白球且第二次取到紅球的機率。

顯然，第一次取到白球的機率為 $\frac{4}{6}$ ，

在第一次取到白球的條件下，第二次取球時剩 5 個球（3 白 2 紅），

取到紅球的機率為 $\frac{2}{5}$ 。

所以，第一次取到白球且第二次取到紅球的機率為 $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ 。

2. 條件機率乘法法則的推廣：

條件機率的乘法法則可以推廣到兩個事件以上，例如，三個事件 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 有如下關係 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3)$

$$= P(A_1 \cap A_2)P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2)。$$

例：袋中有 4 顆白球、2 顆紅球，假設每球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取三次，則第一次取到白球且第二次取到紅球

且第三次取到白球的機率為 $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$ 。

二、貝氏定理

1. 分割：

設 S 為樣本空間，若 n 個非空事件 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 滿足：

(1) 事件兩兩不相交。 $(A_i \cap A_j = \emptyset)$

(2) 合起來是全部。 $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S)$

則稱 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割 (partition)。

例： $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

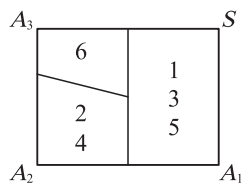
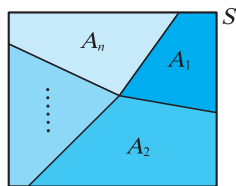
令 $A_1 = \{1, 3, 5\}$ ， $A_2 = \{2, 4\}$ ， $A_3 = \{6\}$ ，

顯然， A_1, A_2, A_3 兩兩不相交

(任兩個事件都沒有共同元素)，

且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ ，

所以 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 是 S 的一個分割。



例： $S=\{a, b, c, d, e\}$ 。

令 $A_1=\{a, b, c\}$ ， $A_2=\{d, e\}$ ， $A_3=\{c, e\}$ ，

顯然 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ， $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e\} = S$ ，

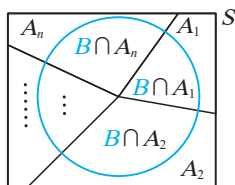
但是 $A_1 \cap A_3 = \{c\} \neq \emptyset$ ， $A_2 \cap A_3 = \{e\} \neq \emptyset$ ，

故 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 不是 S 的一個分割。

A_2	A_1	S
d	$a \quad b$	
e	c	A_3

2. 加法法則：

假設 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是樣本空間 S 的一個分割， B 是一個事件，如下圖所示



則有 $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$

$$= P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)$$

3. 貝氏定理：

假設 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是樣本空間 S 的一個分割， B 是一個事件，且 $P(B) > 0$ ，則

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)},$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。

三、主觀機率與客觀機率

機率應符合生活經驗，但不能違背機率的性質。

1. 客觀機率：

將多筆資料經過觀察、記錄、調查與試驗，所獲得的事件發生頻率（相對次數）當作事件發生的機率，也稱為頻率機率。

例：擲一顆骰子 100 次，偶數點出現 32 次，我們可以認為這顆骰子出現偶數點的機率是 $\frac{32}{100}$ ，也就是 0.32。

2. 主觀機率：

依據個人經驗，對事件可能發生的程度所做的機率猜測。

例：我覺得我這學期各科都及格的機率有八成。

例題 1 條件機率的乘法法則

- (1) 籤筒內有 16 支籤，其中 6 支標示有獎，且每支籤被抽中的機會均等。今甲，乙兩人依序抽籤，每人抽一支且抽完不放回，試求甲、乙兩人都中獎的機率。(5 分)
- (2) 袋中有 4 顆白球、3 顆黑球，甲、乙兩人依序各取出一球，且每顆球被取出的機會均等，取後不放回，試求乙取到白球的機率。(5 分)

解 (1) 設 A 、 B 分別代表甲、乙中獎的事件

$$\text{則由條件機率的乘法法則得 } P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{6}{16} \times \frac{5}{15} = \frac{1}{8}$$

(2) 設 A 、 B 分別代表甲、乙取到白球的事件

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

例題 2 條件機率乘法法則的推廣

冰箱裡有 10 杯大小相同的飲料，使用膠膜封口，只知道其中 3 杯是咖啡，其餘都是紅茶。若每杯被取出的機會均等，今甲，乙，丙三人依序各取一杯，取出後立即飲用，試求：

- (1) 甲取出咖啡的機率。(5 分)
- (2) 甲，乙，丙三人都取得咖啡的機率。(5 分)

解 設 A 、 B 、 C 分別代表甲、乙、丙取得咖啡的事件

$$(1) P(A) = \frac{3}{10}$$

$$(2) P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

例題 3 機率性質的應用

在西洋占星術裡有白羊、金牛、雙子、巨蟹、……、水瓶、雙魚等十二星座，假設每個星座出現的機率均等，若小偉在班上隨機詢問 5 位同學，試問這 5 位同學有人星座相同的機率。（10 分）

解 假設這 5 位同學都屬於不同星座

$$\text{機率為 } \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{55}{144}$$

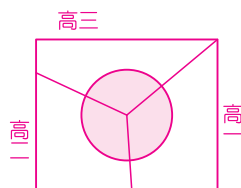
$$\text{故這 5 位同學有人星座相同的機率為 } 1 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144}$$

例題 4 加法法則（一）

某校學生中，高一占全校 35%，高二占 33%，高三占 32%。已知高一學生的 80% 參加社團，高二學生的 90% 參加社團，高三學生的 40% 參加社團。今隨意抽選該校一名學生，試求此學生參加社團的機率。（10 分）

解 由加法法則知所求為

$$\begin{aligned} & 35\% \times 80\% + 33\% \times 90\% + 32\% \times 40\% \\ &= \frac{7050}{10000} \\ &= 0.705 \end{aligned}$$

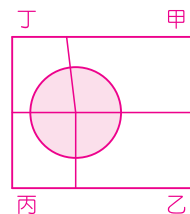


例題 5 加法法則(二)

某公司產品來自甲、乙、丙、丁四部機器，四部機器的產量分別占總產量的 35 %、30 %、20 %、15 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、1 %、1.5 %、2 %。已知這些機器生產的產品都放在總公司的倉庫裡，假設品管人員任意抽取一件檢查，試求此產品不合格的機率。(10 分)

解 由加法法則知所求為

$$\begin{aligned} & 35 \% \times 2 \% + 30 \% \times 1 \% + 20 \% \times 1.5 \% + 15 \% \times 2 \% \\ &= \frac{160}{10000} \\ &= 0.016 \end{aligned}$$



例題 6 貝氏定理(一)

小慧有三個保險箱，每個保險箱各有兩個抽屜。已知第一個保險箱的兩個抽屜各放一枚金幣，第二個保險箱的一個抽屜放一枚金幣、一個放一枚銀幣，第三個保險箱的兩個抽屜各放一枚銀幣。今小慧任選一個保險箱，打開一個抽屜，發現裡面有一枚金幣，試求這個保險箱的另一個抽屜也有一枚金幣的機率。(10 分)

解 設 A 、 B 、 C 分別代表取到第一個保險箱、第二個保險箱、第三個保險箱的事件， G 代表取到金幣的事件

如果希望另一個抽屜也有金幣，表示小慧取到第一個保險箱

因此所求為計算在已知取到一枚金幣的條件下，此金幣取自第一個保險箱的機率

由條件機率的乘法法則，

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A)P(G|A) + P(B)P(G|B) + P(C)P(G|C) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{0}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

再由貝氏定理可得，此金幣取自第一個保險箱的機率為

$$P(A|G) = \frac{P(A)P(G|A)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

故這個保險箱的另一個抽屜也有一枚金幣的機率為 $\frac{2}{3}$

例題 7 貝氏定理(二)

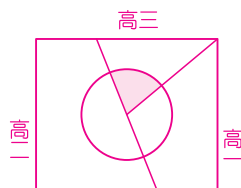
校刊社的社員中，高一占 30%，高二占 50%，高三占 20%。已知高一社員的 20% 是男生，高二社員的 12% 是男生，高三社員的 10% 是男生。試問：

- (1) 任抽一名社員，此社員是男生的機率。(5 分)
- (2) 已知小偉(男生)是校刊社社員，他是高三學生的機率。(5 分)

解 (1) 由加法法則知所求為

$$\begin{aligned} & 30\% \times 20\% + 50\% \times 12\% + 20\% \times 10\% \\ &= \frac{600}{10000} + \frac{600}{10000} + \frac{200}{10000} = 0.06 + 0.06 + 0.02 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 由貝氏定理可得 } \frac{0.02}{0.06 + 0.06 + 0.02} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$



例題 8 貝氏定理(三)

生技公司開發一種檢測方法，用來判斷是否感染某種病毒。已知真正感染病毒的人，檢驗出結果為陽性的比率為 0.95；未感染而檢驗出陽性(誤判感染)的比率則為 0.05。假設某社區有 10% 的人已感染此病毒，今任選一人加以檢測，試求：

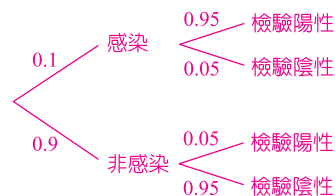
- (1) 此人的檢驗結果為陽性的機率。(5 分)
- (2) 已知此人的檢驗結果為陽性，試求此人確實感染病毒的機率。(5 分)

解 (1) 由加法法則知檢驗出陽性的機率為

$$0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.05 = 0.095 + 0.045 = 0.14$$

(2) 由貝氏定理知此人確實感染病毒的機率為

$$\frac{0.095}{0.095 + 0.045} = \frac{19}{28}$$



例題 9 貝氏定理(四)

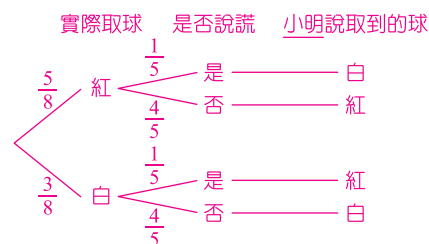
袋中有 5 紅球、3 白球，小明隨機取出一球，並且說他取到紅球。根據過去的經驗，小明說謊的機率為 $\frac{1}{5}$ ，試求小明確實取到紅球的機率。(10 分)

解 小明說他取到紅球有兩種情形：

取到紅球且說他取到紅球，機率為 $\frac{5}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{40}$

取到白球但說他取到紅球(說謊)，機率為 $\frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$

故由貝氏定理可知小明確實取到紅球的機率為 $\frac{\frac{20}{40}}{\frac{20}{40} + \frac{3}{40}} = \frac{20}{23}$



例題 10 客觀機率的應用

同時擲大、中、小共三枚硬幣 200 次，觀察各硬幣出現的正、反面情形，依大、中、小順序記錄如下表。

	正正正	正正反	正反正	正反反	反正正	反正反	反反正	反反反
次數	28	26	26	25	29	23	22	21

若不計較硬幣的大小，試求下列兩種情形的客觀機率：

(1) 出現兩個正面一個反面。(5 分)

(2) 至多一個正面。(5 分)

解 (1) 出現兩個正面一個反面，其機率為 $\frac{26 + 26 + 29}{200} = \frac{81}{200} = 0.405$

(2) 至多一個正面，其機率為 $\frac{25 + 23 + 22 + 21}{200} = \frac{91}{200} = 0.455$