第4章 綜合演練

月　日

得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$，則 A^2 為下列哪個方陣？

(A) $\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&6\\0&1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}2&6\\0&2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}0&1\\1&9\end{bmatrix}$

解 $A^2=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&3+3\\0+0&0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\0&1\end{bmatrix}$

故選(B)

2. 某線性變換將坐標平面上的點以原點為中心逆時針旋轉 60°，試問其變換矩陣為下列哪個選項？

(A) $\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}-\cos 60^\circ&\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&-\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&\sin 60^\circ\\-\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&-\cos 60^\circ\end{bmatrix}$

解 以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的變換矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

故選(C)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 下列哪些二階方陣有乘法反方陣？

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 33 & 2 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

解 若二階方陣的行列式值不為 0，則此方陣的乘法反方陣存在

(A) ○：$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$

(B) ×：$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

(C) ○：$\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 33 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 33 = -11$

(D) ○：$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12$

(E) ×：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

故選(A)(C)(D)

4. 坐標平面上的三角形經過下列哪幾個二階方陣變換後，面積可以保持不變？

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$

解 線性變換後與變換前的面積比，恰為變換方陣行列式值的絕對值

欲使變換前後面積不變，必須其行列式值為 ± 1

(A) ○：$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

(B) ○：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(C) ○：$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$

(D) ×：$\begin{vmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix} = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

(E) ○：$\begin{vmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{vmatrix} = \cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ = 1$

故選(A)(B)(C)(E)

三、填充題(每格 5 分，共 60 分)

5. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ k & 3\end{bmatrix}$，試問：

(1) A 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則 $k=$ ________。

(2) 平面上面積為 6 的平行四邊形經 A 作線性變換後，面積變為 48，已知 $k>0$，則 $k=$ ________。

解 (1) 若 $\det(A)=0$，則 A^{-1} 不存在

令 $\begin{vmatrix}2 & 1\\ k & 3\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow |6-k|=0\Rightarrow k=6$

(2) 面積比為 $\dfrac{48}{6}=8$

$\therefore \left|\begin{vmatrix}2 & 1\\ k & 3\end{vmatrix}\right|=8$

$\Rightarrow 6-k=\pm 8\Rightarrow k=14$ 或 $k=-2$

又 $k>0$ $\therefore k=14$

6. (1) 已知 $2A-3B=\begin{bmatrix}1 & -6\\ -7 & 2\end{bmatrix}$，$A+2B=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 7 & 8\end{bmatrix}$，則方陣 $A=$ ________。

(2) 已知二階方陣 $T=\begin{bmatrix}a & \frac{2}{5}\\ 2a & b\end{bmatrix}$ 為轉移矩陣，則數對 $(a,b)=$ ________。

解 (1) 由已知得

$4A-6B=\begin{bmatrix}2 & -12\\ -14 & 4\end{bmatrix}$

$3A+6B=\begin{bmatrix}12 & 33\\ 21 & 24\end{bmatrix}$

兩式相加(消去 B)得 $7A=\begin{bmatrix}14 & 21\\ 7 & 28\end{bmatrix}$

$\therefore A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

(2) 轉移矩陣各行之和為 1

$a+2a=1$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{2}{5}+b=1$ $\therefore b=\dfrac{3}{5}$

故數對 $(a,b)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5}\right)$

7. (1) 將增廣矩陣 $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$ 使用列運算，變成 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array}\right]$，則數對 $(a,b)=$ ________。

(2) 使用矩陣列運算將增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 3 & c & 1 & 0 \end{array}\right]$ 變為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$，則序組 $(a,b,c)=$ ________。

解 (1) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right] \times(-3) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -16 & -16 \end{array}\right] \times\left(-\frac{1}{16}\right)$

$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \times(-5) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

故數對 $(a,b)=(2,1)$

(2) 由已知得矩陣對應的方程組之解為 $(x,y,z)=(1,-2,3)$

而增廣矩陣對應的方程組為 $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+5y+3z=b \\ 3x+cy+z=0 \end{cases}$

將 $(x,y,z)=(1,-2,3)$ 代入得

$\begin{cases} a-4+3=1 \\ 2-10+9=b \\ 3-2c+3=0 \end{cases}$

解得 $a=2$，$b=1$，$c=3$

故序組 $(a,b,c)=(2,1,3)$

8. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，則：

(1) $A^3=$ ________。

(2) $A^{2029}=$ ________。

解 (1) $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) 承(1)，$A^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=-I_2$

$A^{2029}=A^{3\times 676+1}=(A^3)^{676}A=(-I_2)^{676}A=I_2A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

9. (1) 坐標平面上，點 $P(6,-4)$ 對直線 $x-\sqrt{3}y=0$ 作鏡射後，新坐標為________。

(2) 在坐標平面上，將點 $A(4,2)$ 沿 x 軸（水平）方向推移 y 坐標的 3 倍，再以原點為中心旋轉 60°，得新坐標為________。

解 (1) 對稱軸過原點且斜率為 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，故知此線與 x 軸正向夾 30° 角，

鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{bmatrix}$

得 $\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3}+2\end{bmatrix}$

故知變換後的點坐標為 $(3-2\sqrt{3},3\sqrt{3}+2)$

(2) $\begin{bmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ\\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3}+1\end{bmatrix}$

∴新坐標 $(5-\sqrt{3},5\sqrt{3}+1)$

10. (1) 二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 滿足 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，則數對 (a,b) =________。

(2) 已知矩陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$，則矩陣 $A=$________。

解 (1) $\because (A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$

由已知，$AB+BA=2AB$

$\therefore AB=BA$，即 $\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}3a+b & a+3b\\ 13 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+3 & 3b+4\\ a+9 & b+12\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}3a+b=3a+3 \cdots\cdots ①\\ a+3b=3b+4 \cdots\cdots ②\\ a+9=13 \cdots\cdots ③\\ b+12=15 \cdots\cdots ④\end{cases}$

由①得 $b=3$，由②得 $a=4$，由③得 $a=4$，由④得 $b=3$

故數對 $(a,b)=(4,3)$

(2) 由已知

$A\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}^{-1}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}$

故矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}$

第 4 章 綜合演練

四、計算題（共 20 分）

11. 某地有甲、乙兩種報紙，根據統計，訂閱甲報經一年後仍訂閱甲報者有 40 %，其餘改訂乙報；訂閱乙報經一年後仍訂乙報者為 70 %，其餘則改訂甲報。試求：

(1) 轉移矩陣。（5 分）

(2) 假設目前訂甲報占 50 %，訂乙報占 50 %。則：

① 經過一年後訂閱甲報者占多少比例？（5 分）

② 經過兩年後訂閱甲報者占多少比例？（5 分）

解 (1) 由已知，轉移矩陣

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{甲} & \text{乙} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{甲} \\ \text{乙} \end{array}$$

(2) 令 $X_0=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{甲} \\ \text{乙} \end{array}$

① 一年後，$X_1=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 訂甲報者占 35 %

② 兩年後，$X_2=AX_1=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.335 \\ 0.665 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 訂甲報者占 33.5 %

12. 坐標平面上兩點 $P(1,-1)$、$Q(-2,3)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後，得到對應的點 $P'(1,-1)$、$Q'(-1,6)$，試求二階方陣 A。（5 分）

解 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$