

1-1 空間概念

重點整理

基本事實

1. 相異兩點決定唯一的直線，兩端可以無窮延伸，如圖(一)。
2. 不共線的三點決定唯一的平面，可以無窮延伸，如圖(二)。
3. 一平面中相異兩點所決定的直線落在此平面上，如圖(三)。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

決定一平面的條件：以下四種情形，決定唯一平面。

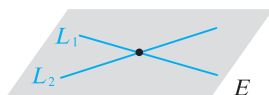
1. 不共線的相異三點，如圖(四)。
2. 一直線與線外一點，如圖(五)。
3. 恰交於一點的兩直線，如圖(六)。
4. 兩平行直線，如圖(七)。



圖(四)



圖(五)



圖(六)

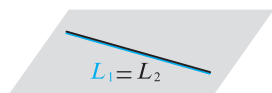


圖(七)

一、直線與直線的關係

空間中兩直線 L_1 與 L_2 的位置關係有四種：

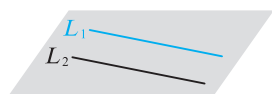
1. 兩直線重合，如圖(八)。
2. 兩直線恰交於一點，如圖(九)。
3. 兩直線平行：共平面且不相交，如圖(十)。
4. 兩直線不共平面：不平行也不相交，稱兩直線互為歪斜線，如圖(十一)。



圖(八)



圖(九)



圖(十)

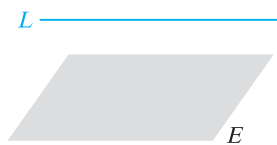


圖(十一)

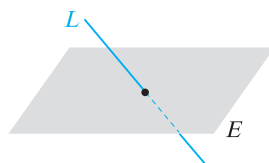
上面四種位置關係中的兩直線恰交於一點、兩直線平行，都可以決定唯一平面。

二、直線與平面的關係

1. 直線 L 與平面 E 不相交，又稱直線與平面平行，記為 $L \parallel E$ ，如圖(ㄅ)。
2. 直線 L 與平面 E 相交於一點，如圖(ㄆ)。



圖(ㄅ)



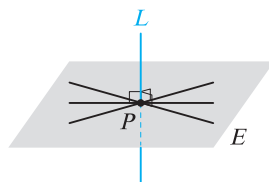
圖(ㄆ)

3. 直線 L 落在平面 E 上，此時兩者交於無限多點，如圖(ㄇ)。
4. 直線與平面垂直：

設直線 L 與平面 E 相交於一點 P ，且平面上通過 P 的每一條直線都與 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直，如圖(ㄏ)。



圖(ㄇ)



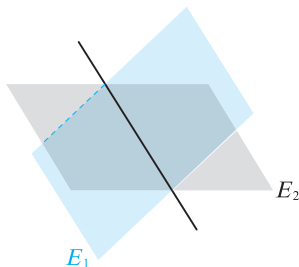
圖(ㄏ)

三、平面與平面的關係

1. 平面 E_1 與平面 E_2 不相交，也稱兩者平行，記為 $E_1 \parallel E_2$ ，如圖(ㄨ)。
2. 平面 E_1 與平面 E_2 相交於一直線，如圖(ㄘ)。
3. 平面 E_1 與平面 E_2 重合，如圖(ㄩ)。



圖(ㄨ)



圖(ㄘ)



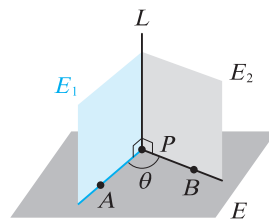
圖(ㄩ)

4. 兩面角：(由兩個半平面及其交線組成)

在平面 E_1 、 E_2 的交線 L 上取一點 P ，過 P 作垂直 L 的平面 E (稱為 E_1 、 E_2 的公垂平面)。分別在 E_1 、 E_2 與 E 的交線上各取一點 A 、 B ， $\angle APB$ 的大小 θ 就是此兩面角的大小。

5. 兩平面的夾角：

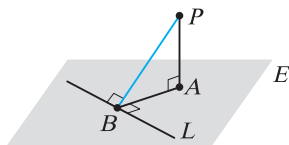
兩相交平面包含四個兩面角，之間有相等或互為補角的關係，統稱為兩平面的夾角。當兩平面 E_1 與 E_2 的夾角為直角時，稱兩平面垂直，以 $E_1 \perp E_2$ 表示。



四、三垂線定理

設直線 PA 與平面 E 垂直於 A 點，直線 L 為平面 E 上不通過 A 點的直線：

1. 若由 A 點向直線 L 作垂線，設其垂足為 B ，則直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點。
2. 反之，若直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，則直線 AB 與直線 L 亦垂直於 B 點。



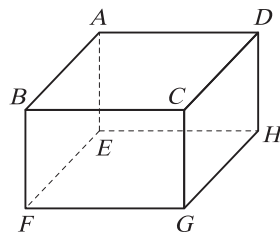
例題 1 空間中直線與直線的關係

右圖為一個長方體，由各邊所決定的直線中，

- (1) 哪些與 $\overline{AB}$ 平行？(6 分)
- (2) 哪些與 $\overline{AC}$ 歪斜？(12 分)

解 (1) 直線 CD 、直線 FE 、直線 GH

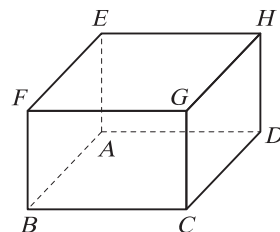
(2) 直線 BF 、直線 DH 、直線 EF 、直線 FG 、直線 GH 、直線 HE



例題 2 空間中直線與平面的關係

右圖為一個長方體，由各邊所決定的直線中，哪些與平面 $EFGH$ 平行？(8 分)

解 直線 AB 、直線 BC 、直線 CD 、直線 DA



例題 3 空間中點線面的關係

關於空間中點、線、面的關係，請選出正確的選項。(10分)

- (A) 過平面 E 外一點 P ，有無限多條直線與平面 E 平行
 (B) 過平面 E 外一點 P ，恰有一平面垂直平面 E
 (C) 相異兩直線 L_1 與直線 L_2 若不相交，則 L_1 與 L_2 可能平行或歪斜
 (D) 若相異兩直線 L_1 、 L_2 都與平面 E 平行，則 $L_1 \parallel L_2$
 (E) 直線 L_1 在平面 E_1 上，直線 L_2 在平面 E_2 上，若 $E_1 \parallel E_2$ ，則 $L_1 \parallel L_2$

解 (A) ☐

(B) $\times$ ：無限多個

(C) ☐

(D) $\times$ ：可能歪斜或交於一點

(E) $\times$ ：可能歪斜

故選(A)(C)

例題 4 兩平面的夾角(一)

右圖是一個正四面體，各稜長為 12。若側面 ABC 與底面 BCD 所形成的兩面角為 θ ，試求 $\cos\theta$ 。(8分)

解 取 $\overline{BC}$ 中點 M

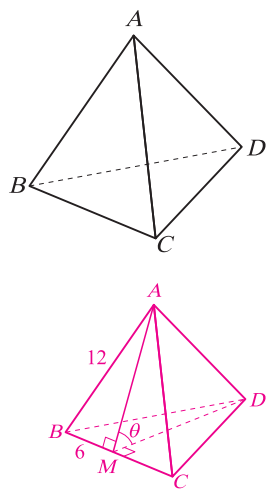
$\because \triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 都是正三角形

$\therefore \overline{AM} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{DM} \perp \overline{BC}$

$\overline{AM} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$ ，同理 $\overline{DM} = \sqrt{108}$

$$\therefore \cos\theta = \cos\angle AMD = \frac{108 + 108 - 144}{2 \cdot \sqrt{108} \cdot \sqrt{108}} = \frac{1}{3}$$

(按計算機得 $\theta \approx 70.52877937^\circ \approx 70.5^\circ$)



例題 5 兩平面的夾角(二)

右圖為四面體 $OABC$ ，其中 $\triangle ABC$ 是邊長為 6 的正三角形， $\overline{OA} = 3$ ， $\overline{OA}$ 垂直底面 ABC 。試求：

- (1) $\overline{OB}$ 的長。(5 分)
- (2) 設側面 OBC 與底面 ABC 的兩面角為 θ ，試求 $\cos\theta$ 。(5 分)

解 (1) $\triangle OAB$ 是直角三角形

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

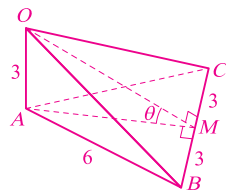
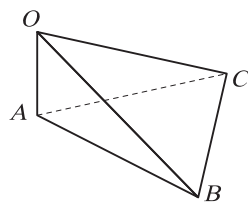
- (2) 取 $\overline{BC}$ 中點 M

則 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{OM} \perp \overline{BC}$

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{45 - 3^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{27 + 36 - 9}{2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



例題 6 兩平面的夾角(三)

如右圖， $ABCD$ 是一個四面體， $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 13$ ， $\overline{CD} = 10$ ， $\overline{AB} = 8$ ，則：

- (1) 若 M 、 N 分別為 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AB}$ 的中點，試求 $\overline{MN}$ 長。(5 分)
- (2) 設側面 ACD 與底面 BCD 所夾的兩面角為 θ ，試求 $\cos\theta$ 。(5 分)

解 如右圖，連接 $\overline{AM}$ 、 $\overline{NM}$ 、 $\overline{BM}$

- (1) $\because M$ 為 $\overline{CD}$ 中點，且 $\triangle ACD$ 為等腰三角形

$$\therefore \overline{AM} \perp \overline{CD}, \overline{CM} = \overline{DM} = 5, \text{ 故 } \overline{AM} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

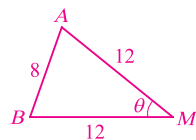
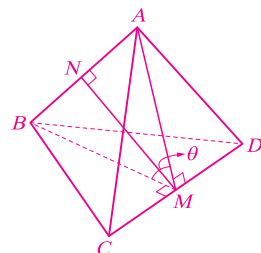
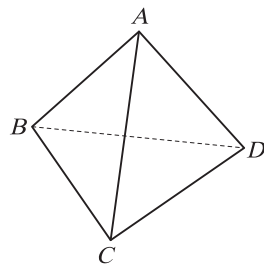
同理， $\overline{BM} = 12$ ， $\triangle ABM$ 為等腰三角形

N 為 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

$$\text{又 } \triangle AMN \text{ 中，} \overline{AN} = 4, \text{ 故 } \overline{MN} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

- (2) $\triangle ABM$ 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AM} = \overline{BM} = 12$

$$\text{由餘弦定理可得 } \cos\theta = \cos\angle AMB = \frac{144 + 144 - 64}{2 \times 12 \times 12} = \frac{7}{9}$$



例題 7 空間中畢氏定理的應用(一)

右圖為四面體 $ABCD$ ，已知 $\overline{AB}$ 垂直底面 BCD ， $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ ，又 $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BD} = 13$ ， $\overline{CD} = 5$ ，試求 $\overline{AC}$ 。(6 分)

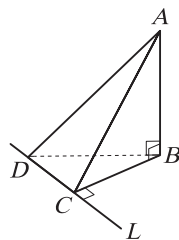
解 $\because \overline{BC} \perp \overline{CD}$

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形

$$\text{得 } \overline{BC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

又 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

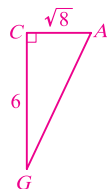
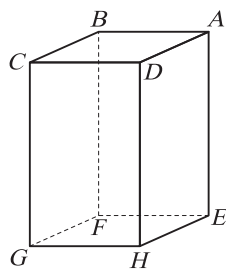
$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$$



例題 8 空間中畢氏定理的應用(二)

如右示意圖， $ABCD-EFGH$ 是一個長方體，試分別回答下列問題：

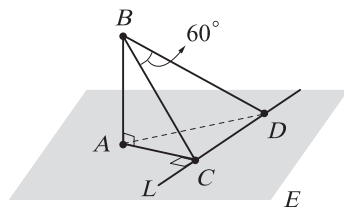
- (1) 若 $ABCD$ 是一個邊長為 2 的正方形， $\overline{AE} = 6$ ，試求 $\overline{AG}$ 。(5 分)
- (2) 若 $ABCD$ 是一個邊長為 4 的正方形， $\overline{CE} = 8$ ，試求長方體 $ABCD-EFGH$ 的體積。(5 分)



- 解** (1) 連接 $\overline{AC}$ ， $\overline{AG}$ ，如右圖，在 $\triangle ACG$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{CG}$
 由畢氏定理可得 $\overline{AC}^2 = 4 + 4 = 8$ ，且 $\overline{CG} = \overline{AE} = 6$
 $\therefore \overline{AG} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{8 + 36} = 2\sqrt{11}$
- (2) 連接 $\overline{AC}$ ， $\overline{CE}$ ，在 $\triangle ACE$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{AE}$
 由畢氏定理可得 $\overline{AC}^2 = 16 + 16 = 32$
 $\therefore \overline{AE} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{64 - 32} = 4\sqrt{2}$
 此長方體底面是邊長為 4 的正方形，高為 $4\sqrt{2}$
 故所求體積為 $4 \times 4 \times 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$

例題 9 三垂線定理

如右圖，平面 E 上有一直線 L 與一點 A 。過 A 點作 $\overline{AB}$ 垂直平面 E ，作 $\overline{AC}$ 垂直直線 L 交於 C 點。已知 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\angle CBD = 60^\circ$ ，試求 $\overline{BD}$ 。(10 分)

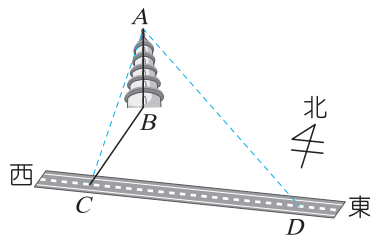


- 解** 由已知， $\triangle ABC$ 是直角三角形
 $\therefore \overline{BC} = \sqrt{64 + 36} = 10$
 又因為 $\overline{AB} \perp E$ ， $\overline{AC} \perp L$
 由三垂線定理知 $\overline{BC} \perp L$
 $\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形
 故 $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$

例題 10 三垂線定理的應用

如右示意圖，小輝在 7 公尺高的塔上 A 點望見正南方的東西向筆直道路上一點 C ，以及 C 點正東方的 D 點，並測得 $\overline{AC} = 25$ 公尺， $\overline{AD} = 65$ 公尺。試求：

- (1) 塔的底部 B 點到東西向道路 C 點的距離 $\overline{BC}$ 。(5 分)
- (2) 東西向道路上 C 、 D 兩點的距離 $\overline{CD}$ 。(5 分)



- 解** (1) $\overline{BC} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (公尺)
 (2) 由已知及三垂線定理知 $\overline{AC} \perp \overline{CD}$
 $\therefore \overline{CD} = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{3600} = 60$ (公尺)