

## 2-2 空間直線方程式

### 重點整理

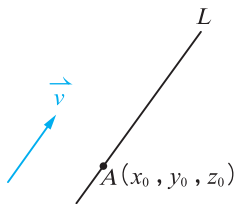
#### 一、直線方程式

##### 1. 直線的參數式：

直線  $L$  通過點  $A(x_0, y_0, z_0)$  與非零向量  $\vec{v} = (a, b, c)$  平行，

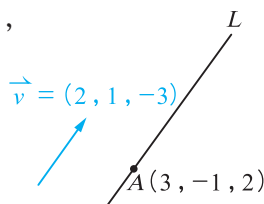
$$\text{則 } L \text{ 的參數式為 } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \text{ 為實數,}$$

$t$  稱為參數， $\vec{v}$  稱為  $L$  的方向向量。



**例：**直線  $L$  通過點  $A(3, -1, 2)$ ，方向向量  $\vec{v} = (2, 1, -3)$ ，

$$\text{參數式為 } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \text{ 為實數.}$$



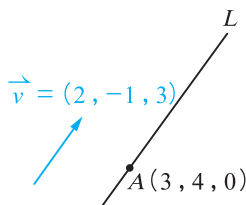
##### 2. 直線的比例式：

直線  $L$  通過點  $A(x_0, y_0, z_0)$ ，且與方向向量  $\vec{v} = (a, b, c)$  平行，其中  $a, b, c$  都不為 0，則  $L$  的比例式為  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ 。

**例：**直線  $L$  通過點  $A(3, 4, 0)$ ，

且與方向向量  $\vec{v} = (2, -1, 3)$  平行，

$$\text{則 } L \text{ 的比例式為 } \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{3}.$$



##### 3. 直線的兩面式：

兩個不平行的平面相交於唯一的一條直線，用這兩個平面方程式來表示此直線，稱為直線的兩面式。

**例：**平面  $E_1: x + 2y - 3z = 1$ ， $E_2: 3x - 2y + z = 4$ ，因為  $E_1, E_2$  的法向量不平

行，所以  $E_1$  與  $E_2$  交於一條直線  $L$ 。 $L$  可以用  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$  表示，稱為  $L$

的兩面式。

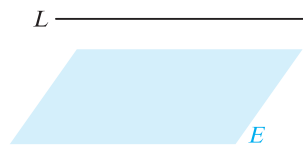
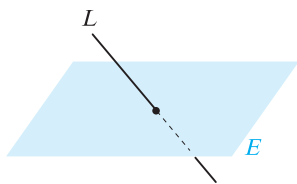
#### 二、直線與平面的關係

##### 1. 空間中直線 $L$ 與平面 $E$ 的關係：

(1)  $L$  與  $E$  交於一點。

(2)  $L$  落在  $E$  上。

(3)  $L$  與  $E$  平行。



將  $L$  上的點用參數式表示，代入  $E$  的方程式，觀察解的個數：

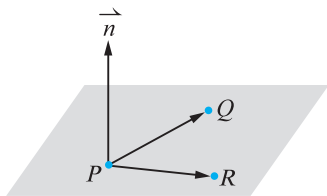
(1) 恰有一解： $L$  與  $E$  交於一點。

(2) 無限多解： $L$  落在  $E$  上。

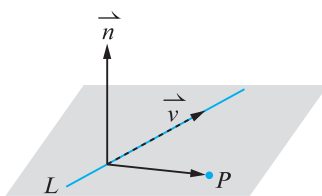
(3) 無解： $L$  與  $E$  平行(不相交)。

## 2. 決定平面的條件及其方程式

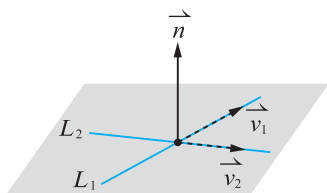
(1) 不共線的相異三點。



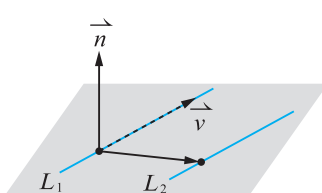
(2) 一直線及線外一點。



(3) 兩相交直線。

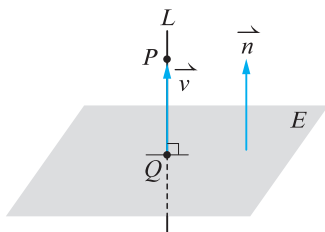


(4) 兩平行直線。



根據已知條件作兩個向量，用外積產生公垂向量（法向量），配合已知點坐標，求平面方程式。

## 3. 點在平面的投影點：

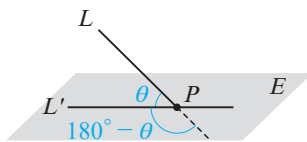


過點  $P$  作垂直平面  $E$  的直線  $L$ ，並以平面  $E$  的法向量  $\vec{n}$  為此線的方向向量，得到  $L$  的參數式，將  $L$  上的點坐標以參數  $t$  表示，代入平面方程式，解參數  $t$ ，即可求出交點  $Q$ （即投影點）坐標。

**例：**已知點  $P(6, 1, 2)$ ，平面  $E: 2x + 3y - z + 1 = 0$ ，試求  $P$  在  $E$  的投影點  $Q$  的坐標。

過  $P$  作垂直平面  $E$  的直線  $L$ ，取平面  $E$  的法向量  $(2, 3, -1)$  為  $L$  的方向向量，故知  $L$  任一點坐標可以表為  $(6 + 2t, 1 + 3t, 2 - t)$ ，代入  $E$  的方程式得  $12 + 4t + 3 + 9t - 2 + t + 1 = 0$ ，解得  $t = -1$ ，故所求為  $Q(4, -2, 3)$ 。

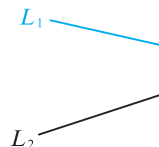
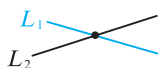
## 4. 直線與平面的夾角：



直線  $L$  與平面  $E$  交於一點  $P$  且直線  $L$  對平面  $E$  的投影不為一個點時，直線  $L$  投影在平面  $E$  上形成一條直線  $L'$ （將  $L$  的點垂直投影在平面  $E$  上所成的圖形），此時  $L$  與  $L'$  的夾角  $\theta$  與  $180^\circ - \theta$  稱為直線  $L$  與平面  $E$  的夾角。

### 三、兩直線的關係

1. 重合。
2. 相交於一點。
3. 平行。
4. 歪斜。



分別用  $t, s$  寫出此兩直線的參數式並解聯立，由解的個數與方向向量的關係，即可判斷。

1. 無限多解： $L_1$  與  $L_2$  重合。
2. 恰有一解： $L_1$  與  $L_2$  交於一點。
3. 無解且方向向量平行： $L_1$  與  $L_2$  平行。
4. 無解且方向向量不平行：歪斜。

坐標空間中，兩直線  $L_1, L_2$  的方向向量分別為  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 。

(1)  $\vec{v}_1$  與  $\vec{v}_2$  平行時，兩直線可能重合或平行。

**例：**空間中兩直線  $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ ,  $L_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{6}$ ,

試判斷兩直線關係。

**討論：** $L_1$  的方向向量  $\vec{v}_1 = (2, -1, 3)$ ,  $L_2$  的方向向量  $\vec{v}_2 = (4, -2, 6)$ , 顯然  $\vec{v}_1$  與  $\vec{v}_2$  平行，故  $L_1$  與  $L_2$  可能重合或平行。

**解：**將  $L_1, L_2$  寫成參數式  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ ,  $t$  為實數,  $\begin{cases} x = -2 + 4s \\ y = 1 - 2s \\ z = 6s \end{cases}$ ,  $s$  為實數。

$$\text{解} \begin{cases} 3 + 2t = -2 + 4s \\ -t = 1 - 2s \\ -1 + 3t = 6s \end{cases}, \text{整理得} \begin{cases} 2t - 4s = -5 & \text{①} \\ t - 2s = -1 & \text{②} \\ 3t - 6s = 1 & \text{③} \end{cases}$$

由①、②解得  $t, s$  無解，表示沒有一組  $t, s$  使兩直線有共同交點，又此兩直線方向向量平行，故知直線  $L_1$  與  $L_2$  平行。

**例：**空間中兩直線  $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$ ,  $L_2: \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 2 - 2s \\ z = 1 + s \end{cases}$ ,  $s$  為實數，

試判斷兩直線關係。

**討論：** $L_1$  的方向向量  $\vec{v}_1 = (3, 2, -1)$ ,  $L_2$  的方向向量  $\vec{v}_2 = (-3, -2, 1)$ , 顯然  $\vec{v}_1$  與  $\vec{v}_2$  平行，故  $L_1$  與  $L_2$  可能重合或平行。

**解：**將  $L_1$  寫成參數式  $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ ,  $t$  為實數。

$$\text{解} \begin{cases} -1 + 3t = 2 - 3s \\ 2t = 2 - 2s \\ 2 - t = 1 + s \end{cases}, \text{整理得} \begin{cases} 3t + 3s = 3 \\ 2t + 2s = 2 \\ t + s = 1 \end{cases}$$

顯然  $t, s$  有無限多組解，即  $L_1$  與  $L_2$  有無限多個交點，故知直線  $L_1$  與  $L_2$  重合。

(2)  $\vec{v}_1$  與  $\vec{v}_2$  不平行時，兩直線可能交於一點或歪斜。

**例：**空間中兩直線  $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$ ， $L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{1}$ ，

試判斷兩直線關係。

**討論：** $L_1$  的方向向量  $\vec{v}_1 = (-1, 3, 2)$ ， $L_2$  的方向向量  $\vec{v}_2 = (2, 3, 1)$ ，  
顯然  $\vec{v}_1$  與  $\vec{v}_2$  不平行，故  $L_1$  與  $L_2$  可能歪斜或交於一點。

**解：**將  $L_1, L_2$  寫成參數式

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \text{ 為實數}, \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 5 + 3s \\ z = 2 + s \end{cases}, s \text{ 為實數}。$$

$$\text{解} \begin{cases} 1 - t = 2 + 2s \\ -1 + 3t = 5 + 3s \\ -1 + 2t = 2 + s \end{cases}, \text{得 } t = 1, s = -1。$$

將  $t = 1$  代入  $L_1$  得交點  $(0, 2, 1)$ ，故知直線  $L_1$  與  $L_2$  交於一點。

**例：**空間中兩直線  $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ ， $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ ，

試判斷兩直線關係。

**討論：** $L_1$  的方向向量  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ， $L_2$  的方向向量  $\vec{v}_2 = (2, 1, 1)$ ，  
顯然  $\vec{v}_1$  與  $\vec{v}_2$  不平行，故  $L_1$  與  $L_2$  可能歪斜或交於一點。

**解：**將  $L_1, L_2$  寫成參數式  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \text{ 為實數}, \begin{cases} x = 2s \\ y = s \\ z = 2 + s \end{cases}, s \text{ 為實數}。$

$$\text{解} \begin{cases} 2 + t = 2s \cdots \cdots \text{①} \\ t = s \cdots \cdots \text{②} \\ 1 + t = 2 + s \cdots \cdots \text{③} \end{cases}, \text{由①、②解得 } t = 2, s = 2, \text{但代入③}$$

不合。表示並沒有一組  $t, s$  使得兩直線有共同交點，且兩直線方向向量不平行，故兩直線歪斜。

#### 四、點到直線的距離

設  $P$  點為  $L$  外一點，從  $P$  點作直線  $L$  的垂直線，令垂足為  $Q$  點，則  $\overline{PQ}$  長度為  $P$  點到直線  $L$  的距離。

**例：**已知空間中一點  $P(2, 1, -1)$  與直線

$L: \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{2}$ ，試求點  $P$  與直線  $L$  的距離。

由  $P$  點往直線  $L$  作垂線的垂足坐標  $Q$  可為

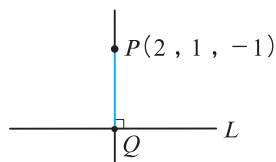
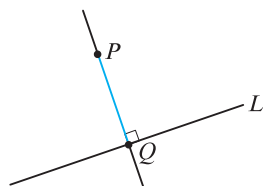
$(3 + 3t, 2t, 7 + 2t)$ ，因此  $\overrightarrow{PQ} = (3t + 1, 2t - 1, 2t + 8)$ 。

因為  $\overrightarrow{PQ}$  與  $L$  的方向向量  $(3, 2, 2)$  垂直，

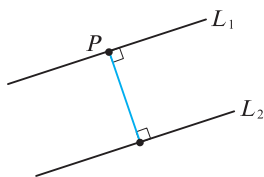
所以  $3(3t + 1) + 2(2t - 1) + 2(2t + 8) = 0$ ，

解得  $t = -1$ ，得  $Q$  坐標  $(0, -2, 5)$ 。

故  $P$  到  $L$  的距離為  $\overline{PQ} = \sqrt{(0-2)^2 + (-2-1)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{49} = 7$ 。



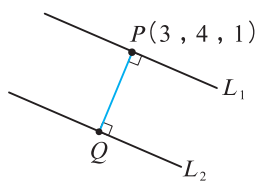
## 五、兩平行線的距離



在  $L_1$  上取一點  $P$ ，求  $P$  到  $L_2$  的距離，所得即為兩平行線  $L_1, L_2$  的距離。

**例：**空間中兩平行直線  $L_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=4+2t \\ z=1+t \end{cases}$ ， $t$  為實數， $L_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ ，

試求  $L_1$  與  $L_2$  的距離。



由  $L_1$  的參數式知  $P(3, 4, 1)$  為線上一點，由  $P$  做  $L_2$  的垂線，令垂足為  $Q$ 。

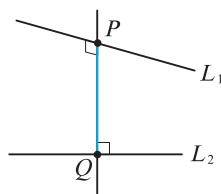
由  $L_2$  的比例式令  $Q$  坐標為  $(3+s, -2+2s, 1+s)$ ，

$\overrightarrow{PQ} = (s, 2s-6, s)$  與  $L_2$  的方向向量  $(1, 2, 1)$  垂直，

因此  $1(s) + 2(2s-6) + 1(s) = 0$ ，解得  $s=2$ ， $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 2)$ 。

故  $L_1$  與  $L_2$  的距離為  $PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 。

## 六、兩歪斜線的距離

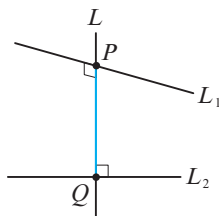


在  $L_1, L_2$  上各取一點  $P, Q$ ，使直線  $PQ$  同時垂直  $L_1, L_2$ ，則  $\overline{PQ}$  長度就是兩歪斜線  $L_1, L_2$  的距離。 $\overrightarrow{PQ}$  稱為  $L_1, L_2$  的公垂線， $\overline{PQ}$  稱為  $L_1, L_2$  的公垂線段。

(所謂「使直線  $PQ$  同時垂直  $L_1, L_2$ 」，就是「使  $\overrightarrow{PQ}$  同時垂直  $L_1, L_2$  的方向向量」。)

**例：**已知直線  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{2}$  與  $L_2: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$  互為歪斜線，

試求  $L_1$  與  $L_2$  的距離。



設  $L_1, L_2$  的公垂線  $L$  與  $L_1, L_2$  分別交於  $P, Q$  兩點。

取  $P(1+t, -3-2t, 5+2t)$ ， $Q(3-2s, 2+s, 2s)$ ，

得  $\overrightarrow{PQ} = (-2s-t+2, s+2t+5, 2s-2t-5)$

$\overrightarrow{PQ}$  分別與  $L_1$ 、 $L_2$  的方向向量  $(1, -2, 2)$ 、 $(-2, 1, 2)$  垂直，

$$\text{所以 } \begin{cases} 1(-2s-t+2)-2(s+2t+5)+2(2s-2t-5)=0 \\ -2(-2s-t+2)+1(s+2t+5)+2(2s-2t-5)=0 \end{cases}$$

解得  $t=-2$ ， $s=1$ ，故得  $P(-1, 1, 1)$ ， $Q(1, 3, 2)$ ，

$$\text{其中 } \overline{PQ} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

為  $L_1$  與  $L_2$  的距離。

### 例題 1 空間中直線的參數式與比例式

(1) 試求通過點  $A(2, 1, 3)$ ，且與向量  $\vec{v} = (3, 1, -4)$  平行的直線  $L$  的參數式。(5分)

(2) 設直線  $L$  通過點  $A(3, -2, 4)$ ， $B(5, 1, 2)$  兩點，試求直線  $L$  的比例式。(5分)

解 (1) 
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases}, t \text{ 為實數}$$

(2)  $\overrightarrow{AB} = (2, 3, -2)$

$$\therefore \text{所求為 } \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-2}$$

$$\left( \text{也可寫成 } \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2} \right)$$

### 例題 2 空間中直線的兩面式

已知兩平面  $E_1: 2x + 3y - z = 9$  和  $E_2: 3x - 2y - 8z = 7$  相交於直線  $L$ ，試求：

(1) 直線  $L$  的方向向量。(5分)

(2) 直線  $L$  的參數式。(5分)

解 (1) 取  $\vec{n}_1 = (2, 3, -1)$ ， $\vec{n}_2 = (3, -2, -8)$

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= \left( \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-26, 13, -13) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{取 } L \text{ 的方向向量為 } \vec{v} = (2, -1, 1)$$

(2) 令  $z = t$  代入  $E_1, E_2$  方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = t + 9 & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ 3x - 2y = 8t + 7 & \cdots \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = t + 9 & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ 3x - 2y = 8t + 7 & \cdots \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{由 ①} \times 2 + \text{②} \times 3 \text{ 得 } 13x = 26t + 39$$

$$\text{則 } x = 3 + 2t \text{ 代入 ① 得 } 3y = 9 + t - 2(3 + 2t) = 3 - 3t$$

$$\therefore y = 1 - t$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \text{ 為實數}$$

### 例題 3 直線與平面的關係

- (1) 已知平面  $E$  方程式為  $4x + 2y - 3z + 1 = 0$ ，直線  $L: \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{2}$ ，試討論直線  $L$  與平面  $E$  的關係。(5分)
- (2) 已知平面  $E$  方程式為  $3x + 5y - 2z + 4 = 0$ ，直線  $L: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ ，試討論直線  $L$  與平面  $E$  的關係。(5分)

**解** (1) 由  $L$  的比例式得  $(x, y, z) = (4 + 3t, 3 + t, 5 + 2t)$   
代入  $E$  的方程式得  $4(4 + 3t) + 2(3 + t) - 3(5 + 2t) + 1 = 0$   
 $\Rightarrow 8t = -8$   
 $\Rightarrow t = -1$  (恰有一解)  
故知  $L$  與  $E$  交於一點  $(1, 2, 3)$

(2) 由  $L$  的比例式得  $(x, y, z) = (3 + t, 2 - t, 1 - t)$   
代入  $E$  的方程式得  $3(3 + t) + 5(2 - t) - 2(1 - t) + 4 = 0$   
 $\Rightarrow 0t = -21$  (無解)  
故知  $L$  與  $E$  平行

### 例題 4 空間中點與直線的問題(平行線、平面方程式)

已知空間中一點  $P(2, 3, -2)$  與直線  $L: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{2}$ ，試求：

- (1) 過  $P$  點與直線  $L$  平行的直線方程式。(5分)
- (2)  $P$  點與直線  $L$  決定的平面方程式。(5分)

**解** (1) 所求直線與已知直線的方向向量相同

$$\text{故得 } \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{2}$$

(2) 作示意圖如右

直線  $L$  過點  $Q(0, 3, 1)$ ，方向向量  $\vec{v} = (1, 2, 2)$

$$\vec{QP} = (2, 0, -3)$$

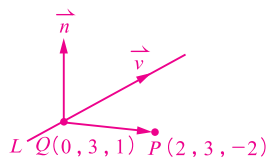
$$\vec{QP} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6, -7, 4)$$

取法向量  $\vec{n} = (6, -7, 4)$

$$\text{令 } 6x - 7y + 4z + d = 0$$

$$(2, 3, -2) \text{ 代入得 } 12 - 21 - 8 + d = 0 \Rightarrow d = 17$$

$$\therefore \text{所求為 } 6x - 7y + 4z + 17 = 0$$



### 例題 5 空間中決定平面的其他條件(相交於一點的兩直線、平行線)

- (1) 已知直線  $L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-1}{1}$  與  $L_2: \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-3}$  相交於一點，試求包含直線  $L_1$  與  $L_2$  的平面方程式。(5分)
- (2) 已知直線  $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$  與  $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-6}{1}$  為兩平行直線，若平面  $E$  包含直線  $L_1$  與  $L_2$ ，試求平面  $E$  的方程式。(5分)

**解** (1) 作示意圖如右

$$\text{取 } \vec{v}_1 = (4, -6, 1), \vec{v}_2 = (5, 1, -3)$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left( \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \right) = (17, 17, 34)$$

$$\text{取法向量 } \vec{n} = (1, 1, 2), \text{ 令 } x + y + 2z + d = 0$$

$$(2, 3, -3) \text{ 代入得 } 2 + 3 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\therefore \text{所求為 } x + y + 2z + 1 = 0$$

(2) 作示意圖如右

$$\text{在 } L_1, L_2 \text{ 分別取 } A(1, 0, 3), B(1, 1, 6)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (0, 1, 3)$$

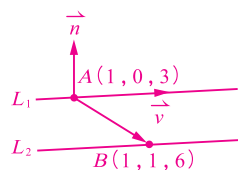
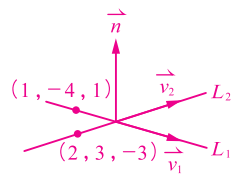
$$\text{方向向量 } \vec{v} = (2, -1, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4, 6, -2)$$

$$\text{取法向量 } \vec{n} = (2, 3, -1), \text{ 令 } 2x + 3y - z + d = 0$$

$$(1, 0, 3) \text{ 代入得 } 2 + 0 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

$$\therefore \text{所求為 } 2x + 3y - z + 1 = 0$$



### 例題 6 點對平面的投影點與對稱點

已知空間中點  $P(2, 1, 3)$ ，平面  $E: x + 2y - z + 5 = 0$ ，試求：

- (1)  $P$  點對平面  $E$  的投影點  $Q$  的坐標。(5分)
- (2)  $P$  點對平面  $E$  的對稱點  $R$  的坐標。(5分)

**解** 作示意圖如右

(1) 過  $P$  點作垂直  $E$  的直線  $L$

平面  $E$  的法向量  $\vec{n}$  可以為  $L$  的方向向量

$$\text{故 } L \text{ 的參數式為 } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \text{ 為實數}$$

$$\text{代入 } E \text{ 的方程式得 } (2+t) + 2(1+2t) - (3-t) + 5 = 0 \Rightarrow 6t = -6 \Rightarrow t = -1$$

得  $L$  與  $E$  交點  $Q(1, -1, 4)$

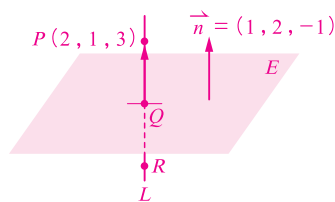
故  $P$  點對平面  $E$  的投影點為  $Q(1, -1, 4)$

(2) 設  $R$  點坐標為  $(a, b, c)$

$$\text{因為 } Q \text{ 是 } \overline{PR} \text{ 的中點，由中點公式 } \left( \frac{a+2}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+3}{2} \right) = (1, -1, 4)$$

$$\text{得 } a = 0, b = -3, c = 5$$

故  $P$  點對平面  $E$  的對稱點為  $R(0, -3, 5)$



### 例題 7 空間中兩直線的關係

(1) 試判斷  $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$  與  $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{2}$  兩直線的關係。(5分)

(2) 試判斷  $L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$  與  $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{1}$  兩直線的關係。(5分)

解

(1) 將  $L_1, L_2$  寫成參數式  $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ ,  $t$  為實數,  $\begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = 1 + s \\ z = 4 + 2s \end{cases}$ ,  $s$  為實數

$$\text{解} \begin{cases} -1 + 3t = 2 + 3s & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ t = 1 + s & \cdots \cdots \cdots \text{②} \\ 2 + 2t = 4 + 2s & \cdots \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

得  $t, s$  有無限多組解, 表示兩直線有無限多個交點, 故知兩直線重合。

(2) 將  $L_1, L_2$  寫成參數式  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ ,  $t$  為實數,  $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 4 - s \\ z = -1 + s \end{cases}$ ,  $s$  為實數

$$\text{解} \begin{cases} 2 + t = 1 + s & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ 1 + 2t = 4 - s & \cdots \cdots \cdots \text{②} \\ 3 - t = -1 + s & \cdots \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

由①、②式解得  $t = \frac{2}{3}, s = \frac{5}{3}$ , 但代回③式不合, 表示並沒有一組  $t, s$  使得兩直線有共同交點, 又此兩直線方向向量不平行, 故兩直線歪斜。

### 例題 8 空間中點到直線的投影點與距離

已知坐標空間中點  $P(2, 3, -2)$ , 直線  $L: \frac{x-3}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ , 試求:

(1)  $P$  點在直線  $L$  的投影點坐標。(5分)

(2)  $P$  點到直線  $L$  的距離。(5分)

解 作示意圖如右

(1) 過  $P$  作直線垂直  $L$  且交於  $Q$

因  $Q$  也在  $L$  上, 故可設  $Q$  點坐標為  $(3+t, -3-t, -1-t)$

取  $\overrightarrow{PQ} = (1+t, -6-t, 1-t)$

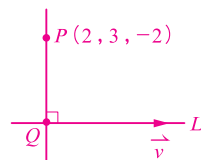
$L$  的方向向量  $\vec{v} = (1, -1, -1)$

顯然  $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} \therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Rightarrow 1+t - (-6-t) - (1-t) = 0 \Rightarrow 3t = -6 \Rightarrow t = -2$$

故得  $Q(1, -1, 1)$

(2)  $P$  點到  $L$  的距離即  $\overline{PQ} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-1))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$



### 例題 9 空間中兩直線的距離(平行線、歪斜線)

(1) 試求兩平行直線  $L_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{1}$  與  $L_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{1}$  的距離。

(5分)

(2) 已知直線  $L_1: \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$  與  $L_2: \frac{x-9}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$  互為歪斜線，試求

$L_1$  與  $L_2$  的距離。(5分)

**解** (1) 作示意圖如右

由  $L_1$  的比例式取點  $P(2, 4, 2)$ ，方向向量  $\vec{v} = (4, 2, 1)$

過  $P$  作直線  $L$  同時垂直  $L_1, L_2$

因為  $Q$  在  $L_2$ ，故設  $Q$  點坐標為  $(2+4t, -4+2t, -3+t)$

$\overrightarrow{PQ} = (4t, -8+2t, -5+t) \quad \because \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} \quad \therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

即  $4 \cdot 4t + 2(-8+2t) + (-5+t) = 0 \Rightarrow 21t = 21 \Rightarrow t = 1$ ，得  $Q(6, -2, -2)$

$\overline{PQ} = \sqrt{(2-6)^2 + (4-(-2))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{16+36+16} = 2\sqrt{17}$

故  $L_1$  與  $L_2$  的距離為  $2\sqrt{17}$

(2) 作示意圖如右，作  $L_1, L_2$  的公垂線  $L$  並分別交於  $P, Q$

由  $L_1, L_2$  的比例式設  $P(5-t, -3+2t, -2+2t)$ ，

$Q(9+2s, 1-s, 5+2s)$

則  $\overrightarrow{PQ} = (4+2s+t, 4-s-2t, 7+2s-2t)$

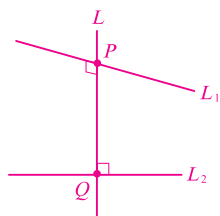
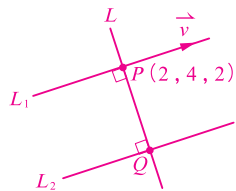
取  $L_1, L_2$  的方向向量  $\vec{v}_1 = (-1, 2, 2), \vec{v}_2 = (2, -1, 2)$

顯然  $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_1$  且  $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_2$ ，即  $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 0, \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 0$

故得  $\begin{cases} -4-2s-t+8-2s-4t+14+4s-4t=0 \\ 8+4s+2t-4+s+2t+14+4s-4t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9t=18 \\ 9s=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ s=-2 \end{cases}$

$\therefore P(3, 1, 2), Q(5, 3, 1)$

$\overline{PQ} = \sqrt{(3-5)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$ ，故  $L_1$  與  $L_2$  的距離為 3



### 例題 10 以直線的參數式求距離最小值

已知坐標空間中點  $A(3, 4, 1)$  與直線  $L: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-9}{3}$ ，設點  $P$  為直線  $L$  上的動

點，試求  $\overline{PA}$  的最小值。(10分)

**解** 如右圖，直線  $L$  上的任一點  $P$  可表示為  $(5+2t, 4+t, 9+3t)$

$$\overline{PA} = \sqrt{(2+2t)^2 + t^2 + (8+3t)^2}$$

$$= \sqrt{14t^2 + 56t + 68}$$

$$= \sqrt{14(t^2 + 4t) + 68}$$

$$= \sqrt{14(t+2)^2 + 12}$$

故當  $t = -2$  時， $\overline{PA}$  有最小值  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

〈另解〉

$\overrightarrow{AP} = (2+2t, t, 8+3t)$ ，直線  $L$  的方向向量  $\vec{v} = (2, 1, 3)$

當  $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$  時， $\overline{PA}$  有最小值，即  $2(2+2t) + t + 3(8+3t) = 0$

$\Rightarrow 4 + 4t + t + 24 + 9t = 0 \Rightarrow 14t = -28 \Rightarrow t = -2$

$\therefore \overrightarrow{AP} = (-2, -2, 2)$ ，則  $\overline{PA} = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$

